INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

ESCUELA SUPERIOR DE CÓMPUTO

APUNTES DE LA UNIDAD DE APRENDIZAJE
“Análisis Fundamental de Circuitos”

PROGRAMA ACADÉMICO:
Ingeniería en Sistemas Computacionales

NIVEL: I

Autores:
M. en C. Rocio Almazán Farfán
Lic. Myriam Noemi Paredes Cadena
Ing. Juan Carlos Martínez Díaz

CIUDAD DE MÉXICO 2017

ÍNDICE

Resumen ii
Introducción iii
Competencias iv
Objetivo General iv
Orientación Didáctica iv
Unidad Temática I: Leyes de Kirchhoff en Corriente Directa y Alterna 1
Objetivo Particular 1
Estrategias De Aprendizaje 1
Evaluación De Los Aprendizajes 1
1.1 Operación del Amperímetro, Voltímetro, Óhmetro y Osciloscopio 2
1.2 Fasores 18
1.2.1. Números Complejos 23
1.2.2 Coordenadas Polares 23
1.3 Ley de Ohm 25
1.4 Ley de Kirchhoff de Voltaje 28
1.5 Ley de Kirchhoff de Corriente 32
Unidad Temática II: Técnicas en el Análisis de Circuitos en Corriente Directa y Alterna 41
Objetivo Particular 41
Estrategias de Aprendizaje 41
Evaluación de los Aprendizajes 41
2.1 Análisis de Mallas 42
2.2 Análisis de Nodos 51
2.3 Divisor de Voltaje 60
2.4 Divisor de Corriente 63
Unidad Temática III: Teoremas de Circuitos 69
Objetivo Particular 69
Estrategias De Aprendizaje 69
Evaluación De Los Aprendizajes 69
3.1 Teorema de Superposición 70
3.2 Teorema de Intercambio de Fuentes 82
3.3 Teorema de Thevenin 86

3.4 Teorema de Norton 93

3.5 Teorema de Máxima Transferencia de Potencia 96

Bibliografía..... 99

Índice de Figuras

Unidad Temática I: Leyes de Kirchhoff en Corriente Directa y Alterna

Figura 1.1. Indicadores Analógicos 3
Figura 1.2. Indicadores digitales 3
Figura 1.3. Métrica de resolución 4
Figura 1.4. Conexión Óhmetro 6
Figura 1.5. Terminales del Óhmetro 7
Figura 1.6. Componentes internos de un galvanómetro D'Arsonval 7
Figura 1.7. Espira de una bobina en el campo magnético del imán permanente 9
Figura 1.8. Fuerzas dentro de un campo electromagnético 9
Figura 1.9. Fuerzas electromagnéticas envueltas en el movimiento de un galvanómetro D'Arsonval 10
Figura 1.10. Circuito utilizado para determinar la resistencia interna de un galvanómetro 12
Figura 1.11. Medidor de corriente con rango extendido por medio del circuito derivador elemental de corriente simple 13
Figura 1.12. Conexión del Voltímetro en el Circuito bajo medición 14
Figura 1.13. Uso del Multímetro 15
Figura 1.14. Subsistemas de un osciloscopio básico 16
Figura 1.15. Panel de control de un osciloscopio básico 18
Figura 1.16. Características de una señal senoidal 20
Figura 1.17. Señal senoidal y señal cosenoidal 20
Figura 1.18. Componentes de un vector 21
Figura 1.19. Representación de una señal senoidal con fasores 22
Figura 1.20. Cálculo del voltaje instantáneo 22
Figura 1.21. Cada número desde cero hasta ±∞ se puede representar en el eje real 23
Figura 1.22. Definición de la forma rectangular 24
Figura 1.23. Definición de la forma polar 24
Figura 1.24. Circuito Básico 26
Figura 1.25. Gráfica Ley de Ohm 27
Figura 1.26. Circuito simple con dos nodos 28
Figura 1.27. Una malla simple 29
Figura 1.28. Diagrama de la aplicación de la Ley de Kirchhoff de Voltaje a un circuito de corriente directa en serie 30
Figura 1.29. Fuente de Voltaje 31
Figura 1.30. Símbolo del resistor 31
Figura 1.31. Diagrama de la aplicación de la Ley de Kirchhoff para Corriente a un circuito de corriente directa en paralelo 33
Figura 1.32. Símbolo de batería 33
Figura 1.33. Sentido del flujo de corriente en el resistor 34
Figura 1.34. Diagrama de la aplicación de la Ley de Kirchhoff para Corriente polarizado 34
Figura 1.35 Circuito para el ejemplo 35
Figura 1.36 Circuito para el ejemplo 36
Figura 1.37 Circuito para el ejemplo 37
Figura 1.38 Circuito para el ejemplo 38

Unidad Temática II: Técnicas en el Análisis de Circuitos en Corriente Directa y Alterna

Figura 2.1. Diagrama de la aplicación del análisis de mallas a un circuito cerrado 42
Figura 2.2. Diagrama de una supermalla en un circuito cerrado 44
Figura 2.3. Diagrama de una supermalla en un circuito cerrado con la dirección de corrientes asignada 44
Figura 2.4. Diagrama de una supermalla sustituyendo la fuente de corriente con un corto circuito en un circuito cerrado 45
Figura 2.5 Circuito para el ejemplo 46
Figura 2.6 Circuito para el ejemplo 47
Figura 2.7 Circuito para el ejemplo 48
Figura 2.8. Circuito propuesto 48
Figura 2.9. Asignación de las Corrientes de malla y las impedancias con subíndice 49
Figura 2.10. Ejercicio propuesto..... 51
Figura 2.11. Asignación de Nodos 52
Figura 2.12. Aplicación de Supernodo 54
Figura 2.13. Ejercicio propuesto..... 54
Figura 2.14 Asignación de Nodos 55
Figura 2.15. Ejemplo propuesto 57
Figura 2.16. Pasos a seguir 57
Figura 2.17. Aplicación de la ley de corriente de Kirchhoff al nodo V1 de la figura 2.16..... 58
Figura 2.18 Circuito para el ejemplo 60
Figura 2.19. Circuito propuesto 61
Figura 2.20. Circuito para el ejemplo 62
Figura 2.21 Aplicación de la regla del divisor de corriente 63
Figura 2.22 Circuito para el ejemplo 63
Figura 2.23 Circuito para el ejemplo 64
Figura 2.24. Circuito para el ejemplo 65
Figura 2.25. Circuito para el ejemplo 66

Unidad Temática III: Teoremas de Circuitos

Figura 3.1. Trayectoria de Malla..... 71
Figura 3.2. Fuente v1 activa..... 72
Figura 3.3. Fuente v2 activa..... 72
Figura 3.4 Circuito para el ejemplo 73
Figura 3.5 Circuito para el ejemplo 74
Figura 3.6 Circuito para el ejemplo 75
Figura 3.7 Circuito para el ejemplo 75
Figura 3.8 Circuito para el ejemplo 76
Figura 3.9 Circuito para el ejemplo 76
Figura 3.10 Circuito para el ejemplo 77
Figura 3.11 Circuito para el ejemplo 78
Figura 3.12. Circuito para el ejemplo 79
Figura 3. 13. Asignación de las impedancias con subíndice a la red de la figura 3.12 79
Figura 3.14. Determinación del efecto de la fuente de voltaje E2 sobre la corriente I de la red de la figura 3.13..... 80
Figura 3.15. Determinación del efecto de la fuente de voltaje E2 sobre la corriente I de la red de la figura 3.13..... 80
Figura 3. 16. Determinación de la corriente resultante para la red de la figura 3.13..... 81
Figura 3.17. Efecto de la resistencia interna en fuentes de voltaje y de corriente reales..... 82
Figura 3. 18. Circuitos utilizados para determinar las condiciones para un intercambio de fuentes 83

Figura 3.19. Circuito para el ejemplo 84
Figura 3.20. Circuito con la fuente de 2mA, 1mA transformada 84
Figura 3.21. Circuito transformando la fuente de 6mA 85
Figura 3.22. Simplificación del circuito 85
Figura 3. 23. Transformación de las fuentes de voltaje 85
Figura 3.24. Reducción del circuito 85
Figura 3.25. Circuito resultante 86
Figura 3.26. Efecto de la aplicación del Teorema de Thevenin 86
Figura 3.27. (Izquierda) Circuito dividido en dos partes (A y B). (Derecha) Circuito A reemplazado por su circuito equivalente de Thevenin. 86
Figura 3.28. Circuito para el ejemplo 87
Figura 3.29. Aplicación del paso 1 y 2 88
Figura 3.30. Aplicación del paso 3 88
Figura 3.31. Aplicación del paso 4 89
Figura 3.32. Dejando activa la fuente E2 89
Figura 3. 33. Circuito equivalente de Thevenin 90
Figura 3. 34. Circuito equivalente de Thevenin para redes de C.A. 90
Figura 3.35. Circuito 91
Figura 3.36. Asignación de las impedancias con subíndice a la red de la figura 3.35 91
Figura 3.37. Determinación de la impedancia de Thevenin para la red de la figura 3.36 92
Figura 3. 38. Determinación del voltaje de Thevenin de circuito abierto para la red de la figura 3.36 92
Figura 3.39. Circuito equivalente de Thevenin para la red de la figura 3.36 92
Figura 3.40. Circuito equivalente de Norton 93
Figura 3. 41. Conversión entre los circuitos equivalentes de Thevenin y de Norton 93
Figura 3. 42. Circuito para el ejemplo 3.5 94
Figura 3.43. Determinación del paso 1 y 2 94
Figura 3. 44. Determinación del paso 3 94
Figura 3. 45. Determinación del paso 4 95
Figura 3. 46. Sustitución del circuito equivalente de Norton por la red externa al resistor RL 95
Figura 3.47. Circuito para el ejemplo 96
Figura 3.48. Circuito para encontrar el equivalente de Thevenin 97
Figura 3.49. Obtención de VTH 97

Resumen

Estos apuntes están diseñados como apoyo a los docentes que imparten la Unidad de Aprendizaje de Análisis Fundamental de Circuitos de la licenciatura de Ingeniería en Sistemas Computacionales del Nivel I de la Escuela Superior de Cómputo del Instituto Politécnico Nacional, parte de la explicación del funcionamiento de los diferentes instrumentos de medición y definiciones básicas tales como voltaje, corriente y resistencia eléctrica, para continuar con los elementos activos como las fuentes de voltaje y corriente, así como las leyes asociadas a los circuitos como lo son la ley de Ohm, las Leyes de Kirchhoff, llevándonos a las técnicas de análisis de circuitos y Teoremas de circuitos, tanto en un análisis de corriente directa como de corriente alterna.

Introducción

Los circuitos eléctricos son utilizados comúnmente en aparatos eléctricos y que utilizamos diariamente. Algunos circuitos pueden ser muy complejos ya que disponen de una gran cantidad y variedad de elementos, y que cada uno de ellos tienen una función específica en el funcionamiento del circuito. Para poder realizar un análisis de circuitos es importante conocer los fundamentos, y conceptos, los elementos básicos de circuitos y su función en un circuito de corriente directa y alterna, tipos de conexiones y sus características, la forma de medición de los parámetros como voltaje, resistencia, y corriente. Las Leyes, las Técnicas y los Teoremas que se desarrollarán son de gran ayuda en el análisis de circuitos. El principal interés de este trabajo, no son las aplicaciones y usos de los circuitos, sino el aprender analizar los circuitos eléctricos y cómo interactúan los elementos que forman parte del circuito eléctrico.

Competencias

- Conocer los dispositivos eléctricos básicos
- Conocer las diferentes técnicas y metodologías de análisis y resolución de los circuitos eléctricos
- Desarrollar la capacidad de resolución de circuitos eléctricos tanto en corriente directa, como en Alterna
- Desarrollar la habilidad de armar circuitos eléctricos, y manejar instrumentos de medición
- Capacidad de trabajo en equipo
- Capacidad para resolver problemas

Objetivo General

Analizar circuitos eléctricos a partir de los teoremas y técnicas fundamentales para la resolución de circuitos eléctricos, mediante la realización de exámenes exploratorios, prácticas de laboratorio, exposición oral, trabajos escritos, tareas, participaciones individuales y grupales.

Orientación Didáctica

Desarrollará las habilidades de análisis de circuitos eléctricos, a través de la aplicación de los diferentes teoremas y técnicas de resolución, además de la práctica llevada a cabo en el laboratorio por medio del trabajo en equipo, también se realizarán exposiciones, trabajos de investigación, dirigido a su área de formación profesional, que integre los conceptos generales y al trabajo práctico y colaborativo.

Para ello el docente dentro de la planeación establecerá las actividades de aprendizaje a desarrollar y los tiempos para entrega por parte del alumno; así mismo marcará los tiempos de revisión para hacer las observaciones y anotaciones para que el alumno pueda mejorar su aprendizaje.

UNIDAD TEMÁTICA I

Leyes de Kirchhoff en Corriente Directa y Alterna

Unidad Temática I: Leyes de Kirchhoff en Corriente Directa y Alterna

Objetivo Particular

Comprender las leyes de Kirchhoff para resolver un circuito eléctrico, mediante la realización de prácticas de laboratorio, examen exploratorio, exposición oral, trabajos escritos, tareas, participaciones individuales y grupales.

Estrategias De Aprendizaje

- Indagación previa de los temas a tratar en cada clase.
- Resolución de problemas de circuitos eléctricos tanto en corriente directa como en corriente alterna.
- Entrega de tareas empleando software para la simulación de circuitos eléctricos.
- Exposición oral de los conceptos de circuitos eléctricos de acuerdo con el tema tratado.
- Realización de prácticas y la elaboración del correspondiente reporte en una lengua adicional al Español (Ingles).
- Entrega de trabajos escritos en una lengua adicional al español (Ingles).

Evaluación De Los Aprendizajes

- 10% Trabajos de investigación (exposición oral, trabajos escritos, tareas, participaciones individuales y grupales)
- 45% Trabajo en laboratorio
- 45% Resolución de examen exploratorio

1.1 Operación del Amperímetro, Voltímetro, Óhmetro y Osciloscopio

Precisión, exactitud, resolución y sensibilidad

Las mediciones generalmente implican el uso de un instrumento como medio físico, para determinar el valor de un evento natural. El instrumento sirve como una extensión de las capacidades humanas y, en muchos casos, permite al hombre determinar el valor de un evento desconocido, que por sí mismo no podría medir (ya sea porque se encuentra fuera de sus capacidades o facultades). Un instrumento, entonces, es aquél que nos sirve para determinar el valor o magnitud de una cantidad o variable; como unidades de medida se utilizan objetos y sucesos previamente establecidos como estándares o patrones, y de la medición resulta un número que es la relación entre el objeto de estudio y la unidad de referencia.

Cuando hablamos de mediciones, empleamos una serie de términos:

Necesidad de medir: Surge cuando el hombre desea cuantificar un evento de la naturaleza. Provino de la necesidad de comprender su entorno, de expresar numéricamente todo lo que se encontraba a su alrededor.

Medir: Del latín metīri, significa comparar una cantidad con su respectiva unidad, con el fin de averiguar cuántas veces la segunda está contenida en la primera. En otras palabras, significa comparar el valor de una variable con otra de la misma naturaleza que nos servirá de referencia.

Medición: Es un proceso que consiste en comparar un patrón seleccionado con un fenómeno, cuya magnitud física se desea cotejar con cuántas veces el patrón está contenido dentro de esa misma magnitud. **Precisión, exactitud, resolución y sensibilidad.**

Las mediciones generalmente implican el uso de un instrumento como medio físico para determinar el valor de un evento natural. El instrumento sirve como una extensión de las capacidades humanas y, en muchos casos, permite al hombre determinar el valor de un evento desconocido, que por sí mismo no podría medir (ya sea porque se encuentra fuera de sus capacidades o facultades). Un *instrumento*, entonces, es aquél que nos sirve para determinar el valor o magnitud de una cantidad o variable; como unidades de medida se utilizan objetos y sucesos previamente establecidos como estándares o patrones, y de la medición resulta un número que es la relación entre el objeto de estudio y la unidad de referencia.

Indicador analógico: Es aquél que toma los valores en forma continua. Se utilizan para poder obtener una visión global rápida de parámetros de medición.

.

Figura 1.1. Indicadores Analógicos

Imagen extraída de: http://www.pce-iberica.es/instrumentos-de-medida/images/indicadores-analogicos.jpg

Indicador digital: Es aquél que toma los valores en forma discreta.

Figura 1.2. Indicadores digitales

Imagen extraída de: http://www.pce-iberica.es/instrumentos-de-medida/images/indicadores-digitales-foto-princi.jpg

Resolución: La definición formal nos indica que es la mínima división que puede ser interpretada en una escala. En términos prácticos, podemos definir a la resolución como al incremento más pequeño que permite diferenciar una lectura de otra.

Figura 1.3. Métrica de resolución
Imagen extraída de: http://www.gsemporium.com/_Layouts/IMG/PRODUCTS/CI201601007.jpg

También puede ser interpretada como $Resolución = \frac{Deflexión\ máxima}{Número\ de\ divisiones\ de\ la\ carátula}$

Sensibilidad de corriente: Se define como el cociente de la traspuesta del instrumento (mm., grados, etc.), respecto de la señal de entrada o variable medida. Es decir, cuán exacto puede ser la medición de una unidad con respecto a su resolución; o la razón entre la respuesta de salida a causa de un estímulo de entrada.

Sensibilidad de los instrumentos: Se determina por la intensidad de corriente necesaria para producir una desviación completa de la aguja indicadora a través de la escala. El grado de sensibilidad se expresa en los prefijos de medición, ya sea kilo, mega, giga, tera, etc.; o bien, en mili, micro, nano, pico, etc. Se da por hecho que la interpretación es la misma, pero comúnmente se usa para abreviar unidades y se haga más fácil y rápida la comprensión de su magnitud.

Errores en la medición

Para poder hablar de errores dentro de las mediciones, deberemos abordar primero el tema de la exactitud. Podemos definir a la exactitud como el grado en que el valor medido se aproxima al verdadero.

Análogamente, el error, en términos de física, es la diferencia entre el valor real y el valor medido. Puede ser provocado a diversos factores que se describirán a continuación.

1. **Errores debidos a factores humanos:** Se deben a la selección y uso inadecuado de los instrumentos de medición. Por mencionar algunos de los más comunes, resaltan los de usar las precisiones impropias a las escalas que se desean medir; o en haces aproximaciones "convenientes" de unidades al momento de obtener valores.

2. **Errores sistemáticos:** Éste tipo de errores se dividen en:
    a. **Instrumentales:** En general, se refieren a los introducidos por la construcción mecánica o eléctrica del instrumento de medición. Los errores de calibración también entran dentro de este subtipo de errores, debido a que la lectura de un valor queda fuera del rango del instrumento. Los errores instrumentales se evitan o corrigen seleccionando el instrumento adecuado para cada medición en particular, aplicando factores de corrección después de haber determinado el tipo y cantidad de error instrumental.
    b. **Ambientales:** Se deben a que las partes mecánicas y eléctricas modifican sus características en presencia de cambios de temperatura, humedad, presión, campos electromagnéticos, etc. La forma de evitarlos es mediante el empleo de sistemas de aire acondicionado, sellado hermético y el uso de blindajes electromagnéticos.

3. **Errores aleatorios:** Es aquel error inevitable que se produce por eventos únicos, imposibles de controlar o de predecir, durante el proceso de medición. Es lo contrario al error sistemático, ya que estos sí se pueden comprender desde previo al inicio de las mediciones. Vienen determinados por el hecho de tomar sólo una muestra de una población para realizar inferencias. Debido a esto, pueden disminuirse aumentando el tamaño de la muestra.

Las fuentes de los errores aleatorios son difíciles de identificar o sus efectos no pueden corregirse del todo, su acumulación hace que las medidas fluctúen alrededor de una media.

Al hablar de error y exactitud, igualmente se debe de hablar de precisión (que es el tópico principal que engloba a ambos términos). La precisión se refiere al grado de conformidad dentro de un grupo de instrumentos, herramientas o mediciones.

Un indicativo de la precisión de las mediciones se obtiene a través del número de cifras significativas con la cual es expresada. Estas transmiten información con respecto a la magnitud y a la precisión de una cantidad o variable medida previamente. Entre más cifras significativas haya, más grande es la precisión de una medición.

Óhmetro

Es un instrumento que mide el valor de una resistencia al conectarlo entre sus terminales.
Para realizar dicha medición, se realiza la conexión de la siguiente manera:

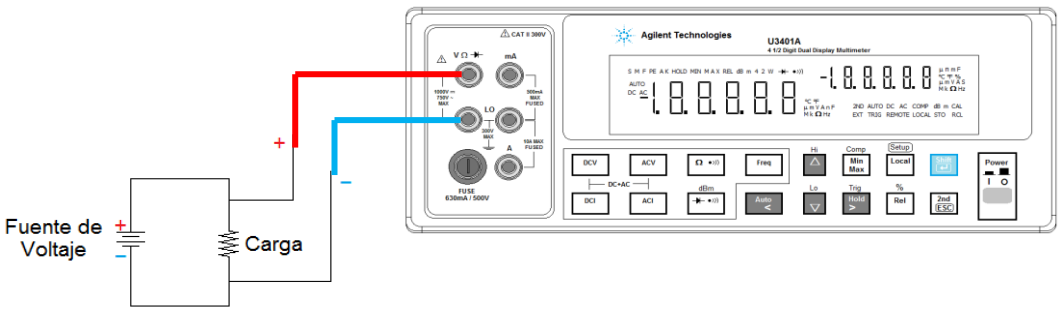

Figura 1.4. Conexión Óhmetro

Siendo el resistor un elemento pasivo, internamente el instrumento de medición tendrá un elemento activo, que produzca una corriente, y que el Galvanómetro interno en el mismo instrumento, detecte esta corriente.

Si R= ∞ (circuito abierto) no circulará corriente por dicho circuito, por tanto en el Galvanómetro Rx = ∞, la aguja del Galvanómetro marcará corriente nula (extremo izquierdo de la escala).

El Óhmetro se compone de una pequeña batería interna para aplicar un voltaje a la resistencia bajo prueba, y el Galvanómetro medirá la corriente que circula a través de la resistencia.

En los Óhmetros actuales, la batería ha sido sustituida por un circuito que genera una corriente, la cual circula en la resistencia bajo prueba. Por otro circuito interno se mide el voltaje en los extremos de la resistencia y el valor de dicha resistencia se obtendrá mediante la Ley de Ohm.

$$I = \frac{V}{R} \rightarrow Corriente = \frac{Voltaje}{Resistencia}$$

Conexión de las terminales para la medición de la resistencia (como el resistor no tiene polaridad, no importa que las puntas se conecten invertidas)

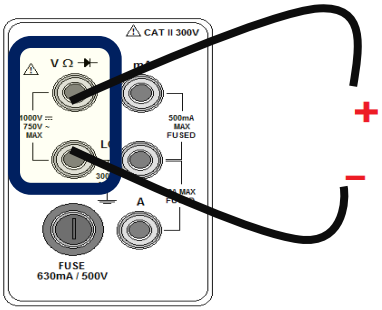

Figura 1.5. Terminales del Óhmetro

Amperímetro de C.D. y Amperímetro de C.A.

El amperímetro es un instrumento de medición utilizado para medir la intensidad o corriente eléctrica que circula dentro de cualquier circuito eléctrico. Recibe su nombre de la unidad de medida para la corriente eléctrica (A – Amperes).

El dispositivo indicador básico en todos los instrumentos analógicos de medición de voltaje y corriente, en el estudio y aplicaciones de circuitos eléctricos, es el *galvanómetro D'Arsonval*. En general, el galvanómetro es un instrumento que utiliza el campo magnético producido por una corriente para generar una deflexión que es proporcional a la corriente. Se trata de un transductor analógico electromecánico que produce una deformación de rotación en una aguja o puntero en respuesta a la corriente eléctrica que fluye a través de su bobina.

<u>Constitución del Galvanómetro D'Arsonval</u>

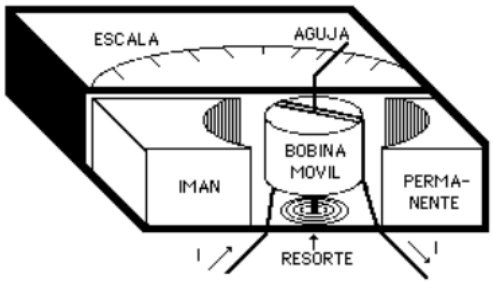

Figura 1.6. Componentes internos de un galvanómetro D'Arsonval

Imagen extraída de: https://www.slideshare.net/saiautsiutajs/joel-galvanometro-y-ejercicios

En la figura 1.6 se muestra un ejemplo de un galvanómetro D'Arsonval, y ésta muestra las partes que lo constituyen:

Unos imanes permanentes que rodean al núcleo. Se muestran sus polos denotados por las letras N y S.

Un núcleo cilíndrico de hierro dulce, colocado entre los polos del imán para uniformizar el campo magnético en la banda de aire que existe entre el imán y el cilindro.

Una bobina móvil enrollada sobre un metal ligero, y sostenido por unos pivotes para que pueda girar libremente en la banda de aire a la cual se le monta una aguja.

La aguja funciona de manera que, al girar la bobina, ésta indique sobre una escala la deflexión angular producida y, por lo tanto, el valor de la corriente que fluye a través de la bobina.

Igualmente usa dos resortes en los extremos de la bobina, que sirven para llevar la corriente y, al mismo tiempo, presentar una oposición al movimiento del giro de la bobina, hasta alcanzar el equilibrio de ambas fuerzas envueltas (tensión mecánica de los resortes contra fuerza magnética producida por la bobina).

Cuando la aguja regresa a la posición inicial debido a la falta de excitación de fuerzas entre los resortes, se les conoce como *Resortes de Sustitución.*

Funcionamiento del Galvanómetro D'Arsonval.

La corriente que se trata de medir se hace pasar por la bobina móvil. Ésta produce un campo magnético que interacciona con el campo magnético fijo producido por el imán permanente. Esta interacción produce un par de fuerzas que hacen girar a la bobina.

Se puede demostrar matemáticamente que el par de fuerzas producidas es directamente proporcional a la corriente que fluye por la bobina, lo cual constituye el principio de este instrumento.

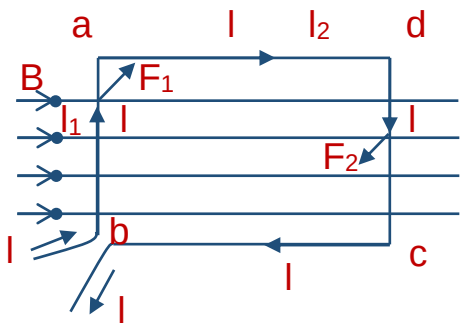

Figura 1.7. Espira de una bobina en el campo magnético del imán permanente

La corriente se introduce por un extremo de la bobina y el movimiento resultando se obtiene aplicando la regla de la mano derecha (pulgar = movimiento, índice = líneas de flujo, medio = corriente). Si se coloca el índice e la dirección de las líneas de flujo, y el medio en la dirección de la corriente, el movimiento resultante es hacia dentro de la hoja; y se representa por una cruz, o cola de flecha. En el otro extremo de la bobina, la corriente fluye en dirección opuesta. Se concluye que el movimiento resultante es hacia afuera de la hoja y se representa por un punto.

Ahora bien, cuando se produce este par de fuerzas, aparecen otras que se oponen a la acción de ellas aplicando el principio de Dalambert (indica que la suma algebraica de todas estas fuerzas sobre la bobina debe ser igual a cero). De las fuerzas que se oponen, se consideran la producida por la inercia de la bobina, el rozamiento debido a la fricción y la de los resortes de restitución de la bobina.

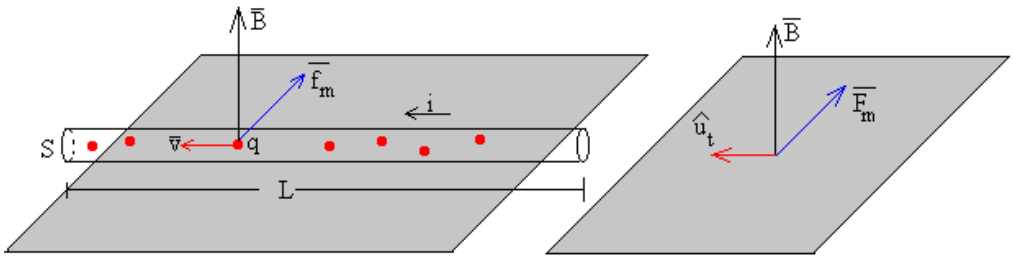

Figura 1.8. Fuerzas dentro de un campo electromagnético

Existen dos orígenes diferentes de las fuerzas eléctricas que se ejercen sobre una carga eléctrica, llamados *fuerza electrostática* y *fuerza magnética*. Los dos campos vectoriales son la intensidad de campo eléctrico y la densidad de flujo magnético. La fuerza que ejerce un campo magnético **B** sobre

un portador de carga positivo **q**, que se mueve hacia la izquierda con velocidad **v**, mostrado en la figura *blabalba* se describe con la ecuación

$$\boldsymbol{f}_m = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$$

La fuerza sobre los portadores (nSL) de carga contenidos en la longitud L del conductor está dada por

$$\boldsymbol{F}_m = (nSL)\boldsymbol{f}_m = i\hat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{t}} \times \boldsymbol{B} \cdot L$$

El vector unitario $\hat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{t}} = \boldsymbol{v}/v$ tiene la misma dirección y sentido que el vector velocidad. Finalmente, calculamos la fuerza total **F** con la integral

$$\boldsymbol{F} = i\int(\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{t}} \times \boldsymbol{B})L$$

Ahora, cuando hablamos de las fuerzas y el momento que ejercen sobre las espiras del galvanómetro, pueden ser interpretadas por la figura balbalbal.

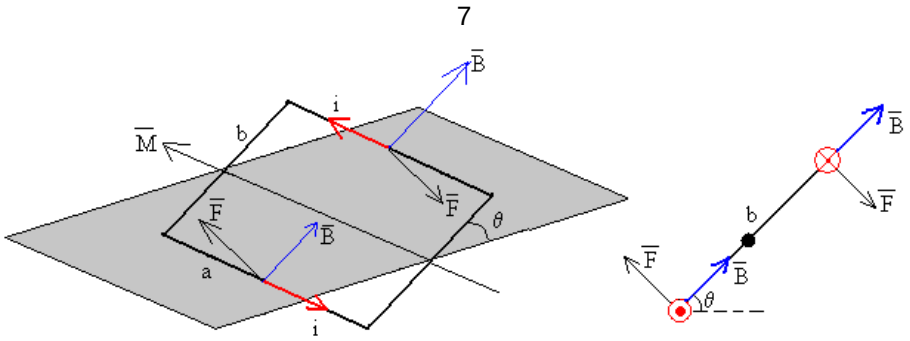

Figura 1.9. Fuerzas electromagnéticas envueltas en el movimiento de un galvanómetro D'Arsonval

La fuerza *F* sobre cada uno de los lados de longitud *a*, está señalada en la figura y su módulo vale

$$F = i \cdot 1 \cdot B \cdot a \cdot sen(90°) = iBa$$

El momento de las fuerzas sobre la espira respecto del eje de rotación es

$$M = 2F\left(\frac{b}{2}\right) = iabB$$

Si la bobina está formada por *N* espiras iguales, el momento total es:

$$M = NiSB$$

Siendo $S = ab$ el área de cada una de las espiras.

Dado el movimiento pendular, el momento que ejerce el campo magnético hace girar las espirar un ángulo θ, tal que

$$NiSB = k\theta$$

Siendo *k* la constante de torsión de la aguja del galvanómetro.

Definimos la constante *K* del galvanómetro como el cociente entre la intensidad y el ángulo girado como

$$\frac{i}{\theta} = \frac{k}{NSB} = K$$

La constante *K* depende solamente de las características del galvanómetro (campo magnético *B* entre las piezas polares del imán, constante de torsión de la aguja *k*, número de espiras *N* de la bobina y el área *S* de cada una de ellas).

Inicialmente la bobina está en reposo y, por consiguiente, una deflexión angular cero. Si se excita al tiempo $t = 0\ segundos$, el movimiento angular de la bobina puede ser de varios tipos:

- La bobina puede girar muy lentamente, acercándose gradualmente hasta la posición angular final de estado estacionario θf.
- Puede girar muy bruscamente y llegar a la posición final θf.
- Puede llegar rápidamente, oscilando hacia atrás y adelante por un intervalo de tiempo prolongado, pero disminuyendo en amplitud alrededor del valor θf.

A estas posibilidades se les conocen como <u>bajo amortiguado</u>, <u>críticamente amortiguado</u> y <u>sobre amortiguado</u>, respectivamente; siendo la respuesta ideal el críticamente amortiguado.

La deflexión de la aguja y el armazón, en el campo magnético del imán, hacen fluir una corriente en el armazón, causando una fuerza de retardo, la cual se opone al desplazamiento de la bobina.
Un galvanómetro puede ser amortiguado conectando un resistor sobre la bobina. Cuando la bobina se energiza por una corriente y ésta rota en un campo magnético, se genera un voltaje en la bobina,

y fluye una corriente a través de la misma y de la resistencia conectada externamente, produciendo una fuerza de oposición que amortigua su desplazamiento.

La bobina del galvanómetro se construye usando un alambre, el cual posee cierta resistencia al paso de la corriente. Al efectuar una medición, esta resistencia producirá un error y, con el objeto de cuantificar éste, se hace necesario determinar su valor. La bobina de un galvanómetro ideal tiene una resistencia ideal a cero. Para poder medir la resistencia interna de un galvanómetro, podemos usar un resistor variable (*RD*) en paralelo con el galvanómetro de la siguiente manera:

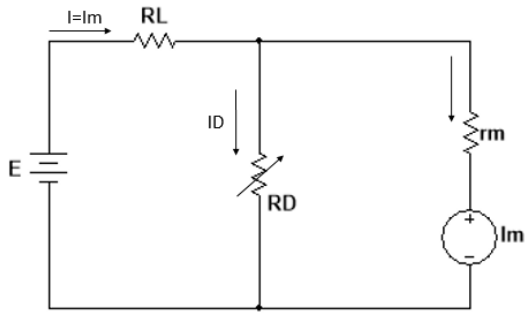

Figura 1.10. Circuito utilizado para determinar la resistencia interna de un galvanómetro

Con *RD*, se calcula el valor del resistor limitador *RL*; para ello, se parte de considerar una corriente $I = Im$, el valor de *E* y suponer una $rm = 0\Omega$; de tal manera que la aguja se deflecta al máximo. Una vez efectuado lo anterior, se conecta *RD*. Si *RD* es igual a cero, por el galvanómetro no comenzará a existir deflexión en la aguja del galvanómetro, aumentando ésta, conforme aumente el valor de RD. En el momento en que la aguja marque la mitad de la deflexión, el valor de la resistencia que marque *RD* será igual a la resistencia interna del galvanómetro.

Es importante señalar que el galvanómetro posee polaridad; es decir, que la corriente que fluye a través de él debe hacerlo en una sola dirección, ya que, si lo hiciera en sentido contrario, el par de fuerzas producido se opondría al movimiento esperado de la aguja sobre la cual se ha marcado la escala. Esta polaridad generalmente se indica colocando un signo $+$ sobre una de las terminales del galvanómetro, y en la otra un signo $-$, indicando que se debe producir una caída de potencial en este sentido a través de sus terminales.

Existen galvanómetros que tienen el cero de corriente en el centro de la escala. Estos son capaces de medir corrientes que fluyen en ambas direcciones, produciendo una deflexión hacia la derecha del cero cuando fluya una corriente que desarrolle un potencial positivo y lo mismo para su contrario.

Básicamente, el galvanómetro D'Arsonval, descrito anteriormente, es un medidor de corriente eléctrica directa para los valores pequeños de la misma (microamperios). Para poder ampliar su rango, se propone el análisis a continuación:

El embobinado de la mayoría de los galvanómetros es pequeño y ligero, y sólo pueden conducir pequeñas corrientes. Es necesario, por ende, extender el rango de medición para aumentar su utilidad. Una manera de extender el rango de medición de un galvanómetro es utilizar un resistor derivador de corriente como se muestra en la figura 1.11 siguiente:

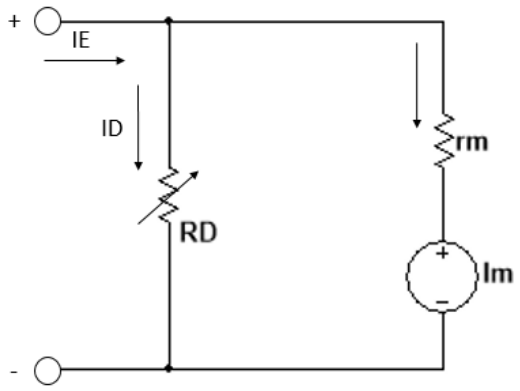

Figura 1.11. Medidor de corriente con rango extendido por medio del circuito derivador elemental de corriente simple

A la configuración de esta figura se le conoce por el nombre de amperímetro derivador simple, porque consiste de un resistor conectado en paralelo con las terminales del galvanómetro, por donde se desviará la corriente que exceda a *Im*. Para calcularlo:

$RD\ ID = rm\ Im$; en donde:

$RD = rm\ Im/ID$, pero;

$ID = IE - Im$, entonces:

$$RD = \frac{rm\ Im}{IE - Im}$$

En donde *IE* es la corriente que entra a la configuración del medidor.

Voltímetro de C.D. y Voltímetro de C.A

Un voltímetro se conecta en paralelo con los elementos que se miden, se utiliza para medir la diferencia de potencial entre dos puntos de un elemento conductor, y la conexión para medir este parámetro es mostrada en la figura, la cual muestra el elemento a medir.

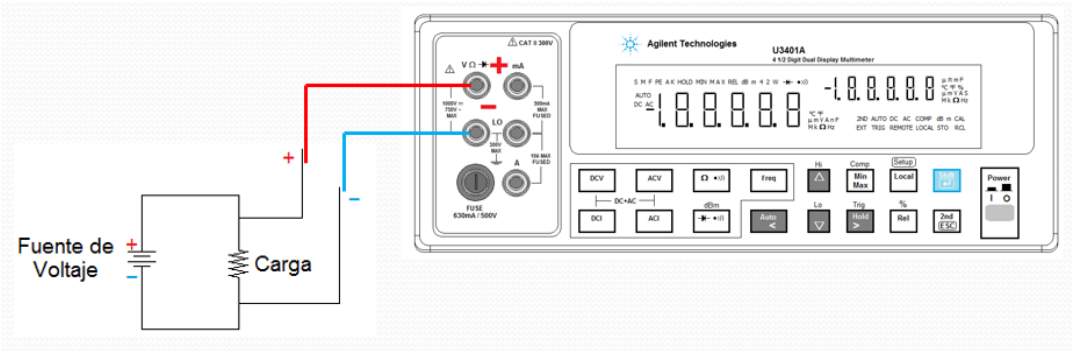

Figura 1.12. Conexión del Voltímetro en el Circuito bajo medición

Se puede medir la diferencia de potencial tanto en corriente directa como en corriente alterna
Las características más importantes que es necesario especificar para un voltímetro son:

- Corriente Máxima
- Resistencia interna
- Exactitud
- Precisión
- Linealidad

Los medidores que determinan el voltaje se pueden agrupar en dos clases generales: medidores analógicos y medidores digitales. Aquellos que emplean mecanismos electromecánicos para mostrar la cantidad que se está midiendo en una escala continua y una aguja apuntando pertenecen a la clase analógica. Los medidores digitales indican la cantidad que se está midiendo en una pantalla numérica.

Los voltímetros en esencia están constituidos de un galvanómetro sensible que se conecta en serie a una resistencia de mayor valor.

De acuerdo a la ley de Ohm, la tensión eléctrica y la intensidad de corriente son proporcionales y, por tanto, las escalas de los aparatos de medida pueden graduarse en voltios y medir de esta forma tensiones eléctricas.

Para realizar la medición, ambos puntos deben encontrarse en paralelo, es decir que se encuentre en derivación sobre los puntos de los cuales queremos realizar la medición.

El multímetro tiene selectores que permiten medir voltaje en corriente directa y corriente alterna.

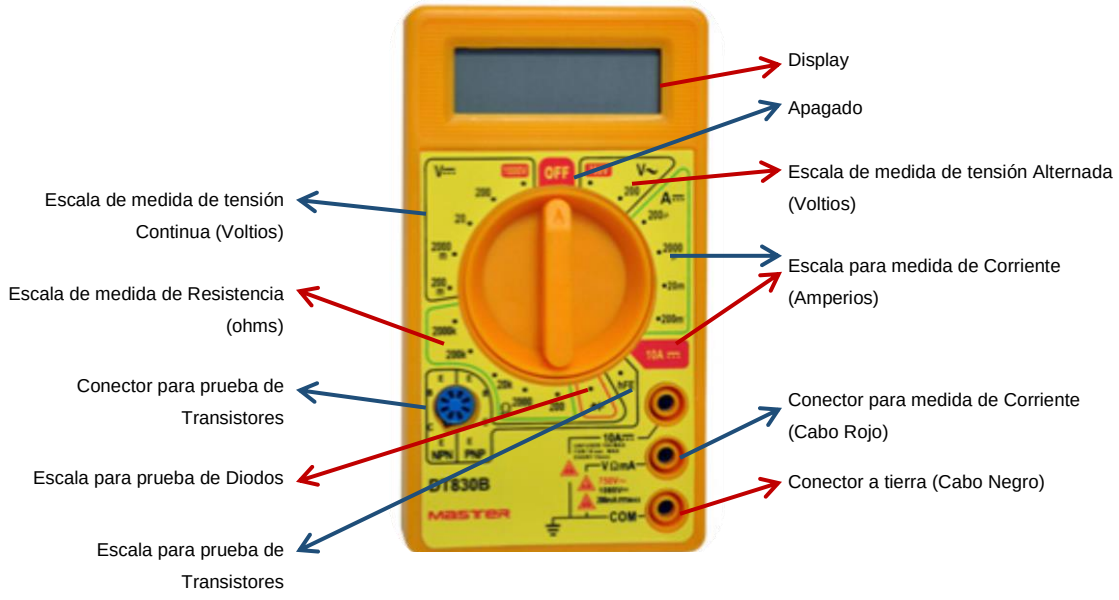

Figura 1.13. Uso del Multímetro

Medir en corriente directa (C.D.)

1. Se selecciona, en el multímetro que estemos utilizando, la unidad (voltios) en DC (c.d.).
2. Se revisa que los cables rojo y negro estén conectados correctamente.
3. Se selecciona la escala adecuada, si tiene selector de escala, (si no tenemos idea de que magnitud de voltaje vamos a medir, escoger la escala más grande).
4. Si no tiene selector de escala seguramente el multímetro escoge la escala para medir automáticamente.
5. Se conecta el multímetro a los extremos del componente (se pone en paralelo) y se obtiene la lectura en la pantalla.
6. Si la lectura es negativa significa que el voltaje en el componente medido tiene la polaridad al revés a la supuesta

Medir en corriente alterna (C.A.)

1. Se selecciona la unidad (voltios) en AC (C.A.). Como se va a realizar una medición en corriente alterna, no es importante la posición de los cables negros y el rojo. Acordarse que en corriente alterna, la corriente fluye alternadamente en ambos sentidos.
2. Se selecciona la escala adecuada, si tiene selector de escala, (si no se sabe que magnitud de voltaje se va a medir, escoger la escala más grande). Si no tiene selector de escala seguramente el multímetro (VOM) escoge la escala para medir automáticamente y vaya a medir voltaje con multímetro digital.
3. Se conecta el multímetro a los extremos del componente (se pone en paralelo). y se obtiene la lectura en la pantalla.

Osciloscopio de propósito general

El osciloscopio es un instrumento electrónico capaz de presentar una gráfica, con diferencias de potencial eléctrico, ya sea con respecto al tiempo, o con respecto a otra señal.

Estructura interna

En la Figura 1.14 se puede observar el diagrama de los subsistemas de un osciloscopio básico, que detallaremos a continuación.

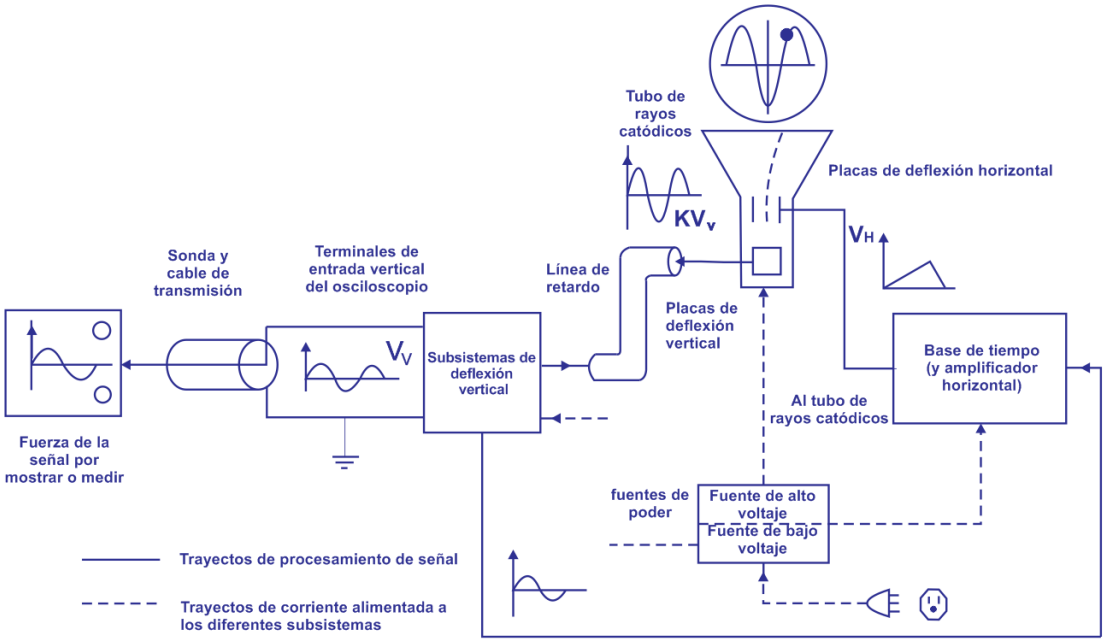

Figura 1.14. Subsistemas de un osciloscopio básico

Tubo de rayos catódicos

El tubo de rayos catódicos es una de las partes principales de un osciloscopio, ya que es el elemento de salida del instrumento. El tubo es un recipiente sellado de vidrio con un cañón de electrones y un sistema de deflexión montado en un extremo del tubo y una pantalla fluorescente en el otro. Su función es producir un haz de electrones mediante el calentamiento indirecto.

Tiene dos conjuntos de placas deflectoras perpendiculares entre sí para controlar de forma independiente el haz de electrones en dirección vertical y horizontal.

La pantalla fluorescente está cubierta de fosforo, en los puntos donde el haz llega a la pantalla esta emite un punto de luz visible.

Subsistema de deflexión vertical

El osciloscopio debe tener la capacidad de amplificar o atenuar las señales de entrada para que se produzca una figura correcta cuando se apliquen las señales de interés a las placas deflectoras del tubo de rayos catódicos. El sistema de deflexión vertical es el subsistema del osciloscopio que se encarga de esta función.

Consiste normalmente de:

a) Selector de acoplamiento de entrada (puede ser A/C o D/C)
b) Atenuador de entrada
c) Preamplificador
d) Amplificador vertical principal
e) Línea de retardo

Subsistema de deflexión horizontal

Se emplea de dos maneras: amplificación directa de señales Consiste del amplificador de deflexión horizontal y los circuitos de base de tiempo.

Modo de uso

A continuación, se detallará el modo de uso básico del osciloscopio. En la fig. 1.15 se muestra un diagrama del panel de control de un osciloscopio digital básico

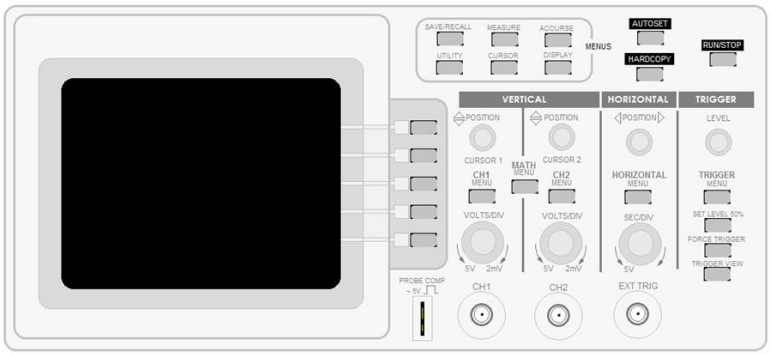

Figura 1.15. Panel de control de un osciloscopio básico

Graficador de voltaje sobre tiempo

Es una de las aplicaciones más comunes del osciloscopio, hacer visible una señal, es decir, que se emplee como un graficador de voltaje (en el eje Y) contra tiempo (en el eje X). Para esto, necesitaremos proporcionar una señal de voltaje a nuestro osciloscopio por una de las entradas, posteriormente seleccionamos el canal en el que hemos conectado el osciloscopio y procedemos a seleccionar el modo x (t) para nuestra señal con el botón *Display*.

1.2 Fasores

Señales Senoidales

Cuando, en electrónica, se trabaja en el dominio de la Corriente Alterna (C.A.), es de particular importancia conocer las características de las señales senoidales, ya que a través de ellas se representan de forma física los conceptos de voltajes y corrientes variables en el tiempo, además de que “la onda senoidal es la única forma de onda alterna cuyo aspecto no se ve afectado por las características de respuesta de un resistor, inductor o capacitor puro” -1.

En la figura 1.16 se muestra una representación de una señal senoidal con la finalidad de describir los conceptos y características básicas de este tipo de funciones.

En primer lugar, es importante definir que, para las señales de C.A., el eje $\boldsymbol{X}$ de la gráfica siempre va a representar el tiempo $\boldsymbol{t}$ en el que está siendo evaluada la función y el eje $\boldsymbol{Y}$ de la gráfica representa los valores de voltaje o corriente que hay en el instante de tiempo $\boldsymbol{t}$. Se define el valor instantáneo o voltaje instantáneo de una señal senoidal, a aquel valor que toma la onda en un instante específico de tiempo $\boldsymbol{t}$. En la figura 1.16 se denota por los valores $\boldsymbol{V}1$ y $\boldsymbol{V}2$ en los instantes de tiempo $\boldsymbol{t}1$ y $\boldsymbol{t}2$. Se define el **valor pico** o **voltaje pico**, al valor de voltaje instantáneo máximo de una función a partir de cero. En la figura 1.16 y para cálculos posteriores, se hará referencia al valor de voltaje pico como como $\boldsymbol{Vp}$.

Se define el **valor pico a pico** o **voltaje pico a pico**, a la distancia, en términos de voltaje, entre el valor de voltaje pico inferior y el valor de voltaje pico superior de la señal senoidal. En términos algebraicos, es la suma de la magnitud del pico positivo más la magnitud del pico negativo. Para cálculos posteriores, se hará referencia al voltaje pico a pico como $\boldsymbol{Vpp}$.

Se define como **valor eficaz** o **valor cuadrático medio**, al valor de voltaje en C.A. que produce la misma potencia sobre una carga que un valor de voltaje en C.D. Este valor de voltaje se denota como $\boldsymbol{Vrms}$ por sus siglas en inglés (***Root Mean Square***), y se determina por la expresión:

$$V_{rms} = \frac{V_p}{\sqrt{2}} = 0.707 \cdot V_p$$

Se define como ***periodo***, al tiempo que transcurre para que la onda se repita desde su valor inicial. Para cálculos posteriores, se hará referencia al periodo como $\boldsymbol{T}$.
Se define como ***ciclo***, a la parte de la onda senoidal que se está incluida dentro de un periodo. Una señal senoidal puede contener cualquier cantidad de ciclos, por lo que se dice que es ***periódica***.

Se define como ***frecuencia***, al número de ciclos que se desarrollan durante la unidad de tiempo, específicamente, durante un segundo. La frecuencia es el inverso del periodo y se denota por la expresión:

$$f = \frac{1}{T}$$

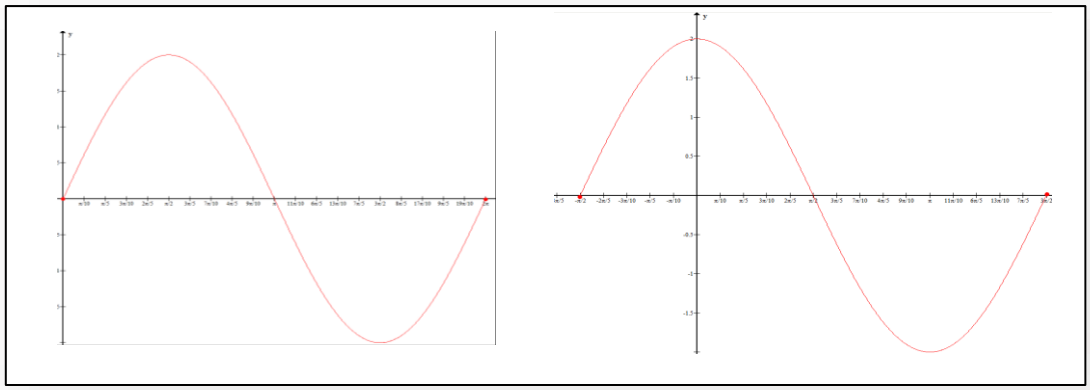

Figura 1.16. Características de una señal senoidal

Para cuestiones de análisis matemático, las señales senoidales también se pueden presentar como funciones cosenoidales, las cuales tienen las mismas características con la única particularidad de que estas últimas están desfasadas 90° en el eje horizontal respecto a las primeras, tal como lo muestra la figura 1.17.

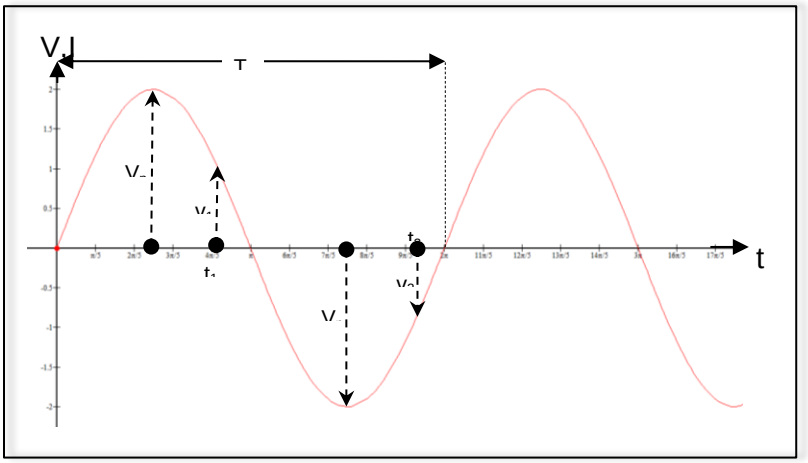

Figura 1.17. Señal senoidal y señal cosenoidal

Un ***fasor*** es un tipo de vector que se utiliza para representar funciones del tiempo que varían en forma senoidal. Como todo vector, un fasor posee:

- ***Magnitud***: Es una cantidad escalar que nos indica la longitud del vector.
- ***Ángulo***: Es la inclinación que posee con respecto al eje horizontal. Representa la posición angular del vector.

En la figura 1.18 se puede apreciar gráficamente los componentes de los vectores.

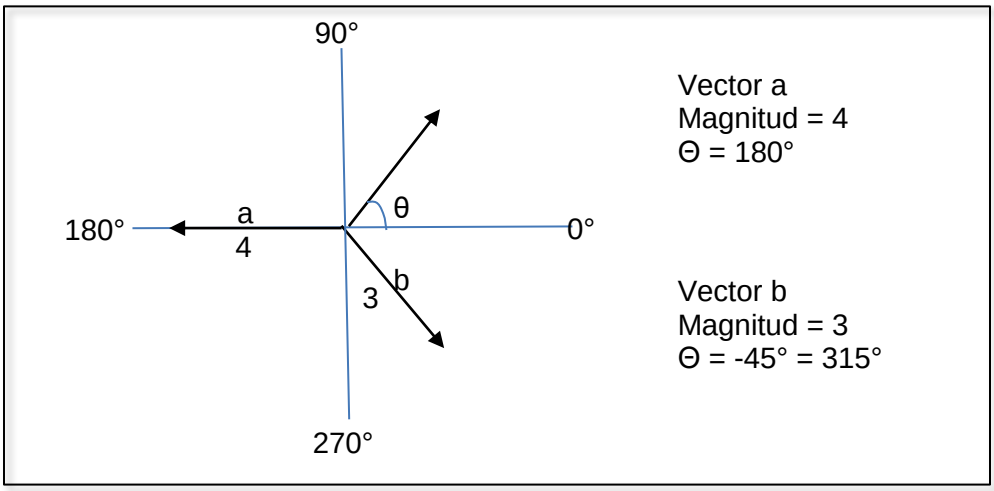

Figura 1.18. Componentes de un vector

Las características de una señal senoidal tienen su correspondiente representación con Fasores, de tal forma que:

- Un ciclo completo de una onda senoidal, puede ser representada por la rotación de 360° de un fasor.
- El valor instantáneo de la onda senoidal en cualquier punto es igual a la distancia vertical desde la punta del fasor hasta el eje horizontal.

La longitud del fasor es igual al valor pico de la onda senoidal, es decir, al valor instantáneo de la onda en 90° y en 270°. El ángulo del fasor medido a partir de 0° es el punto angular correspondiente a la onda senoidal.

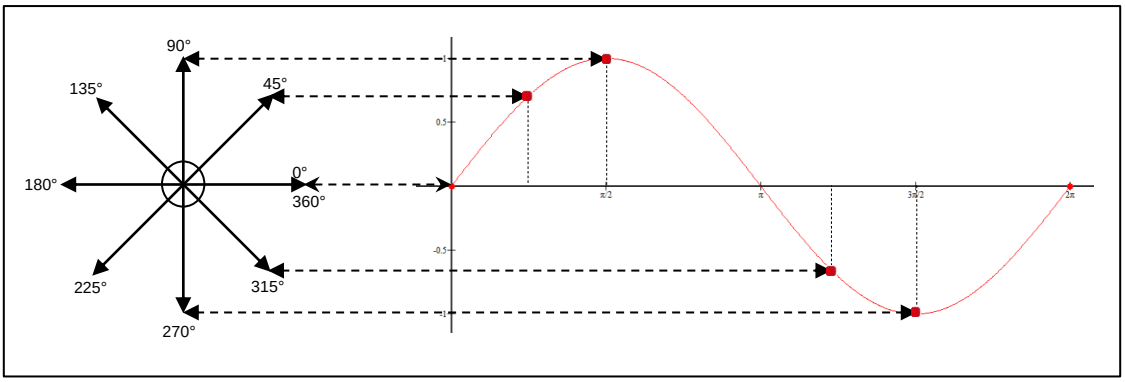

Figura 1.19. Representación de una señal senoidal con fasores

En la figura 1.19 se puede observar claramente como a cada punto de la señal senoidal le corresponde un fasor cuya magnitud siempre va a ser igual a la distancia del eje horizontal hasta el valor de voltaje pico de la onda senoidal, como ya se había explicado anteriormente.

El cálculo del valor instantáneo es intuitivo cuando el ángulo de fase del vector es específicamente de 90° o de 270°, basta con medir la longitud del vector desde el origen hasta su extremo final. Sin embargo, cuando el ángulo se mueve en cualquier otra dirección, es necesario utilizar reglas trigonométricas para poder determinar esa magnitud, ya que no siempre será proporcionada y, por lo tanto, es de mucha utilidad conocer la expresión matemática correspondiente además de que esto nos ayudará a realizar el análisis de los circuitos cuando existan fuentes de alimentación que proporcionen señales de corriente alterna. En la figura 1.20 se muestra el análisis mediante el cual se obtienen los voltajes instantáneos para cualquier ángulo utilizando el diagrama fasorial.

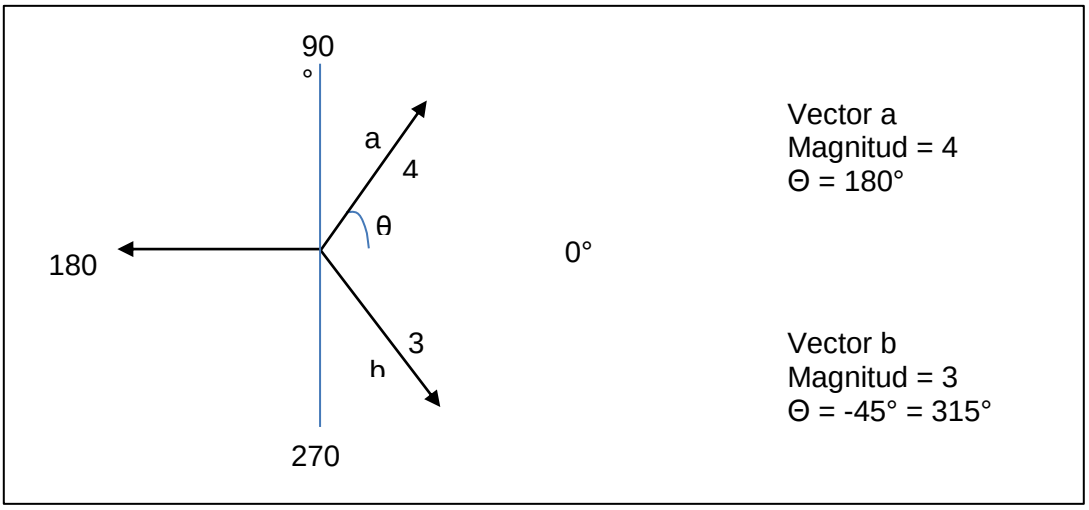

Figura 1.20. Cálculo del voltaje instantáneo

1.2.1. Números Complejos

Un **número complejo** es la representación de un punto en un plano bidimensional ubicado con referencia a dos ejes distintos. El eje horizontal se denomina **eje real**, y el vertical se denomina **eje imaginario**. En la figura 1.21 se identifican los ejes de un plano complejo.

La relación de los números complejos con la forma de onda senoidal de C.A. resulta en una técnica rápida, directa y precisa que encuentra la suma algebraica de formas de onda senoidales.

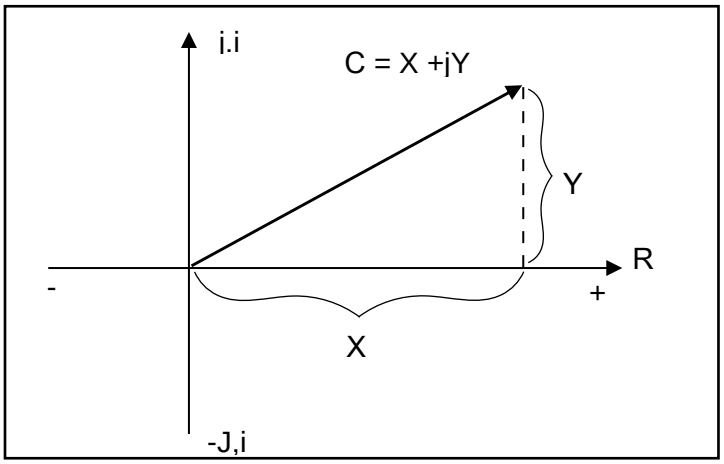

Figura 1.21. Cada número desde cero hasta ±∞ se puede representar en el eje real

1.2.2 Coordenadas Polares

En el eje real (u horizontal) se representan todos los números positivos situados a la derecha del eje imaginario y todos los números negativos localizados a la izquierda del eje imaginario.

Coordenadas polares y coordenadas rectangulares.

Para representar un número complejo de emplean dos formas: **rectangular** y **polar**. Cada una de las formas puede representar un punto en el plano o un vector radial trazado desde el origen, hasta ese punto.

El formato para representar un número complejo de la forma rectangular es el siguiente:

$$\mathbf{C} = \boldsymbol{X} + j\boldsymbol{Y}$$

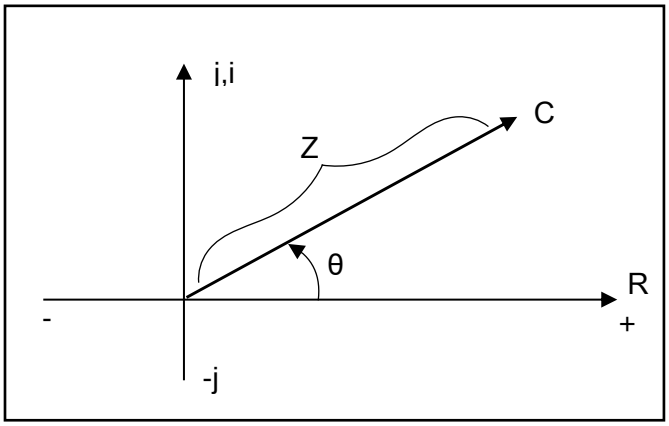

Figura 1.22. Definición de la forma rectangular

Así mismo, el formato para representar un número complejo de la forma rectangular es el siguiente.

$$\mathbf{C} = \mathbf{Z} \angle\theta$$

Dónde:

: Indica la magnitud.

: El ángulo se mide en dirección contraria a las manecillas del reloj, a partir del eje real positivo.

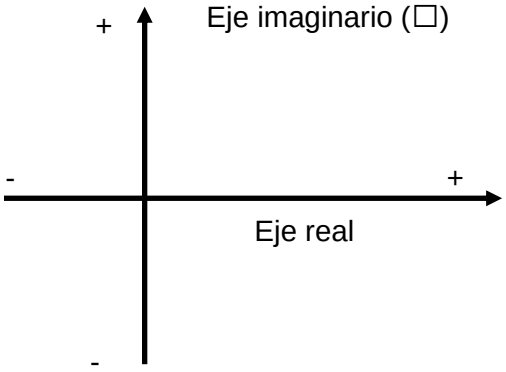

Figura 1.23. Definición de la forma polar

En el caso de que se encuentre un signo negativo en frente de la forma polar, este indicará que el resultado de un número complejo en oposición directa con el número complejo con signo positivo.

$$-\mathbf{C} = -\mathbf{Z}\ \angle\theta = \mathbf{Z}\ \angle\theta \pm 180^{o}$$

1.3 Ley de Ohm

Considere la siguiente relación

$$\boxed{Efecto = \frac{causa}{oposición}}$$

Toda conversión de energía de una forma a otra puede ser relacionada a esta ecuación. Para circuitos eléctricos, el efecto que se trata de establecer es el flujo de carga, o corriente. La diferencia de potencial, o voltaje, entre dos puntos es la causa ("presión"), y la oposición es la resistencia encontrada.

En pocas palabras la ausencia de una "presión" puesta sobre un objeto, así como de voltaje en un circuito eléctrico, resultara en una reacción nula del sistema y sin corriente en el circuito eléctrico. La corriente es una reacción al voltaje aplicado y no el factor que pone al sistema en movimiento.
Al sustituir los términos introducidos en la ecuación X resulta:

$$Corriente = \frac{diferencia\ de\ potencial}{resistencia}$$

Y

$$\boxed{I = \frac{E}{R}}\ (ampere, A)$$

La ecuación anterior es conocida como **ley de Ohm** en honor a Georg Simon Ohm. Esta ley enseña para una resistencia fija, mayor será el voltaje (o presión) del resistor, mayor es la corriente, y a mayor resistencia para el mismo voltaje, menor será la corriente. Dicho de otra manera, la corriente es proporcional al voltaje aplicado e inversamente proporcional a la resistencia.

Por medio de cálculos matemáticos, el voltaje y la resistencia pueden encontrarse en términos de las otras dos cantidades:

$$\boxed{E = IR}\ (volts, V)$$

Y

$$\boxed{R = \frac{E}{I}}\ (ohms, \Omega)$$

Las tres cantidades de las ecuaciones X a la Z son definidas por el sencillo circuito de la figura 1.24. La corriente I de la ecuación anterior resulta de aplicar *E* volts de corriente directa a una red con resistencia *R*. la ecuación de Ley de Ohm determina el voltaje *E* requerido para establecer una corriente *i* a través de una red con una resistencia total *R*, y la ecuación anterior proporciona la resistencia de una red que resulta en una corriente *i* debida a un voltaje aplicado *E.*

Observe en la figura 1.24 que la fuente de voltaje satura la corriente en una dirección que pasa de la parte negativa del circuito hacia la positiva. Esto ocurre para circuitos en una sola fuente. El símbolo para el voltaje se representa por medio de *E*, mientras que la caída del voltaje en la resistencia está dada por *V*.

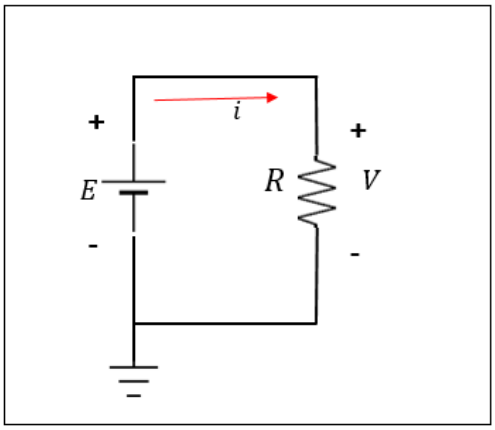

Figura 1.24. Circuito Básico

Grafica de la Ley de Ohm

Las gráficas con importantes ya que muestran y amplían el comportamiento de un sistema de manera que muestre el beneficio dentro de la actividad eléctrica.

Para la mayoría de los dispositivos eléctricos su comportamiento gráficamente utiliza corriente denominadas ordenadas (eje vertical) y voltaje denominadas abscisas (eje horizontal) como se muestra a continuación.

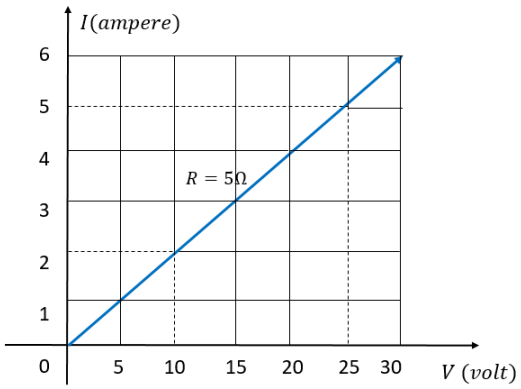

Figura 1.25. Gráfica Ley de Ohm

Interpretando la línea vertical de la gráfica que se muestra en la figura 1.25, muestra que la resistencia no cambia con la corriente o voltaje, por el contrario, son valores fijos en todas partes.

La dirección de la corriente y la polaridad del voltaje que aparecen en la parte superior de la gráfica son las definidas para la gráfica proporcionada. Si la dirección de la corriente es opuesta a la dirección definida, la región por debajo del eje horizontal será la región de interés para la corriente *I*. si la polaridad del voltaje es opuesta a la definida, la región situada a la izquierda del eje de corriente será la región de interés

Si la resistencia no se conoce en una gráfica, se determina en algún punto dentro de la gráfica, esto es porque en la línea recta está indicada la resistencia fija. En un punto cualquiera de la gráfica, se identifica la corriente y el voltaje y se sustituye dentro de la ecuación siguiente:

$$\boxed{R_{cd} = \frac{V}{I}}$$

Por otro lado si la fórmula de la Ley de Ohm se relaciona con la ecuación básica de la línea recta se tiene que:

$$I = \frac{1}{R} \bullet E + 0$$
$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$
$$y = m \bullet x + b$$

Encontrándose entonces que la pendiente es igual a 1, dividid entre el valor de la resistencia, esto se expresa a continuación:

$$\boxed{m = pendiente = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta I}{\Delta V} = \frac{1}{R}}$$

Esto haciendo un cambio mínimo, finito, de la variable.

1.4 Ley de Kirchhoff de Voltaje

Rama

Una rama es una parte de un circuito que contiene un único elemento y los nodos a cada extremo del elemento.

Nodo

Un nodo es aquel punto del circuito donde se conectan dos o más elementos. Usualmente, los nodos conectan varias mallas independientes entre sí, formando la totalidad del circuito, a pesar de que un nodo pueda alargarse con varios conductores perfectos, éste sigue siendo un sólo nodo.

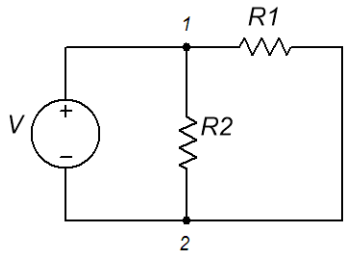

Figura 1.26. Circuito simple con dos nodos

Malla

Una malla es un conjunto de componentes, ya sea pasivos o activos, que se encuentran conectados en serie, esto es, entre cada una de las terminales de los elementos no hay ningún otro elemento conectado, formando una trayectoria cerrada independiente del resto del circuito en la cual ningún nodo se encuentra más de una vez.

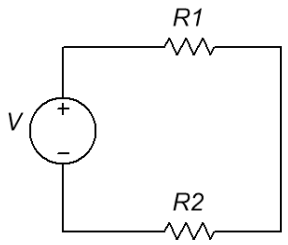

Figura 1.27. Una malla simple

Cabe señalar que, para cada elemento de una malla independiente, la corriente que circula a través de ellos es la misma.

Análisis de mallas

Es un método para analizar las trayectorias cerradas formadas por los elementos conectados en serie, dentro de una malla independiente. Con este método se pueden asignar polaridades de entrada-salida, así como la trayectoria que sigue físicamente la corriente de un circuito.

Análisis de nodos

Con este método se identifican los nodos existentes en un circuito, se visualizan las corrientes y voltajes correspondientes a cada nodo, así como sus trayectorias, tomando como referencia un nodo base, que usualmente es el nodo que se encuentra conectado directamente a la terminal negativa de la fuente de alimentación.

Ley de Kirchhoff para Voltaje

Esta ley sólo puede aplicarse en circuitos conectados en serie, ya que, si están conectados en paralelo el voltaje para todos los componentes es el mismo.

La energía requerida para mover una unidad de carga de un punto A a un punto B en un circuito debe tener un valor independiente al trayecto elegido para llegar desde A hasta B (Puede haber más de una forma de llegar de uno a otro).

La Ley de Kirchhoff de Voltaje (LKV) plantea que la suma algebraica de las elevaciones y caídas de voltaje a través de una malla (o trayectoria cerrada) es cero. En otras palabras, establece que el conjunto de voltajes alrededor de un camino cerrado debe ser forzosamente igual a cero. Matemáticamente, podemos representarla como:

$$\Sigma_c v = 0$$

Entendiéndose esto como:

Aumento de tensión - Suma de las caídas de tensión = 0

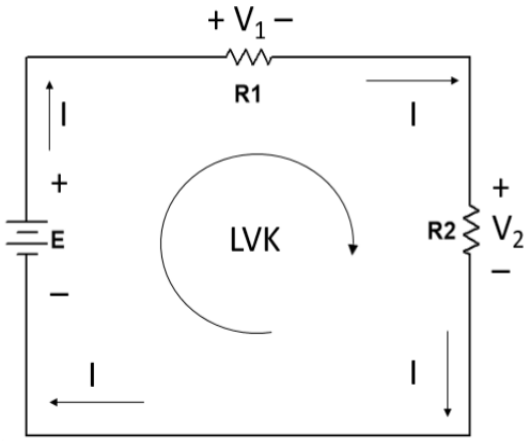

Figura 1.28. Diagrama de la aplicación de la Ley de Kirchhoff de Voltaje a un circuito de corriente directa en serie

Nos referimos por aumentos de tensión a todos aquellos componentes que brinden un ingreso de energía o voltaje a un circuito, es decir, las fuentes de voltaje. Las caídas de tensión son todos aquellos elementos dentro de un circuito que hagan que disminuya el voltaje que fluye dentro de él, como las resistencias.

$$\Sigma_c v_{aumentos} = \Sigma_c v_{caídas}$$

Para poder usar correctamente la Ley de Voltaje de Kirchhoff, debemos considerar los siguientes pasos:

1. Suponer que la corriente siempre circula en sentido horario. Esto se hace por convención, sin embargo, se obtendrá el mismo resultado sin importar el sentido que se aplique.

2. Colocar la polaridad de las fuentes de voltaje como se muestra en la figura 1.29.

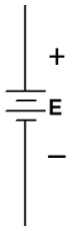

Figura 1.29. Fuente de Voltaje

3. Colocar la polaridad en las resistencias, con base en el sentido asumido de la corriente, justo como en la figura 1.30.

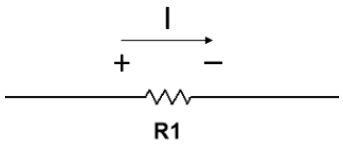

Figura 1.30. Símbolo del resistor

4. Escribir la ecuación de Kirchhoff, siguiendo el sentido de la corriente. Los valores de voltaje serán positivos si se encuentra primero la señal de polaridad (+) y negativa (–) si se encuentra después.
5. Para calcular la corriente, se puede reemplazar el voltaje en el resistor siguiendo la ley de Ohm (V= IR). Esto es útil si los valores que nos dan no están expresados en la unidad que se espera.
6. Se despeja la corriente y se resuelve de acuerdo a la ecuación de la Ley de Voltaje de Kirchhoff (que indica que la suma algebraica de las fuentes y los voltajes es igual a 0).

Para una mejor comprensión de lo anterior, podremos decir que, al colocar los elementos del circuito mostrado en la figura, 1.29 y 1.30, la ecuación nos describirá que:

$$E - V_{R_1} - V_{R_2} = 0$$

O, de otra forma:

$$E = V_{R_1} + V_{R_2}$$

1.5 Ley de Kirchhoff de Corriente

Para aplicar la ley de Kirchhoff de Corriente, primeramente, necesitamos que nuestro circuito esté conectado en paralelo.

La ley de la corriente de Kirchhoff (LCK) plantea la suma algebraica de las corrientes que entran y salen de un área, sistema o unión, es cero. Dicho de otro modo, la cantidad de corrientes que entran a un nodo es igual a la cantidad de corrientes que salen.

Suma algebraica indica que se deben tomar en cuenta las direcciones de referencia conforme se sumen las corrientes de elementos conectados a un nodo en particular. Para tomar en cuenta las direcciones de referencia es conveniente usar un signo más cuando la corriente parte desde el nodo y un signo menos cuando la corriente está dirigida hacia él.

En forma de Ecuación:

$$\sum I_{entra} = \sum I_{sale}$$

Podemos verlo claramente por medio de la analogía del agua en la tubería, ya que la suma total del agua que entra a una unión debe ser igual al total del agua que sale por la tubería de.
Supongamos un punto de unión cualquiera donde entran dos corrientes y salen dos corrientes. Deducimos por la Ley de Corriente de Kirchhoff que la corriente que entra debe ser igual a la que sale:

$$i_1 + i_2 = i_3 + i_4$$
$$4\,A + 8\,A = 2\,A + 10\,A$$
$$12A = 12A$$

Matemáticamente se expresa de la siguiente forma:

$$\sum_{j=1}^{N} i_j\,(t) = 0$$

Donde $i_j(t)$ es la j-ésima corriente que entra al nodo a través de la rama j y N es el número de ramas conectadas al nodo.

Para comprender la Ley de corriente de Kirchhoff, recurrimos al siguiente circuito:

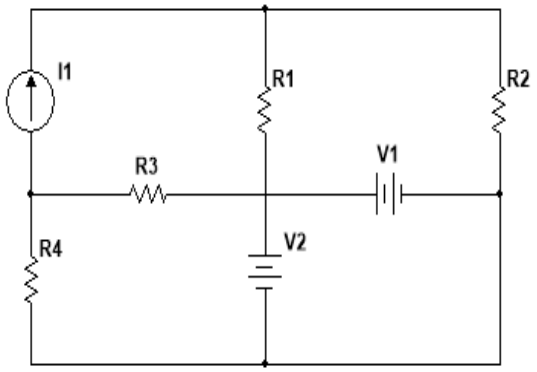

Figura 1.31. Diagrama de la aplicación de la Ley de Kirchhoff para Corriente a un circuito de corriente directa en paralelo

Ahora se plantean las corrientes que circulan por el circuito y se identifica cada uno de los nodos de la siguiente manera:

1. Suponer que la corriente siempre circula en sentido horario.
2. Colocar la polaridad de las fuentes de voltaje como se muestra en la figura 1.32

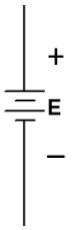

Figura 1.32. Símbolo de batería

3. Colocar la polaridad en las resistencias, con base en el sentido asumido de la corriente, justo como en la Figura 1.33.

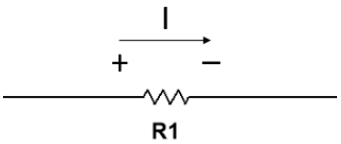

Figura 1.33. Sentido del flujo de corriente en el resistor

Con las referencias anteriores, el circuito puede quedar de la siguiente manera:

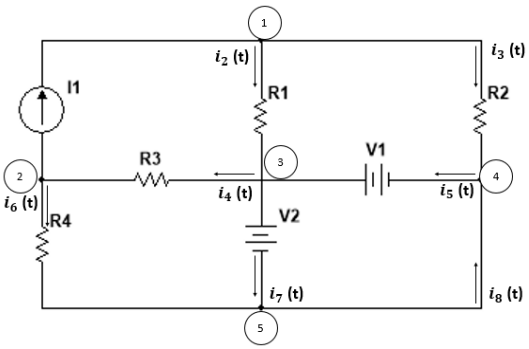

Figura 1.34. Diagrama de la aplicación de la Ley de Kirchhoff para Corriente polarizado

Ahora, considere el nodo 3 y observe que las corrientes $i_2(t), i_5(t)$ entran al nodo, mientras que las corrientes $i_4(t), i_7(t)$ salen de éste. Suponiéndose que las corrientes que entran son positivas entonces las que salen deben ser negativas, se obtiene la siguiente ecuación:

$$i_2(t) - i_4(t) + i_5(t) - i_7(t) = 0$$

Si multiplicamos la ecuación anterior por -1, obtenemos la expresión:

$$i_2(t) + i_5(t) = i_4(t) + i_7(t)$$

La cual afirma que la suma algebraica de las corrientes que salen de un nodo es cero. De manera alterna, podemos escribir la ecuación como:

$$i_2(t) + i_5(t) = i_4(t) + i_7(t)$$

Que establece que la suma de las corrientes que entran en un nodo es igual a la suma de las corrientes que salen del nodo. Ambas expresiones son formas alternativas de la ley de corriente de Kirchhoff.

Es necesario reconocer que la suma de las variables que han sido definidas entrando en el nodo es igual a la suma de las variables que han sido definidas saliendo del nodo, no las corrientes reales. Por ejemplo: $i_j(i)$ puede definirse que entra en el nodo, pero si su valor real es negativo, habrá carga positiva saliendo del nodo, es por eso que puede haber diversas alternativas para plantear la dirección de las corrientes.

Ejemplo 1.1

Considere el circuito de la Figura 1.35 Encuentre VRS, si se conocen los valores de V_R y de V_{R3}.

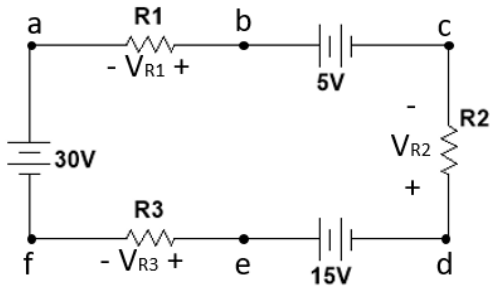

Figura 1.35 Circuito para el ejemplo

Solución

Como se tiene una sola malla, se tiene sólo una trayectoria, si se considerarán a los incrementos como negativos y a los decrementos como positivos, se tiene:

$$+V_{R1} - 5\,V + V_{R2} - 15 + V_{R3} - 30 = 0$$

Se puede escribir como:

$$+V_{R1} + V_{R2} + V_{R3} = 5 + 15 + 3$$

$$= 50V$$

Si suponemos que se saben los voltajes V_{R1} y V_{R2} de 18V y 12V, respectivamente. Entonces, $V_{R3} = 20V$

Ejemplo 1.2

Se desea escribir las ecuaciones para la LKC en el circuito de la Figura 1.36.

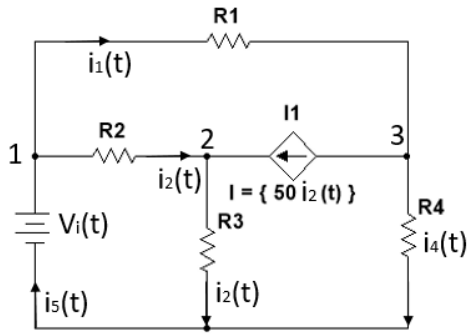

Figura 1.36 Circuito para el ejemplo

Solución

Las ecuaciones de la LKC para los nodos del 1 al 4 son:

$$i_1(t) + i_2(t) - i_5(t) = 0$$
$$-i_2(t) + i_3(t) - 50\ i_2(t) = 0$$
$$i_1(t) + 50\, i_2(t) + i_4(t) = 0$$
$$i_5(t) - i_3(t) - i_4(t) = 0$$

Ejemplo 1.3

Utilice las leyes de Kirchhoff en un procedimiento ordenado para evaluar todas las corrientes y voltajes en el circuito de la Figura 1.37

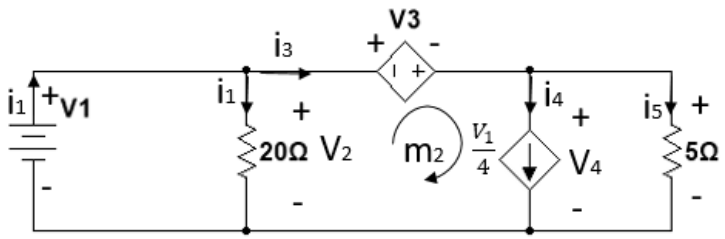

Figura 1.37 Circuito para el ejemplo

Solución

De los datos dados tenemos que

$$V_1 = V_2 = 60\ V$$
$$V_4 = V_5$$
$$V_3 = 5i_2$$
$$i_2 = \frac{V_2}{20\Omega} = \frac{60V}{20\Omega} = 3A$$
$$V_3 = 5i_2 = 5(3A) = 15V$$
$$i_4 = \frac{V_1}{4} = \frac{60}{4} = 15A$$

Analizando la malla 2, considerando los incrementos como negativos y a los decrementos como positivos se tiene:

$$-V_2 + V_3 + V_4 = 0$$
$$-60V + 5i_2 + V_4 = 0$$
$$V_5 = V_4 = 60V - 5i_2$$
$$V_5 = 60V - 15V = 45V = V_4$$
$$i_2 + i_3 = 3A + 24\ A = 27A; \quad i_3 = i_4 + i_5 = 15A + 9A$$
$$i_3 = 24\ A$$

Ejemplo 1.4

Para el circuito de la figura 1.38.

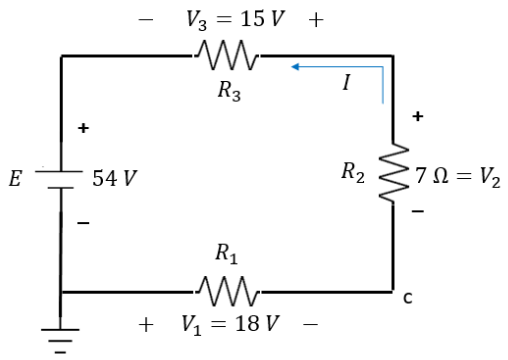

Figura 1.38 Circuito para el ejemplo

a) Determine V_2 utilizando la ley de voltaje de Kirchhoff
b) Determine *I*
c) Calcule R_1 y R_2

Soluciones:

a) La ley de voltaje de Kirchhoff (en sentido de las manecillas del reloj):

$$-E + V_3 + V_2 + V_1 = 0$$

O bien,

$$E = V_1 + V_2 + V_3$$

Y

$$V_2 = E - V_1 - V_3 = 54\ V - 18\ V - 15\ V = 21\ V$$

b)

$$I = \frac{V_2}{R_2} = \frac{21\ V}{7\ \Omega}$$

c)

$$R_1 = \frac{V_1}{I} = \frac{18\ V}{3\ A} = 6\ \Omega$$

$$R_3 = \frac{V_3}{I} = \frac{15\ V}{3\ A} = 5\ \Omega$$

UNIDAD TEMÁTICA II

Técnicas en el Análisis de Circuitos en Corriente Directa y Alterna

Unidad Temática II: Técnicas en el Análisis de Circuitos en Corriente Directa y Alterna

Objetivo Particular

Resolver circuitos eléctricos utilizando técnicas de síntesis, para solucionar circuitos de corriente directa y alterna, mediante la realización de prácticas de laboratorio, examen exploratorio, exposición oral, trabajos escritos, tareas, participaciones individuales y grupales.

Estrategias de Aprendizaje

- Indagación previa de los temas a tratar en cada clase.
- Resolución de problemas de circuitos eléctricos tanto en corriente directa como en corriente alterna.
- Entrega de tareas empleando software para la simulación de circuitos eléctricos.
- Exposición oral de los conceptos de circuitos eléctricos de acuerdo al tema tratado.
- Realización de prácticas y la elaboración del correspondiente reporte en una lengua adicional al Español (Ingles).
- Entrega de trabajos escritos en una lengua adicional al Español (Ingles).

Evaluación de los Aprendizajes

- 10% Trabajos de investigación (exposición oral, trabajos escritos, tareas, participaciones individuales y grupales).
- 45% Trabajo en laboratorio.
- 45% Resolución de examen exploratorio.

2.1 Análisis de Mallas

El término malla, como ya hemos definido anteriormente, se deriva de las similitudes entre las mallas cerradas de una red y una malla de alambre; es decir, una figura cerrada cuadrada que no contiene otras pequeñas dentro de ella. Al circuito que está constituido por mallas se le denomina circuito plano.

Un análisis de mallas se usa en conjunto con la Ley de Voltaje de Kirchhoff para determinar las corrientes dentro de un circuito. Es el método para poder analizar los circuitos que tengan 2 o más fuentes de voltaje independientes en su interior. Cuando se conocen las corrientes, podemos usar la ley de Ohm para calcular cada uno de los voltajes.

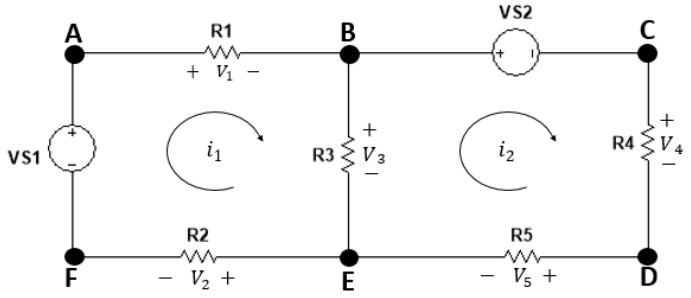

Figura 2.1. Diagrama de la aplicación del análisis de mallas a un circuito cerrado

Para iniciar nuestro análisis, considere el circuito que se muestra en la figura 4.8. Identifiquemos también dos mallas, *A-B-E-F-A* y *B-C-D-E-B*. Definimos ahora un nuevo conjunto de variables de corriente llamado *corrientes de malla*, que puede usarse para encontrar las corrientes físicas en el circuito. Supongamos que la corriente i_1 fluye en la primera malla y que la corriente i_2 fluye en la segunda. Entonces la corriente de la rama que fluye de *B* a *E* a través de e R_3 es e $i_1 - i_2$. Las direcciones de las corrientes se han supuesto.

Aplicando la Ley de Voltaje de Kirchhoff a la primera malla tenemos:

$$+V_1 + V_3 + V_2 - V_{S1} = 0$$

La Ley de Voltaje de Kirchhoff aplicada a la malla 2 es:

$$+V_{S2} + V_4 + V_5 - V_3 = 0$$

dónde $V_1 = i_1R_1$, $V_2 = i_1R_2$, $V_3 = (i_1 - i_2)R_3$, $V_4 = i_2R_4$ y $V_5 = i_2R_5$.

Al sustituir esos valores en las dos ecuaciones de la LVK, se producen las dos ecuaciones simultáneas requeridas para determinar las dos corrientes de malla; es decir:

$$i_1(R_1 + R_2 + R_3) - i_2(R_3) = V_{S1}$$

$$-i_1(R_3) + i_2(R_3 + R_4 + R_5) = -V_{S2}$$

El objetivo es obtener un sistema de ecuaciones para poder deducir los valores de cada una de las corrientes. De manera matricial se puede expresar como:

$$\begin{bmatrix} R_1 + R_2 + R_3 & -R_3 \\ -R_3 & R_3 + R_4 + R_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{S1} \\ -V_{S2} \end{bmatrix}$$

Recordemos el concepto de malla para que quede más claro este tema. Una malla es una clase especial de circuito cerrado que no contiene ningún otro circuito cerrado dentro de ella. Por tanto, conforme atravesamos la trayectoria de una malla, no envolvemos a ninguno de los elementos del circuito.

Concisamente, podemos escribir los pasos a seguir, de la siguiente manera:

1. Asignar una dirección de corriente distinta para cada malla independiente del circuito.
2. Indicar las polaridades dentro de cada malla para cada resistor, como se determinan por la dirección supuesta de la corriente para tal malla.
3. Aplicar la Ley de Voltaje de Kirchhoff por cada malla cerrada en la dirección que se le asignó en el paso 1. La dirección distinta para cada malla se hace con el fin de que se establezca una uniformidad:

    a. Si un resistor tiene dos o más corrientes supuestas que pasan por él, la corriente total que pasa por el resistor es la corriente supuesta de malla a la cual se está aplicando la Ley de Voltaje de Kirchhoff, más las corrientes supuesta de las otras mallas que pasan en la misma dirección, menos las corrientes supuesta que pasan en la dirección contraria.
    b. La dirección de las corrientes de malla asignadas no afecta la polaridad de una fuente de voltaje.

4. Despejar las ecuaciones lineales simultáneas resultantes para encontrar cada una de las corrientes de mallas supuestas.

Hay un caso particular, dentro del tema del análisis de mallas, que analizaremos a continuación.

Supermalla

Existe una supermalla cuando una fuente de corriente está entre dos mallas esenciales o principales. En otras palabras, el análisis de mallas que tratamos con anterioridad sirve cuando existe una resistencia compartida entre dos o más mallas; y en este caso, se analiza el momento en que una fuente de voltaje se comparte entre dos o más mallas.

En tales casos, puede convertirse la fuente de corriente en una de voltaje (solamente si ésta presenta un resistor en paralelo) y proceder de la misma manera que los pasos anteriores; o bien, utilizar una corriente de supermalla y continuar de la siguiente manera.

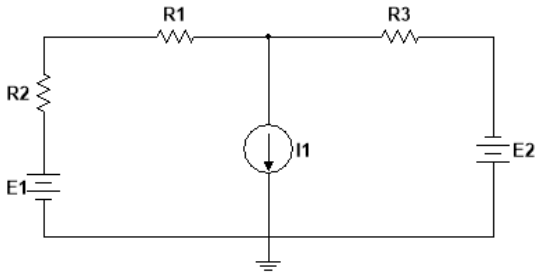

Figura 2.2. Diagrama de una supermalla en un circuito cerrado

Empiece según la forma descrita y asigne una corriente a cada malla independiente, incluyendo las fuentes de corriente, como si fueran resistores o fuentes de voltaje.

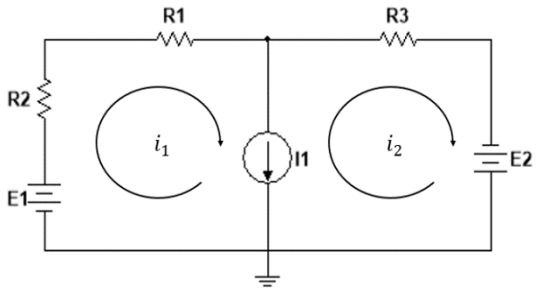

Figura 2.3. Diagrama de una supermalla en un circuito cerrado con la dirección de corrientes asignada

A continuación, sustituya las fuentes de corriente con equivalentes de circuito abierto y aplique la Ley de Voltaje de Kirchhoff a todas las trayectorias independientes restantes del circuito, usando las corrientes de malla que se acaban de definir. Se dice que la trayectoria de una corriente de supermalla es cualquier ventana abierta resultante, que incluya dos o más corrientes de malla.

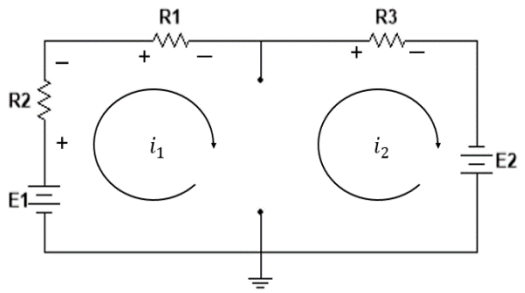

Figura 2.4. Diagrama de una supermalla sustituyendo la fuente de corriente con un corto circuito en un circuito cerrado

Lo siguiente es aplicar los pasos anteriores para poder despejar las corrientes de cada malla independiente.

Para aplicar el método supermalla, se trata el circuito como si la corriente no estuviera allí. Esto produce una ecuación que incorpora las dos corrientes de malla. Una vez planteada esta ecuación, se necesita una ecuación que relacione las dos corrientes de malla con la fuente de corriente, esto será una ecuación aparte que relacione las dos corrientes de malla con la fuente de corriente al final.

Método general para un análisis en C.A.

1. Asigne una corriente diferente en el sentido de las manecillas del reloj a cada lazo cerrado independiente de la red.
2. Indique las polaridades para cada impedancia según la dirección de la corriente.
3. Aplique la ley de voltaje de Kirchhoff alrededor de cada lazo en el sentido de las manecillas del reloj. Se vuelve a elegir el sentido de las manecillas de reloj para establecer uniformidad.
   a) Si a una impedancia se le asumen dos o más corrientes a través de ella, la corriente total será la asumida en el lazo en el que se está aplicando la ley de voltaje de Kirchhoff más las corrientes asumidas de los demás lazos en la misma dirección, menos las corrientes asumidas en la dirección contraria.
   b) las direcciones de corriente no afectan la polaridad de una fuente de voltaje.

4. Resolver las ecuaciones lineales simultáneas resultantes para las corrientes de lazo asumidas.

Ejemplo 2.1

Para el circuito de la Figura 2.5, encuentre V_0 aplicando Análisis de Mallas.

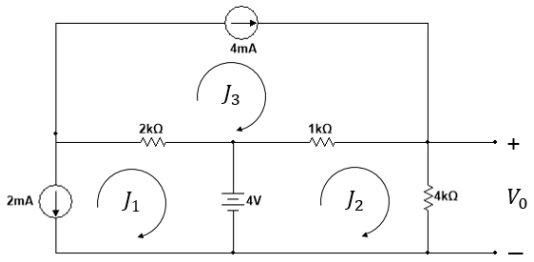

Figura 2.5 Circuito para el ejemplo

Solución

Se marca una trayectoria en dirección a las manecillas del reloj a cada malla independiente. Y sabemos que,

$$J_1 = 2mA;\ J_3 = 4mA$$

Las ecuaciones de malla son:

$$Z_{11}J_1 + Z_{12}J_2 + Z_{13}J_3 = 4V$$
$$Z_{21}J_1 + Z_{22}J_2 + Z_{23}J_3 = 4V$$
$$Z_{31}J_1 + Z_{32}J_2 + Z_{33}J_3 = 0$$

Pero $Z_{11} = 2K\Omega;\ Z_{22} = 5K\Omega;\ Z_{33} = 3K\Omega; Z_{12} = 0;\ Z_{13} = -2K\Omega;\ Z_{23} = -1K\Omega.$

Por lo tanto,

1. $2K\Omega J_1 + 0J_2 - 2K\Omega J_3 = 4V$
2. $0J_1 + 5K\Omega J_2 - 1K\Omega J_3 = 4V$
3. $-2K\Omega J_1 - 1K\Omega J_2 + 3K\Omega J_3 = 0$

De la ecuación 2.

$$5K\Omega J_2 - 1K\Omega J_3 = 4V$$
$$J_3 = 4mA$$
$$5K\Omega J_2 - 1K\Omega(4mA) = 4V$$
$$5K\Omega J_2 - 4V = 4V$$
$$J_2 = \frac{4V + 4V}{5K\Omega} = 1.6mA$$
$$V_0 = J_2(4K\Omega) = 1.6mA(4K\Omega) = 6.4V$$
$$\therefore V_0 = 6.4V$$

Ejemplo 2.2

Para el circuito de la figura 2.6, encuentre I_0 aplicando el análisis de mallas.

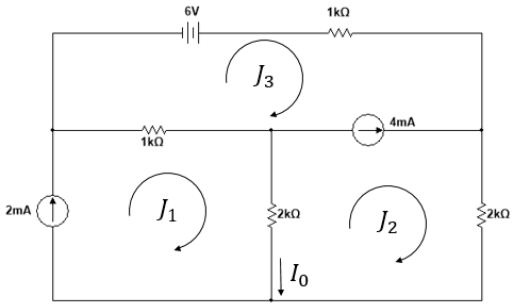

Figura 2.6 Circuito para el ejemplo

Solución

Se marcan las trayectorias de las corrientes de malla en sentido a las manecillas del reloj. Se aplica la supermalla a la fuente de corriente de 4mA, donde

$$I_1 = 2mA$$
$$I_2 - I_3 = 4mA;\ I_2 = 4mA + I_3$$

Se tiene el circuito resultante, se marca una nueva trayectoria a la supermalla y se analiza por medio de la Ley de Kirchhoff para Voltaje.

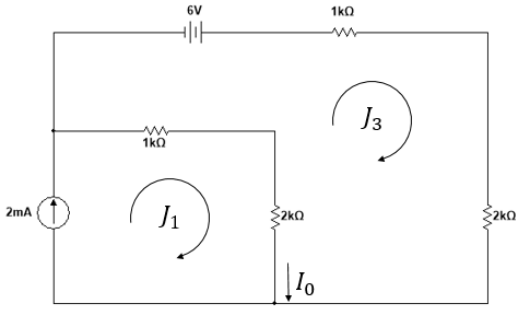

Figura 2.7 Circuito para el ejemplo

Aplicamos LKV para las mallas 2 y 3 (Supermalla).

$$-6V + 1K\Omega J_3 + 2K\Omega J_2 + 2K\Omega(J_2 - J_1) + 1K\Omega(J_3 - J_1) = 0$$
$$-6V + 1K\Omega J_3 + 2K\Omega J_2 + 2K\Omega J_2 - 2K\Omega J_1 + 1K\Omega J_3 - 1K\Omega J_1 = 0$$
$$-6V + 2K\Omega J_3 + 4K\Omega J_2 - 3K\Omega J_1 = 0$$
$$-6V + 2K\Omega J_3 + 4K\Omega J_2 - 3K\Omega(2mA) = 0$$
$$-12V + 2K\Omega J_3 + 4K\Omega(4mA + J_3) = 0$$
$$-12V + 2K\Omega J_3 + 16V + 4K\Omega J_3 = 0$$
$$4V + 6K\Omega J_3 = 0$$
$$J_3 = -\frac{4V}{6K\Omega} = -0.667mA$$
$$\therefore I_2 = 4mA + J_3 = 4mA - 0.667mA = 3.333mA$$
$$\therefore I_0 = J_1 - J_2 = 2mA - 3.333mA = -1.333mA$$

Ejemplo 2.3

Usando el método para análisis de mallas, encontrar la corriente I_1 en la figura 2.8

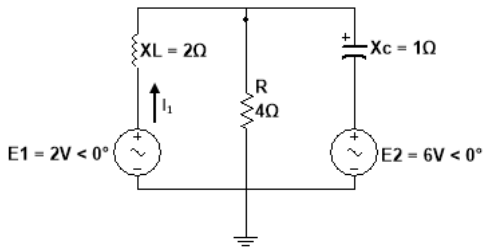

Figura 2.8. Circuito propuesto

Solución

Cuando se tenga la solución en términos de impedancias, se podrán sustituir los valores numéricos para encontrar los valores desconocidos.

La red se vuelve a trazar en la figura 2.6 con las impedancias con subíndice:

$Z_1 = +jX_L = +j\,2\Omega$ $\quad E_1 = 2V \angle 0°$

$Z_2 = R = 4\Omega$ $\quad E_2 = 6V \angle 0°$

$Z_3 = -jX_C = -j\,1\Omega$

Los pasos 1 y 2 son como los indicados en la figura 2.9

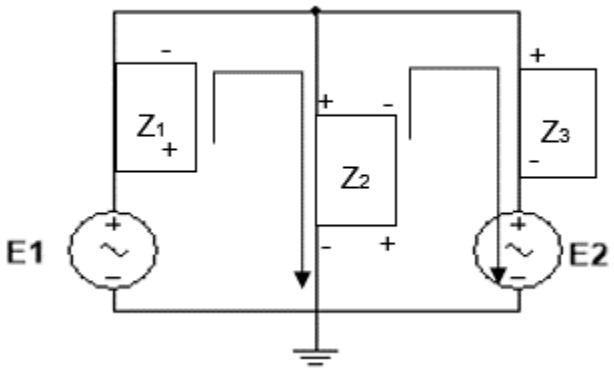

Figura 2.9. Asignación de las Corrientes de malla y las impedancias con subíndice

Paso 3:

$$+E_1 - I_1Z_1 - Z_2(I_1 - I_2) = 0$$
$$-Z_2(I_2 - I_1) - I_2Z_3 - E_2 = 0$$

O bien:

$$E_1 - I_1Z_1 - I_1Z_2 + I_2Z_2 = 0$$
$$-I_2Z_1 - I_1Z_2 + I_2Z_3 - E_2 = 0$$

De manera que:

$$I_1(Z_1 + Z_2) - I_2Z_2 = E_1$$
$$I_2(Z_2 + Z_3) - I_1Z_2 = -E_2$$

La cual se vuelve a escribir como:

$$I_1(Z_1 + Z_2) - I_2 Z_2 \quad = E_1$$
$$-I_1 Z_2 + I_2(Z_2 + Z_3) = -E_2$$

Paso 4: Al utilizar determinantes obtenemos:

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} E_1 & -Z_2 \\ -E_2 & Z_2 + Z_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Z_1 + Z_2 & -Z_2 \\ -Z_2 & Z_2 + Z_3 \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{E_1(Z_2 + Z_3) - E_2(Z_2)}{(Z_1 + Z_2)(Z_2 + Z_3) - (Z_2)^2}$$

$$\frac{(E_1 - E_2)Z_2 + E_1 Z_3}{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3}$$

Al sustituir valores numéricos resulta:

$$I_1 = \frac{(2V - 6V)(4\Omega) + (2V)(-j1\Omega)}{(+j2\Omega)(4\Omega) + (+j2\Omega)(-j2\Omega) + (4\Omega)(-j2\Omega)}$$

$$= \frac{-16 - j2}{j8 - j^2 2 - j4} = \frac{-16 - j2}{2 + j4} = \frac{16.12A \angle -172.87°}{4.47 \angle 63.43°}$$

$$= 3.61A \angle -236.3° \; o \; 3.61A \angle 123.7°$$

Fuentes de voltaje dependientes. Para las fuentes de voltaje dependientes, el procedimiento se modifica de la siguiente forma:

1. Los pasos 1 y 2 serán los mismos.
2. El paso 3 se modifica de la siguiente manera: trate cada fuente dependiente como una fuente independiente cuando se aplique la ley de voltaje de Kirchhoff a cada lazo independiente.
3. El paso 4 no se modifica.

2.2 Análisis de Nodos

Un nodo se define como la unión de dos o más ramas. Si ahora definimos un nodo en cualquier red como una referencia que con frecuencia se le llama tierra debido a que se dice que está a potencial de tierra cero. Todos los nodos restantes de la red tendrán un voltaje fijo en relación con esta referencia.

En un análisis nodal las variables en el circuito se eligen como los voltajes de los nodos. Pueden escribirse ecuaciones que relacionan estos voltajes de nodos aplicando la Ley de corriente de Kirchhoff a cada uno de los nodos, sin contar el nodo de referencia. Después, para obtener la solución completa de una red se evalúan estos voltajes de nodos.

El método de análisis de nodos se aplica del modo siguiente:

1. Determine la cantidad de nodos dentro de la red
2. Elija un nodo de referencia y etiquete todos los nodos restantes con un valor de subíndice del voltaje: V_1, V_2, etcétera.
3. Aplique la Ley de la corriente de Kirchhoff a cada nodo excepto al de referencia. Suponga que todas las corrientes desconocidas salen del nodo para la aplicación de la Ley de la corriente de Kirchhoff. En otras palabras, para cada nodo no tome en cuenta la dirección que pueda tener una corriente desconocida para otro nodo. Cada nodo debe tratarse como una entidad separada independiente de la aplicación de la Ley de la corriente de Kirchhoff a los otros nodos.
4. Despeje las ecuaciones resultantes para los voltajes de nodos.

Para ejemplificar, aplique un análisis de nodos a la red de la figura 2.10

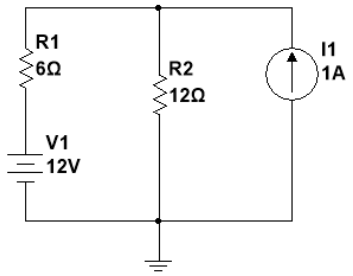

Figura 2.10. Ejercicio propuesto

Paso 1 y 2 La red tiene dos nodos, como se observa en la figura 2.11

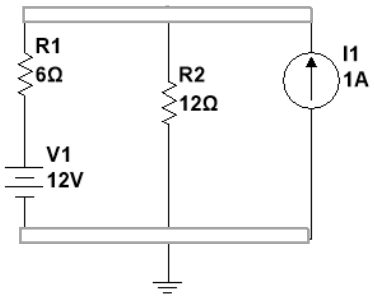

Figura 2.11. Asignación de Nodos

El nodo inferior se define como el nodo de referencia en un voltaje de tierra (cero volts) y el otro, V_1 (el voltaje del nodo 1 a la tierra).

Paso 3: Se define que I_1 e I_2 salgan del nodo de la figura 2.11 y se aplica la ley de la corriente de Kirchhoff del modo siguiente:

$$V_1$$

$$I = I_1 + I_2$$

La corriente I_1 también se determina mediante la ley de ohm del modo siguiente

$$I_2 = \frac{VR_2}{R_2} = \frac{V_1}{R_2}$$

La corriente I_1 también se determina mediante la Ley de Ohm del modo siguiente:

$$I_1 = \frac{VR_1}{R_1}$$

Con $VR_1 = V_1 - E$

Sustituyendo en la ecuación de la ley de la corriente de Kirchhoff:

$$I = \frac{V_1 - E}{R_1} + \frac{V_1}{R_2}$$

Y volviendo a ordenar tenemos:

$$I = \frac{V_1}{R_1} - \frac{E}{R_1} + \frac{V_1}{R_2} = V_1\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) - \frac{E}{R_1}$$

O bien

$$V_1\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = \frac{E}{R_1} + I$$

Sustituyendo los valores numéricos

$$V_1\left(\frac{1}{6\Omega} + \frac{1}{12\Omega}\right) = \frac{24\,V}{6\Omega} + 1A = 5A$$

$$V_1\left(\frac{1}{4\Omega}\right) = 5\,A$$

$$V_1 = 20\,V$$

Después, se determinan las corrientes I_1 e I_2 usando las ecuaciones anteriores

$$I_1 = \frac{V_1 - E}{R_1} = \frac{20\,V - 24\,V}{6\Omega} = \frac{-4}{6\Omega} = -0.667\,A$$

El signo de menos indica simplemente que la corriente I_1, tiene una dirección opuesta a la corriente propuesta.

$$I_2 = \frac{V_1}{R_2} = \frac{20\Omega}{12\Omega} = 1.66\,A$$

Supernodo

En ocasiones habrá fuentes independientes en la red a las cuales aplicar un análisis de nodos. En tales casos, la fuente de voltaje puede convertirse en una fuente de corriente (si está presente un resistor en serie) y se puede introducir el concepto de un súper nodo.

De acuerdo con la LCK, la suma algebraica de las corrientes que entrar a un supernodo es cero, es decir que la LCK se aplica a un supernodo en la misma forma que se aplica a un nodo normal[2].

Un supernodo está integrado por dos nodos conectados por una fuente de voltaje independiente o dependiente[2].

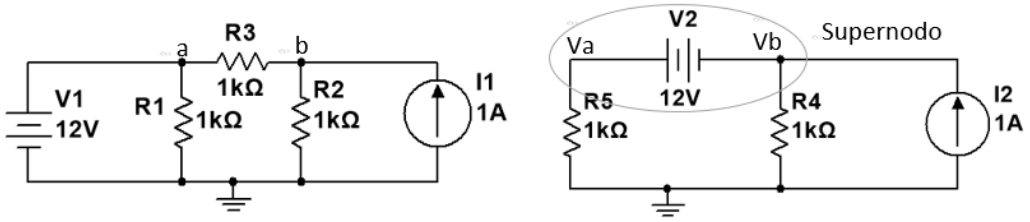

Figura 2.12. Aplicación de Supernodo

Para resolver circuitos con supernodo:

Empiece como antes y asigne un voltaje a todos los nodos independientes de la red, incluyendo todas las fuentes de voltaje independientes como si fueran un resistor o una fuente de corriente.

A continuación, sustituya las fuentes de voltaje independiente con cortocircuitos equivalentes y aplique LCK a los nodos definidos en la red. Cualquier nodo que incluya el efecto de los elementos enlazados sólo a otros nodos se conoce como supernodo[1].

Por último, relacione los nodos definidos con las fuentes de voltaje independientes de la red y despeje los voltajes de nodos. El ejemplo siguiente aclara la definición de un supernodo.

Ejemplo 2.4

Determine los voltajes de los nodos V_1 y V_2 de la Figura 2.13 usando el concepto de supernodo.

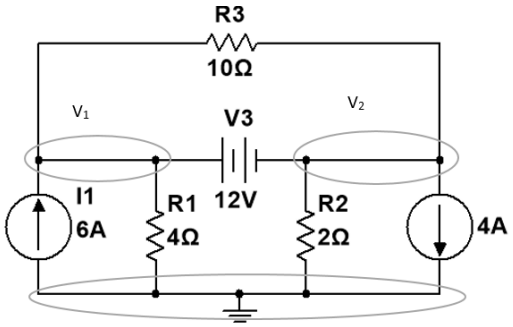

Figura 2.13. Ejercicio propuesto

Solución

La sustitución de la fuente independiente de 12 V con un equivalente de cortocircuito producirá la red de la siguiente figura en la cual se obtiene un supernodo al que debe aplicarse la Ley de corriente de Kirchhoff.

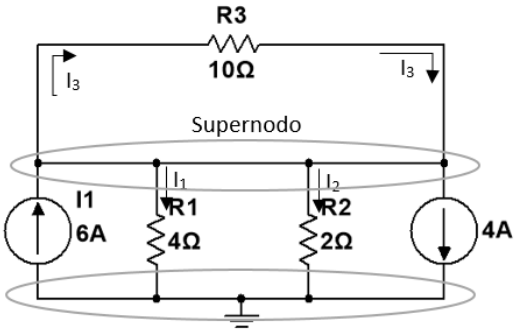

Figura 2.14 Asignación de Nodos

Es importante dejar los nodos establecidos en su lugar y usarlos para definir las corrientes a partir de esa región de la red.

De este modo, se observa que la corriente I_3 saldrá del supernodo en V_1 y después entrará al mismo supernodo en V_2. Por tanto, se aplica la LCK del siguiente modo:

$$\sum I_i = \sum I_0$$

$$6A + I_3 = I_1 + I_2 + 4A + I_3$$

O bien

$$I_3 + I_2 = 6A - 4A = 2A$$

En tal caso,

$$\frac{V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_2} = 2A$$

Y

$$\frac{V_1}{4\Omega} + \frac{V_2}{2\Omega} = 2A$$

Relacionando los voltajes de nodos definidos con la fuente de voltaje independiente:

$$V_1 - V_2 = E = 12V$$

Lo cual produce dos ecuaciones y dos incógnitas:

$$0.25V_1 + 0.5V_2 = 2$$
$$V_1 - 1V_2 = 12$$

Sustituyendo:

$$V_1 = V_2 + 12$$
$$0.25(V_2 + 12) + 0.5V_2 = 2$$

Y

$$0.75V_2 = 2 - 3 = -1$$

Por lo que,

$$V_2 = -1.333V$$

Y

$$V_1 = V_2 + 12 = -1.33V + 12V = 10.667V$$

A continuación, se determina la corriente de la red del modo siguiente:

$$I_1 = \frac{V}{R_1} = \frac{10.667V}{4\Omega} = 2.6667A$$

$$I_2 = \frac{V_2}{R_1} = \frac{1.33V}{2\Omega} = 0.667A$$

$$I_3 = \frac{V_1 - V_2}{10\Omega} = \frac{10.66V - (-1.333V)}{10\Omega} = 1.2A$$

Método general para un análisis de C.A.

Fuentes independientes: Los pasos fundamentales son los siguientes:

1. Determine el número de nodos dentro de la red.
2. Elija un nodo de referencia e identifique cada nodo restante con un valor de voltaje.
3. Aplique la ley de corriente de Kirchhoff a cada nodo excepto al de referencia. Asuma que todas las corrientes desconocidas abandonan el nodo en cada aplicación de la ley de corriente de Kirchhoff.
4. Resuelva las ecuaciones resultantes para los voltajes nodales.

Ejemplo 2.5

Determine el voltaje en el inductor para la red de la figura 2.15

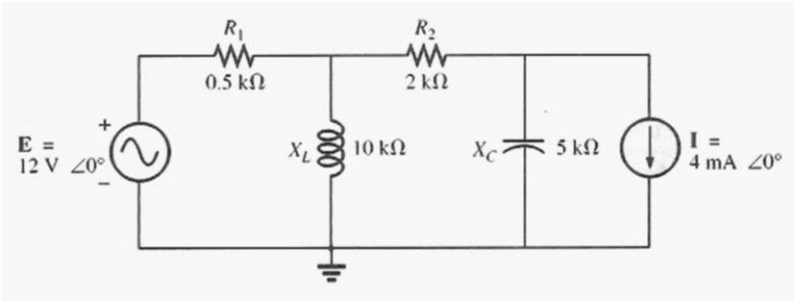

Figura 2.15. Ejemplo propuesto

Solución

Los pasos 1 y 2 son como los indicados en la figura 2.16

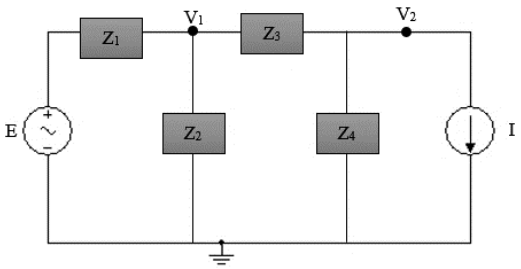

Figura 2.16. Pasos a seguir

Paso 3: Observe la figura 2.17 para la aplicación de la ley de corriente de Kirchhoff al nodo V_1:

$$\Sigma I_i = \Sigma I_o$$

$$0 = I_1 + I_2 + I_3$$

$$\frac{V_1 - E}{Z_1} + \frac{V_1}{Z_2} + \frac{V_1 - V_2}{Z_3} = 0$$

Al reagrupar términos:

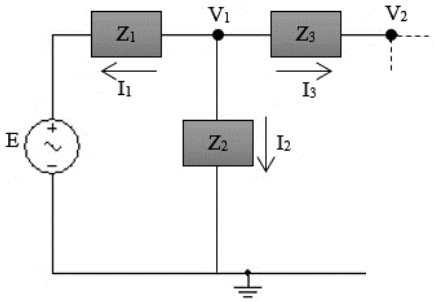

Figura 2.17. Aplicación de la ley de corriente de Kirchhoff al nodo V1 de la figura 2.16

$$V_2\left[\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3}\right] - V_2\left[\frac{1}{Z_3}\right] = \frac{E_1}{Z_1}$$

Observe la figura 2.16 para la aplicación de la ley de corriente de Kirchhoff al nodo V_2.

$$0 = I_3 + I_4 + I$$

$$\frac{V_2 - V_1}{Z_3} + \frac{V_2}{Z_4} + I = 0$$

Al reagrupar términos

$$V_2\left[\frac{1}{Z_3} + \frac{1}{Z_4}\right] - V_1\left[\frac{1}{Z_3}\right] = -I$$

Al agrupar ecuaciones:

$$V_1\left[\frac{1}{Z_1}+\frac{1}{Z_2}+\frac{1}{Z_3}\right]-V_2\left[\frac{1}{Z_3}\right]=\frac{E}{Z_1}$$
$$V_1\left[\frac{1}{Z_3}\right]-V_2\left[\frac{1}{Z_3}+\frac{1}{Z_4}\right]=I$$

$$\frac{1}{Z_1}+\frac{1}{Z_2}+\frac{1}{Z_3}=\frac{1}{0.5k\Omega}+\frac{1}{j10k\Omega}+\frac{1}{2k\Omega}=2.25mS\angle-2.29°$$
$$\frac{1}{Z_3}+\frac{1}{Z_4}=\frac{1}{2k\Omega}+\frac{1}{-j5k\Omega}=0.539mS\angle-21.80°$$

Y

$$V_1[2.5mS\angle-2.29°] \quad -V_2[0.5mS\angle 0°] \quad =24mA\angle 0°$$
$$V_1[0.5mS\angle 0°] \quad -V_2[0.539mS\angle-21.80°] \quad =4mA\angle 0°$$

con:

$$V_1=\frac{\begin{vmatrix}24mA\angle 0° & -0.5mS\angle 0°\\ 4mA\angle 0° & -0.539mS\angle-21.80°\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2.5mS\angle-2.29° & -0.5mS\angle 0°\\ 0.5mS\angle 0° & -0.539mS\angle-21.80°\end{vmatrix}}$$

$$=\frac{(24mA\angle 0°)(-0.539mS\angle-21.80°)+(0.5mS\angle 0°)(4mA\angle 0°)}{(2.5mS\angle-2.29°)(-0.539mS\angle-21.80°)+(0.5mS\angle 0°)(0.5mS\angle 0°)}$$

$$=\frac{-12.94X10^{-6}V\angle 21.80°+2X10^{-6}V\angle 0°}{-1.348X10^{-6}V\angle 19.51°+0.25X10^{-6}V\angle 0°}$$

$$=\frac{-(12.01+j4.81)X10^{-6}V+2X10^{-6}V}{-(1.271+j0.45)X10^{-6}V+0.25X10^{-6}V}$$

$$=\frac{-10.01V-j4.81V}{-1.021-j0.45}=\frac{11.106V\angle-154.33°}{1.116\angle-156.21°}$$

$$V_1=9.95V\angle 1.88°$$

Fuentes de corriente dependientes Para las fuentes de corriente de pendientes, el procedimiento se modifica de la siguiente forma:

1. Los pasos 1 y 2 son los mismos que los aplicados para las fuentes independientes.
2. Trate cada fuente de corriente dependiente como una independiente cuando se aplique la ley de corriente de Kirchhoff a cada nodo definido.
3. El paso 4 no se modifica.

2.3 Divisor de Voltaje

En circuitos de CA, el formato básico para la regla del divisor de voltaje es exactamente el mismo que para circuitos de CD.

$$\boxed{V_x = \frac{Z_x E}{Z_T}}$$

Donde V_X es el voltaje en uno o más elementos en serie que tienen impedancia total de Z_X, E es el voltaje total que se presenta en el circuito en serie, y Z_γ es la impedancia total del circuito en serie.

Ejemplo 2.6

Aplicando divisores encuentre V_0 en el circuito de la figura 2.18

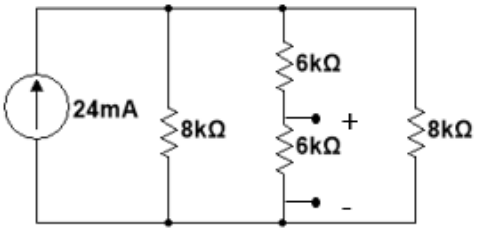

Figura 2.18 Circuito para el ejemplo

Solución

Como los resistores de 6 $k\Omega$ estan en serie, resulta una combinación de 12 $k\Omega$

$$R_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{8k\Omega} + \frac{1}{12k\Omega} + \frac{1}{8k\Omega}} = 3k\Omega$$

Aplicando la ecuación de divisor de corriente:

$$k\Omega = \frac{24mA(3k\Omega)}{12k\Omega} = 6mA$$

Por lo tanto, el valor de V_0 resulta,

$$V_0 = 6mA\ (6k\Omega) = 36\ \mathrm{V}$$

Ejemplo 2.7

Utilizando la regla del divisor de voltaje, encuentre el voltaje en cada elemento del circuito mostrado en la figura 2.19

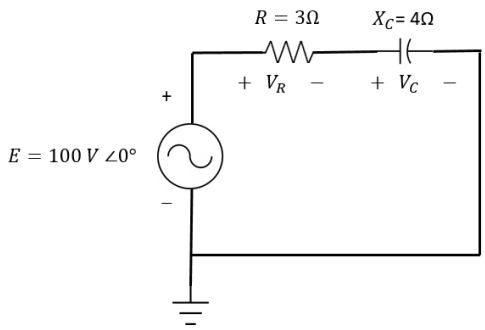

Figura 2.19. Circuito propuesto

Solución

$$V_C = \frac{Z_C E}{Z_C + Z_R} = \frac{(4\Omega \angle -90°)(100\ V \angle 0°)}{4\Omega \angle -90° + 3\Omega \angle 0°} = \frac{400 \angle -90°}{3 - j4} = \frac{400 \angle -90°}{5 \angle -53.13°} = 80\ V \angle -36.87°$$

$$V_C = \frac{Z_R E}{Z_C + Z_R} = \frac{(3\Omega \angle 0°)(100\ V \angle 0°)}{5\Omega \angle -53.13°} = \frac{300 \angle 0°}{5 \angle -53.13°} = 60\ V \angle +53.13°$$

Ejemplo 2.8

Utilizando la regla del divisor de voltaje, encuentre los voltajes desconocidos V_R, V_L, V_C y V_i para el circuito mostrado en la figura 2.20

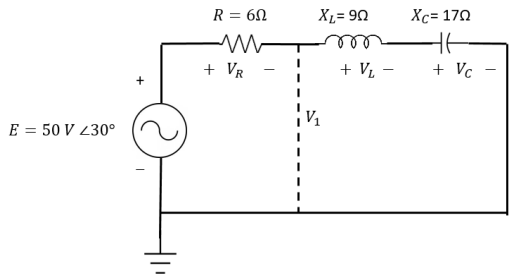

Figura 2.20. Circuito para el ejemplo

Solución

$$V_R = \frac{Z_R E}{Z_R + Z_L + Z_C} = \frac{(6\Omega \angle 0°)(50\ V \angle 30°)}{6\Omega \angle 0° + 9\Omega \angle 90° + 17\Omega \angle -90°} = \frac{300 \angle 30°}{6 + j9 - j17} = \frac{300 \angle 30°}{6 - j8} = \frac{300 \angle 30°}{10 \angle -53.13°}$$
$$= 30\ V \angle 83.13°$$

$$V_L = \frac{Z_L E}{Z_T} = \frac{(9\Omega \angle 90°)(50\ V \angle 30°)}{10\Omega \angle -53.13°} = \frac{450\ V \angle 120°}{10 \angle -53.13°} = 45\ V \angle 173.13°$$

$$V_C = \frac{Z_C E}{Z_T} = \frac{(17\Omega \angle -90°)(50\ V \angle 30°)}{10\Omega \angle -53.13°} = \frac{850 \angle -60°}{10 \angle -53°} = 85\ V \angle -6.87°$$

$$V_i = \frac{(Z_L + Z_C)E}{Z_T} = \frac{(9\Omega \angle 90° + 17\Omega \angle -90°)(50\ V \angle 30°)}{10\Omega \angle -53.13°} = \frac{(8 \angle -90°)(50 \angle 30°)}{10 \angle -53.13°} = \frac{400 \angle -60°}{10 \angle -53.13°}$$
$$= 40\ V \angle -6.87°$$

$$\boxed{I_1 = \frac{Z_2 I_T}{Z_1 + Z_2} \qquad o \qquad I_2 = \frac{Z_1 I_T}{Z_1 + Z_2}}$$

2.4 Divisor de Corriente

El formato básico para la regla del divisor de corriente en circuitos de CA es el exactamente el mismo que para circuitos de CD, es decir, para dos ramas paralelas con impedancias Z_1 y Z_2 como se muestra en la figura 2.21

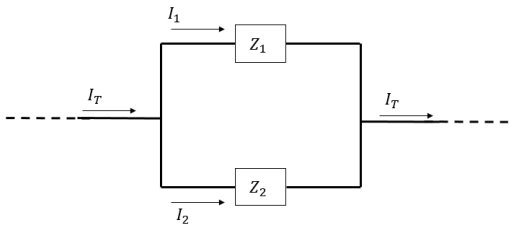

Figura 2.21 Aplicación de la regla del divisor de corriente

Ejemplo 2.9

Para el circuito de la Figura 2.22, determine:

a) El voltaje V_0.
b) La potencia suministrada por la fuente de corriente.
c) La potencia absorbida por cada resistor.

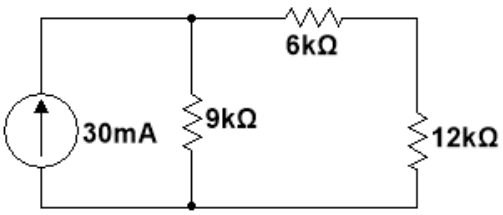

Figura 2.22 Circuito para el ejemplo

Solución

Los resistores de 6k Ω y 12k Ω están en serie, por lo tanto, la combinación resulta un valor de 18k Ω y el circuito resultante será:

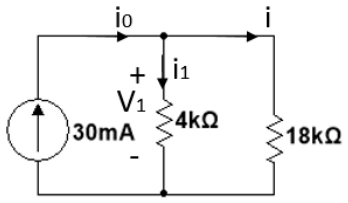

Figura 2.23 Circuito para el ejemplo

En consecuencia, podemos aplicar la técnica de división de corriente:

$$i_1 = \frac{18k\Omega\ (30mA)}{9k\Omega + 18\text{k}\Omega} = 20mA$$
$$i_2 = \frac{9k\Omega\ (30mA)}{9k\Omega + 18\text{k}\Omega} = 10mA$$

Por lo tanto, como los elementos en paralelo tienen el mismo voltaje que

$$V_0 = 9k\Omega,\ i_1 = 18\ k,\ i_2 = 180V$$

La potencia suministrada por la fuente será

$$P_0 = V_0 i_0 = 180(30)mW = 5.4\ mW$$

La potencia absorbida por el resistor de 12kΩ es,

$$P = iV = \ i_2(i_2R) = {i_2}^2R = (10\ x\ 10^{-3}\ )^2(12000) = 1.2\ W$$

La potencia absorbida por el resistor de 6kΩ

$$P = {i_2}^2R = 10\ x\ 10^{-3}\ )^2(6k\Omega) = 0.6\ W$$

La potencia absorbida por el resistor de 9 $k\Omega$ es,

$$P = \frac{{V_0}^2}{R} = \frac{(180)^2}{9k\Omega} = 3.6\ W$$

O bien $P = V_0\ i = 180(20)mW = 3.6\ W$

Ejemplo 2.10

Utilizando la regla del divisor de corriente, encuentre la corriente a través de cada impedancia de la figura 2.24

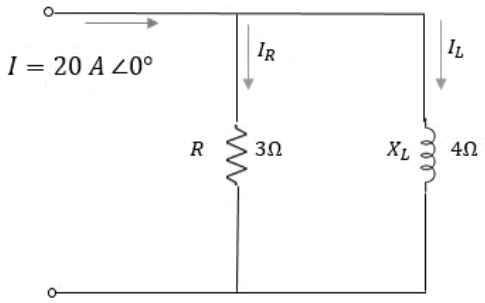

Figura 2.24. Circuito para el ejemplo

Solución

$$I_R = \frac{Z_L I_T}{Z_R + Z_L} = \frac{(4\Omega \llcorner 90°)(20\ A \llcorner 0°)}{3\Omega \llcorner 0° + 4\Omega \llcorner 90°} = \frac{80A \llcorner 90°}{5 \llcorner 53.13°} = 16A \llcorner 36.87°$$

$$I_L = \frac{Z_R I_T}{Z_R + Z_L} = \frac{(3\Omega \llcorner 0°)(20A \llcorner 0°)}{5\Omega \llcorner 53.13°} = \frac{460A \llcorner 0°}{5 \llcorner 53.13°} = 12\ A \llcorner -53.13°$$

Ejemplo 2.11

Utilizando la regla del divisor de corriente, encuentre a través de cada rama paralela de la figura 2.25

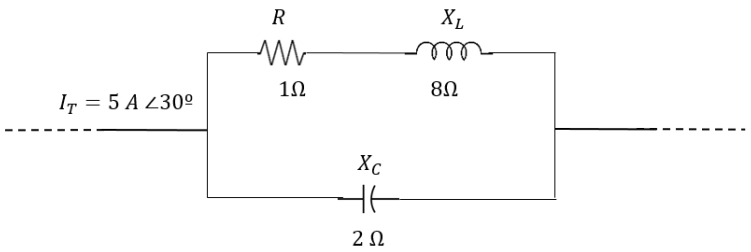

Figura 2.25. Circuito para el ejemplo

Solución

$$I_{R\bullet L} = \frac{Z_C I_T}{Z_C + Z_{R\bullet L}} = \frac{(2\Omega \llcorner -90°)(5\ A \llcorner 30°)}{-j2\ \Omega + 1\Omega + j8\ \Omega} = \frac{10A \llcorner -60°}{1 + j6} = \frac{10\ A \llcorner -60°}{6.083 \llcorner 80.54°}$$
$$= 1.644A \llcorner -140.54°$$

$$I_C = \frac{Z_{R\bullet L} I_T}{Z_C + Z_{R\bullet L}} = \frac{(1\Omega + j8\Omega)(5\ A \llcorner 30°)}{6.08\Omega \llcorner 80.54°} = \frac{(8.06 \llcorner 82.87°)(5\ A \llcorner 30°)}{6.08 \llcorner 80.54°} = \frac{40.30\ A \llcorner 112.87°}{6.083 \llcorner 80.54°}$$
$$= 6.625A \llcorner 32.33°$$

UNIDAD TEMÁTICA III

Teoremas de Circuitos

Unidad Temática III: Teoremas de Circuitos

Objetivo Particular

Aprender los teoremas existentes para resolver un circuito eléctrico, mediante la realización de prácticas de laboratorio, examen exploratorio, exposición oral, trabajos escritos, tareas, participaciones individuales y grupales.

Estrategias De Aprendizaje

- Indagación previa de los temas a tratar en cada clase.
- Resolución de problemas de circuitos eléctricos tanto en corriente directa como en corriente alterna.
- Entrega de tareas empleando software para la simulación de circuitos eléctricos.
- Exposición oral de los conceptos de circuitos eléctricos de acuerdo con el tema tratado.
- Realización de prácticas y la elaboración del correspondiente reporte en una lengua adicional al Español (Ingles).
- Entrega de trabajos escritos en una lengua adicional al Español (Ingles).

Evaluación De Los Aprendizajes

- 10% Trabajos de investigación (exposición oral, trabajos escritos, tareas, participaciones individuales y grupales)
- 45% Trabajo en laboratorio
- 45% Resolución de examen exploratorio

3.1 Teorema de Superposición

Linealidad.

Definimos como un *elemento lineal* a un elemento pasivo que tiene una relación linear corriente-voltaje debido a que tiene una curva característica lineal; es decir,

$$v(t) = Ri(t)$$

La linealidad requiere aditividad y homogeneidad. En el caso de un elemento resistivo, si se aplica $i_1(t)$, el voltaje a través de la resistencia es:

$$v_1(t) = Ri_1(t)$$

De manera similar, si se aplica $i_2(t)$, entonces,

$$v_2(t) = Ri_2(t)$$

Sin embargo, si se aplica $i_1(t) + i_2(t)$, el voltaje a través de la resistencia es:

$$v(t) = R[i_1(t) + i_2(t)] = Ri_1(t) + Ri_2(t) = v_1(t) + v_2(t)$$

Esto demuestra la propiedad aditiva. Además, si la corriente es escalada por una constante K_1, el voltaje también está escalado por la constate K_1, ya que,

$$RK_1 i(t) = K_1 Ri(t) = K_1 v(t)$$

Esto demuestra la homogeneidad.

Se ha mencionado en los anteriores capítulos que un circuito que contiene solamente fuentes independientes, fuentes linealmente dependientes y resistencias está descrito por ecuaciones de la forma:

$$a_1 v_1(t) + a_2 v_2(t) + \cdots + a_n v_n(t) = i(t)$$

Definimos como una fuente linealmente independiente como una fuente de voltaje o corriente que su salida de corriente o voltaje es proporcional a la fuerza de una variable de corriente o voltaje en un circuito (o a la suma algebraica de dichas cantidades).

Definimos a un circuito linear como un circuito compuesto exclusivamente de fuentes independientes, fuentes linealmente dependientes y/o elementos lineales. Desde esta definición, es posible mostrar que “la reacción de salida es proporcional a la fuente”, o, de manera más sencilla, si las fuentes independientes se multiplican por una constante K, los voltajes nodales o las corrientes de malla también estarán multiplicadas por el mismo factor K.

Superposición

La consecuencia más importante de la linealidad es la superposición o el Principio de Superposición.

Consideremos el siguiente circuito, en el que los valores reales de las fuentes de voltaje se dejan sin especificar. Utilizaremos esta red para examinar a profundidad el concepto de superposición.

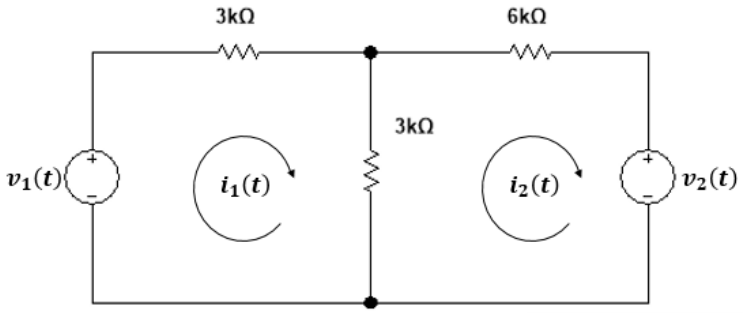

Figura 3.1. Trayectoria de Malla

Las ecuaciones de malla para esta red son:

$$6ki_1(t) - 3ki_2(t) = v_1(t)$$
$$-3ki_1(t) + 9ki_2(t) = -v_2(t)$$

Resolviendo esas ecuaciones para $i_1(t)$ se obtiene:

$$i_1(t) = \frac{v_1(t)}{5k} - \frac{v_2(t)}{15k}$$

En otras palabras, la corriente $i_1(t)$ tiene un componente debido a $v_1(t)$ y un componente debido a $v_2(t)$. En vista del hecho de que $i_1(t)$ tiene dos componentes, uno debido a cada fuente independiente, examinaremos lo que cada fuente, al actuar por sí sola, contribuye a $i_1(t)$. Para que $v_1(t)$ actúe sola, $v_2(t)$ debe ser cero; en otras palabras, $v_2(t)$ será reemplazada con un corto circuito.

Por tanto, para determinar el valor de $i_1(t)$ debido sólo a $v_1(t)$, empleamos el siguiente circuito y nos referimos al valor de $i_1(t)$ como $i'_1(t)$.

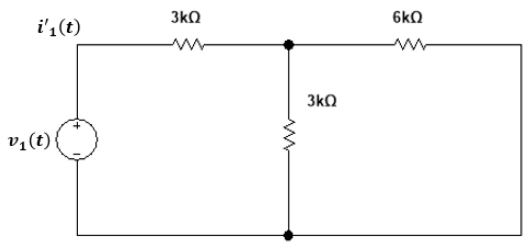

Figura 3.2. Fuente v1 activa

Donde,

$$i'_1(t) = \frac{v_1(t)}{3k + \frac{(3k)(6k)}{3k + 6k}} = \frac{v_1(t)}{5k}$$

Determinemos ahora el valor de $i'_1(t)$ debido a $v_2(t)$ actuando sola, refiriéndonos a este valor como $i''_1(t)$ tal como se muestra en el circuito de la Figura 5.3.

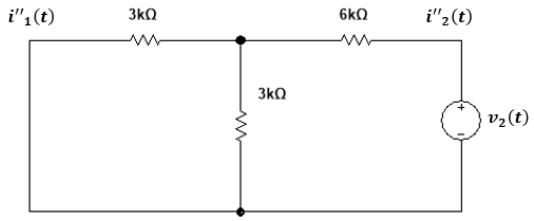

Figura 3.3. Fuente v2 activa

$$i''_2(t) = -\frac{v_2(t)}{6k + \frac{(3k)(3k)}{3k + 3k}} = \frac{-2v_1(t)}{15k}$$

Usando el divisor de corriente obtenemos:

$$i''_1(t) = \frac{-2v_2(t)}{15k}\left(\frac{3k}{3k + 3k}\right) = \frac{-v_2(t)}{15k}$$

Ahora, si sumamos los valores de $i'_1(t)$ y $i''_1(t)$, obtenemos el valor calculado directamente, es decir,

$$i'_1(t) = i'_1(t) + i''_1(t) = \frac{v_1(t)}{5k} - \frac{v_2(t)}{15k}$$

Lo que se ha demostrado es que es cierto en general para circuitos lineales y es un resultado directo de la propiedad de linealidad. *El principio de superposición* establece que:

> "En un circuito lineal que contiene múltiples fuentes independientes, la corriente o el voltaje en cualquier punto de la red puede calcularse como la suma algebraica de las contribuciones individuales de cada fuente al actuar sola."

Por lo tanto, si hay *N* fuentes independientes, debemos realizar *N* experimentos, cada uno de los cuales tiene sólo una de las fuentes independientes activas y las demás inactivas. Tampoco hay ninguna razón para que una fuente independiente asuma solamente el valor dado o un valor cero en los diversos experimentos; solamente si es necesario para que la suma de los distintos valores sea igual al valor original. Sin embargo, una fuente inactiva casi siempre conduce al circuito más simple.

Cuando se determina la contribución debida a una fuente independiente, cualesquiera fuentes de voltaje restantes quedan en cero al reemplazarlas con cortocircuitos, y cualesquiera fuentes de corriente restantes quedan en cero reemplazándolas con circuitos abiertos.

Una de las aplicaciones más frecuentes del teorema de superposición es en sistemas electrónicos donde los análisis de C.D. (Corriente Directa) y C.A. (Corriente Alterna) se tratan de manera separada y la solución es la suma de los dos.

Ejemplo 3.1

1) Aplique superposición para hallar V_0 en la figura 3.4

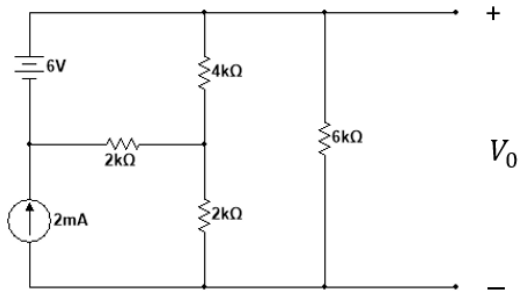

Figura 3.4 Circuito para el ejemplo

Solución

Dejando activa la fuente de 6V.

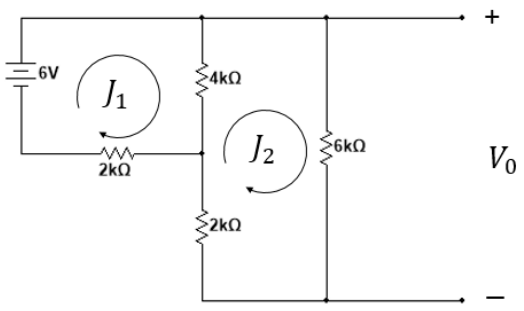

Figura 3.5 Circuito para el ejemplo

Aplicando mallas.

$$Z_{11}J_1 + Z_{12}J_2 = 6V$$
$$Z_{21}J_1 + Z_{22}J_2 = 0$$
$$6K\Omega J_1 - 4K\Omega J_2 = 6$$
$$-4K\Omega J_1 + 12K\Omega J_2 = 0$$

Despejando a J_1 de a).

$$6K\Omega J_1 = 6V + 4K\Omega J_2$$

$$J_1 = \frac{6V + 4K\Omega J_2}{6K\Omega} = 1mA + 0.67\Omega J_2$$

Aplicando el despeje a b).

$$-4K\Omega(1mA + 0.67J_2) + 12K\Omega J_2 = 0$$

$$-4V - 2.63\Omega J_2 + 12K\Omega J_2 = 0$$

$$11997.37\Omega J_2 = 4V$$

$$J_2 = \frac{4V}{11997.37\Omega} = 0.333mA$$

$$\therefore V_0 = 6K\Omega(0.333mA) = 2V$$

Dejando activa la fuente de 2mA.

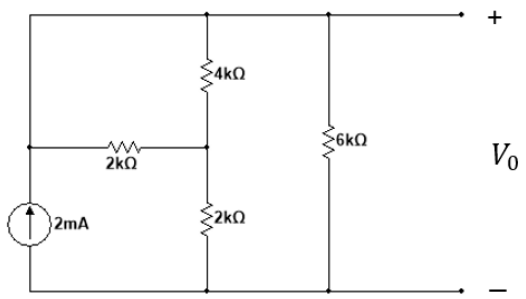

Figura 3.6 Circuito para el ejemplo

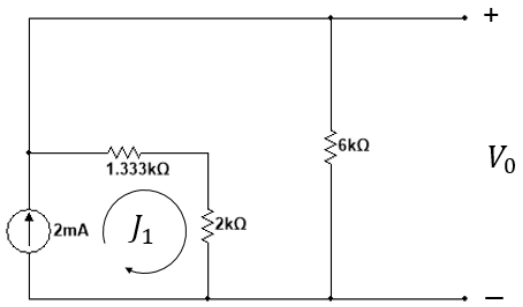

Figura 3.7 Circuito para el ejemplo

Haciendo el paralelo de 2KΩ y 4KΩ.

$$R_{eq} = \frac{2K\Omega(4K\Omega)}{2K\Omega + 4K\Omega} = 1.333K\Omega$$

Aplicando 1KV en la malla 2.

$$-3.333K\Omega J_1 + 9.333K\Omega J_2 = 0; \quad si\ J_1 = 2mA$$
$$-6.67V + 9.333K\Omega J_2 = 0$$
$$J_2 = \frac{6.67V}{9.333K\Omega} = 0.714mA$$
$$V''_0 = 6K\Omega(0.714mA) = 4.28V$$

$$\therefore V_0 = V'_0 + V''_0 = 2V + 4.28V = 6.28V$$

Ejemplo 3.2.

Encuentre I_0 en el siguiente circuito de la Figura 3.8, usando superposición.

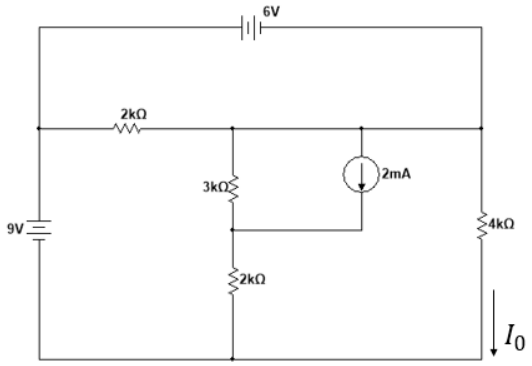

Figura 3.8 Circuito para el ejemplo

Solución

Dejando activa la fuente de 6V.

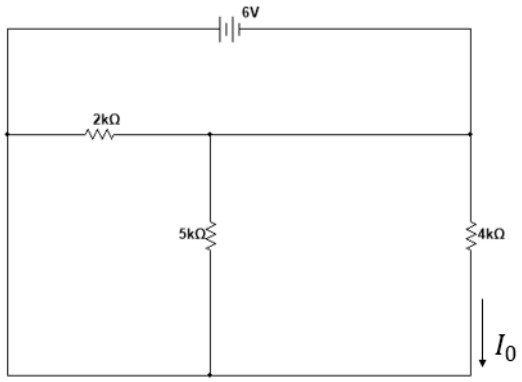

Figura 3.9 Circuito para el ejemplo

Como los resistores están en paralelo.

$$R_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{2K\Omega} + \frac{1}{5K\Omega} + \frac{1}{4K\Omega}} = 1052.6\Omega$$

La corriente de la fuente es:

$$I_S = \frac{6V}{1052.6\Omega} = 5.7mA$$

Por divisor de corriente.

$$I'_0 = \frac{I_S R_{eq}}{R_4} = 5.7mA\left(\frac{1052.6\Omega}{4K\Omega}\right) = 1.5mA$$

Ahora dejando activa la fuente de 9V.

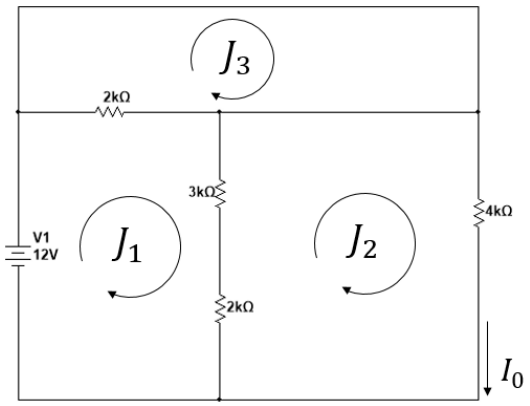

Figura 3.10 Circuito para el ejemplo

Aplicando LKV a cada malla.

a) $7K\Omega J_1 - 5K\Omega J_2 - 2K\Omega J_3 = 0$
b) $5K\Omega J_1 + 9K\Omega J_2 + 0J_3 = 0$
c) $-2K\Omega J_1 + 0J_2 + 2K\Omega J_3 = 0$

De c).

$$J_1 = \frac{-2K\Omega J_3}{-2K\Omega} = J_3$$

De a), despejamos a J_2.

$$-5K\Omega J_2 = -7K\Omega J_1 + 2K\Omega J_3 + 9V$$

$$J_2 = \frac{-7K\Omega J_1 + 2K\Omega J_3 + 9V}{-5K\Omega} = 1.4J_1 - 0.4J_3 - 0.0018$$

Sustituimos en b)

$$-5K\Omega J_1 + 9K\Omega(1.4J_1 - 0.4J_1 - 0.0018) = 0$$
$$-5K\Omega J_1 - 12600 - 3600J_3 - 16.2 = 0$$
$$-5K\Omega J_1 - 3600J_3 = -12583.8$$
$$-2K\Omega J_1 + 2KJ_3 = 0$$
$$-7K\Omega J_1 - 1600J_3 = 12583.8$$
$$-8600J_3 = -12583.8$$
$$J_3 = \frac{-12583.8}{-8600} = 1.46A$$
$$V_{4K} = 9V,\ \ I''_0 = 2.25mA$$

Dejando activa la fuente de 2mA

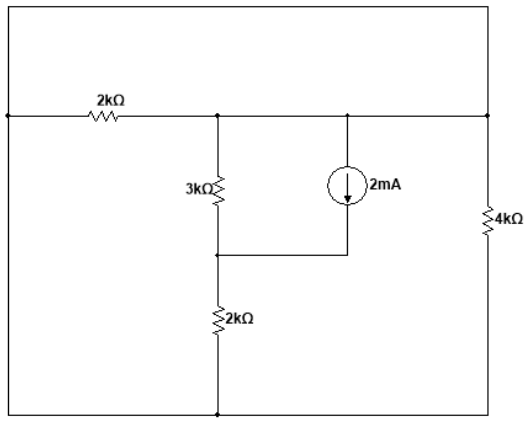

Figura 3.11 Circuito para el ejemplo

Por nodos.

$$I'''_0 = 0A$$

Por lo tanto.

$$I_0 = I''' + I' - I'' = 1.5mA + 0mA - 2.25mA = -0.75mA$$

Ejemplo 3.3

Utilizando el teorema de superposición, encuentre la corriente **I** a través de la reactancia de 4Ω (X_{L2}) de la figura 3.12

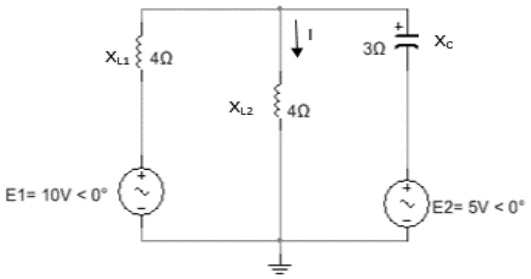

Figura 3.12. Circuito para el ejemplo

Solución

Para el circuito que se volvió a trazar (figura 3.13)

$Z_1 = + j X_{L1} = j\ 4\ \Omega$

$Z_2 = + j X_{L2} = j\ 4\ \Omega$

$Z_3 = - j X_C = -\ j\ 3\ \Omega$

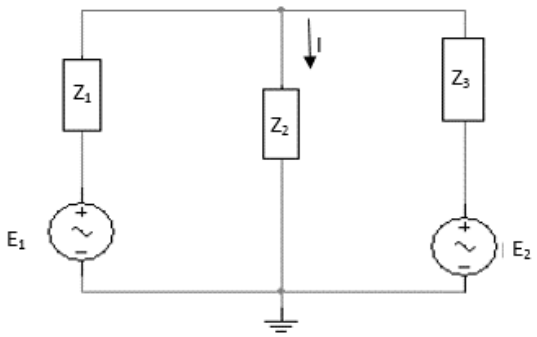

Figura 3. 13. Asignación de las impedancias con subíndice a la red de la figura 3.12

Al considerar los efectos de la fuente de voltaje E_1 (figura 3.14) tenemos:

$$Z_{2||3} = \frac{Z_2 Z_3}{Z_2 + Z_3} = \frac{(j\ 4\ \Omega)(-j\ 3\ \Omega)}{j\ 4\ \Omega - j\ 3\ \Omega} = \frac{12\ \Omega}{j} = -\ j\ 12\ \Omega$$

$$= 12\ \Omega \angle -90°$$

$$I_{S1} = \frac{E_1}{Z_{2||3} + Z_1} = \frac{10V \angle 0°}{-\ j\ 12\ \Omega + j\ 4\ \Omega} = \frac{10V \angle 0°}{8\ \Omega \angle -90°} = 1.25\ A \angle 90°$$

$$I' = \frac{Z_3 I_{S_1}}{Z_2 + Z_3} \qquad \text{(regla del divisor de corriente)}$$

$$= \frac{(-j\,3\,\Omega)(j\,1.25\text{ A})}{j\,4\,\Omega - j\,3\,\Omega} = \frac{3.75\text{ A}}{j\,1} = 3.75\text{ A} \angle -90°$$

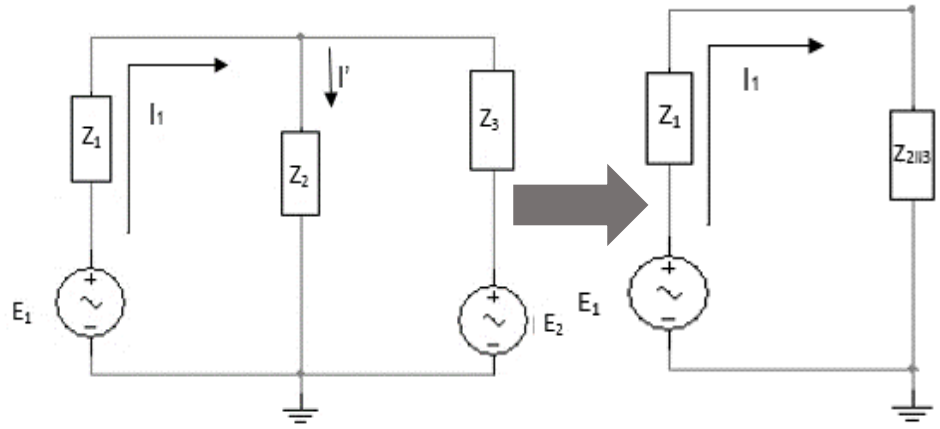

Figura 3.14. Determinación del efecto de la fuente de voltaje E2 sobre la corriente I de la red de la figura 3.13

Al considerar los efectos de la fuente de voltaje E_2 (figura 3.15) tenemos:

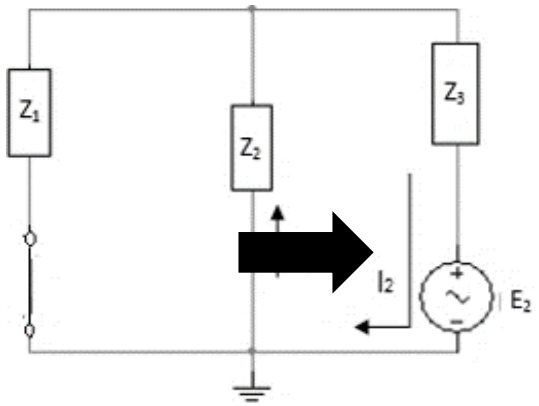

Figura 3.15. Determinación del efecto de la fuente de voltaje E2 sobre la corriente I de la red de la figura 3.13

$$Z_{1||2} = \frac{Z_1}{N} = \frac{j\,4\,\Omega}{2} = j\,2\,\Omega$$

$$I_{S2} = \frac{E_2}{Z_{1||2} + Z_3} = \frac{5\text{V} \angle 0°}{j\,2\,\Omega - j\,3\,\Omega} = \frac{5\text{V} \angle 0°}{1\,\Omega \angle -90°} = 5\text{ A} \angle 90°$$

$$I'' = \frac{I_{S_2}}{2} = 2.5\text{ A} \angle 90°$$

La corriente resultante a través de la reactancia de 4 Ω X_{L2} (figura 3.5) es:

$$I = I' - I''$$

$$= 3.75\ A \angle -90° - 2.5\ A \angle 90° = -j\,3.75\ A - j\,2.5\ A$$

$$= -j\,6.25\ A$$

$$I = 6.25\ A \angle -90°$$

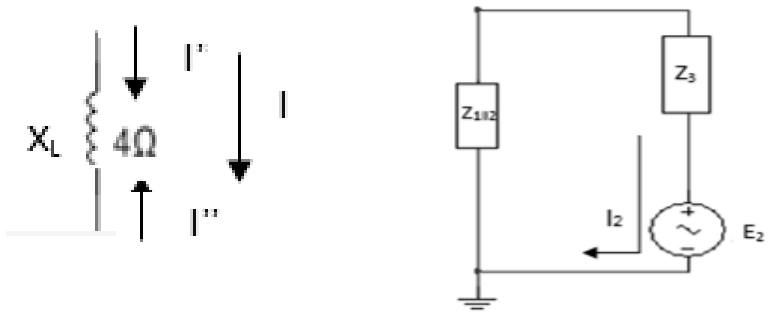

Figura 3. 16. Determinación de la corriente resultante para la red de la figura 3.13

3.2 Teorema de Intercambio de Fuentes

Debemos tener en cuenta que las fuentes reales son diferentes a las *ideales*, que son con las que hemos trabajado hasta el momento, estas no entregan un voltaje o corriente constante.

Las fuentes reales contienen resistencia interna, y esta no es accesible al usuario. En general se quiere minimizar el valor de estas resistencias debido a que consumen potencia.

Una representación más correcta de una fuente real se puede observar en la Figura 3.17 (a) y la Figura 3.17 (b).

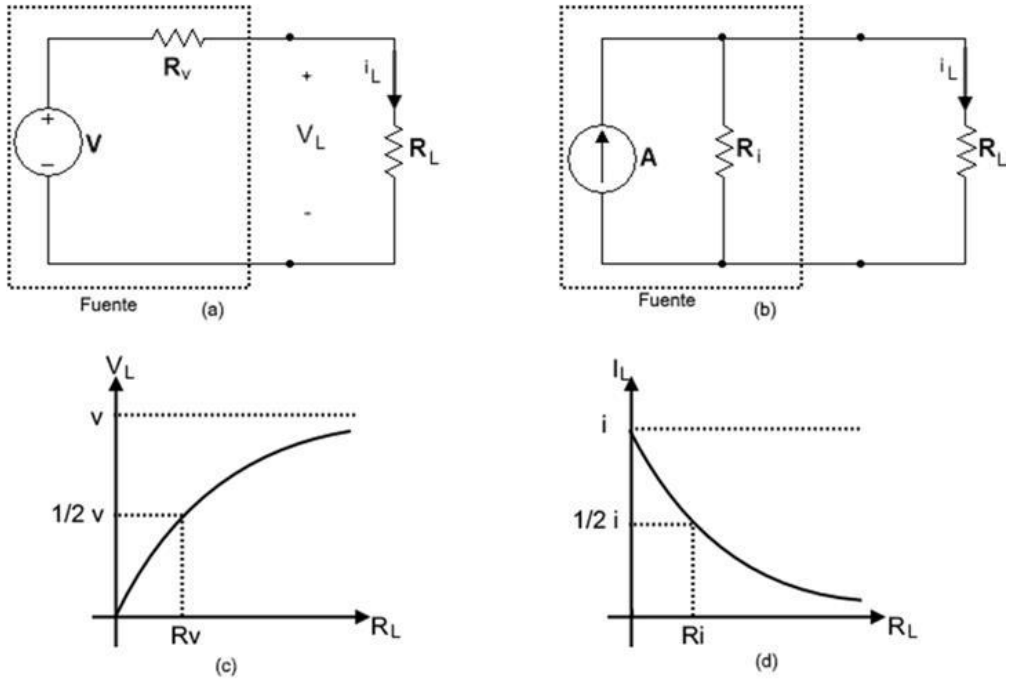

Figura 3.17. Efecto de la resistencia interna en fuentes de voltaje y de corriente reales

Las gráficas (c) y (d) de la 3.17 ilustran el efecto de la resistencia interna de la fuente de voltaje y corriente, respectivamente.

Con esto, podemos deducir que es posible intercambiar un modelo de fuente por otro, es decir, intercambiar una fuente de voltaje por una de corriente y viceversa, con tal de que estas sean equivalentes.

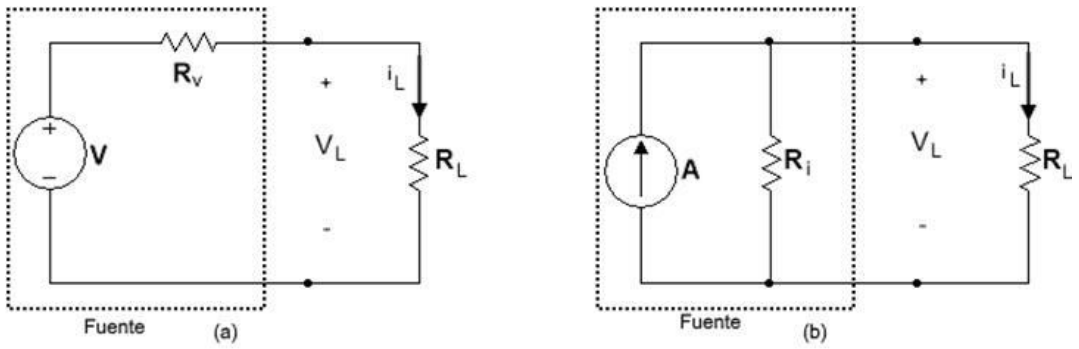

Figura 3. 18. Circuitos utilizados para determinar las condiciones para un intercambio de fuentes

Si analizamos los circuitos presentados en la figura 3.18 y queremos determinar las condiciones requeridas para que ambas fuentes sean equivalentes, debemos examinar las condiciones terminales de cada una.

Para la red de la figura 3.18 (a):

$$A = i_L + \frac{v_L}{R_i}$$

$$AR_i = R_i i_L + v_L$$

Para la red de la figura 3.18 (b):

$$v = i_L R_v + v_L$$

Para que las dos redes sean equivalentes, sus condiciones terminales deben ser idénticas:

$$v = AR_i \text{ y } R_i = R_v$$

Las relaciones especificadas en la ecuación anterior y en la Figura 3.18 son muy importantes, ya que dan paso al método de transformación de fuentes.

Esto significa que si tenemos una fuente de corriente A en paralelo con una resistencia R, podemos reemplazar esta combinación por una fuente de voltaje de valor $v = AR$ en serie con la resistencia R. Lo inverso también es válido, es decir, una fuente de voltaje v en serie con una resistencia R puede reemplazarse por una fuente de corriente de valor $A = \frac{v}{R}$ en paralelo con la resistencia R. El circuito no cambia, salvo en esas transformaciones.

Cabe señalar que los circuitos en la figura 3.18 ***sólo son equivalentes en los nodos externos*** a la fuente.

Ejemplo 3.4 Encontrar I_0 aplicando transformación de fuente de la figura 3.19.

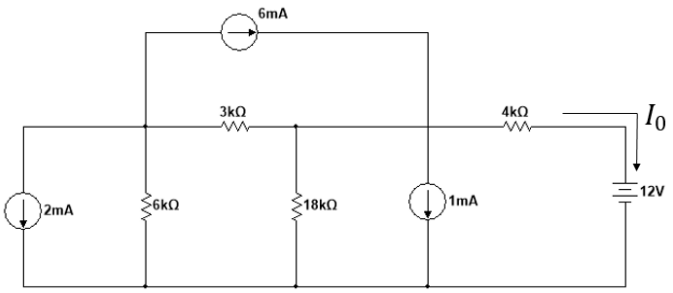

Figura 3.19. Circuito para el ejemplo

Solución

Primeramente, se transforma la fuente de 2mA y el resistor de 6KΩ, además de la fuente de 1mA con el resistor de 18KΩ.

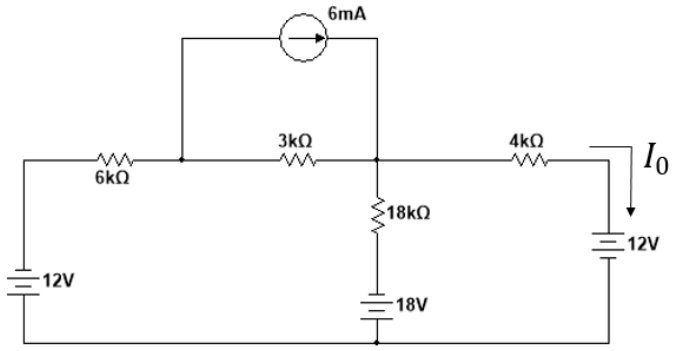

Figura 3.20. Circuito con la fuente de 2mA, 1mA transformada

Transformamos ahora la fuente de 6mA con el resistor de 3KΩ.

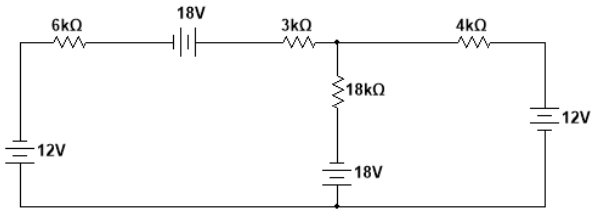

Figura 3.21. Circuito transformando la fuente de 6mA

Simplificamos las fuentes y resistores.

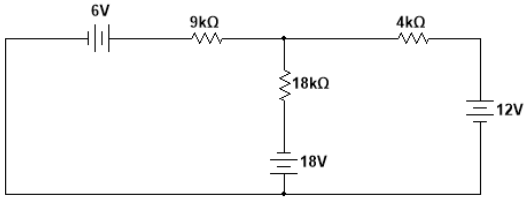

Figura 3.22. Simplificación del circuito

Transformamos las fuentes de 6V con 9KΩ, y la de 18V con 18KΩ.

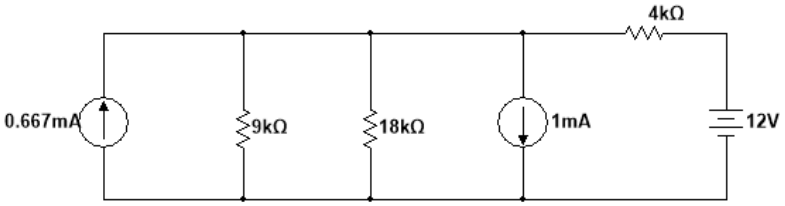

Figura 3. 23. Transformación de las fuentes de voltaje

Reducimos fuentes de corriente y resistores.

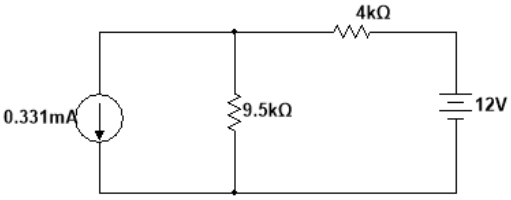

Figura 3.24. Reducción del circuito

Se transforma la fuente de corriente con el resistor de 9.5KΩ.

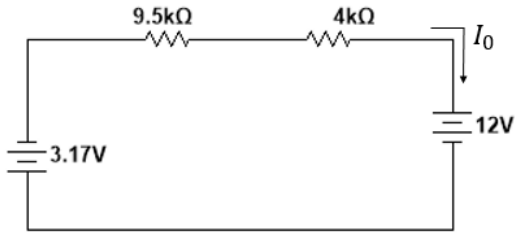

Figura 3.25. Circuito resultante

Finalmente $I_0 = \frac{12V+3.17V}{9.5K\Omega+4K\Omega} = \frac{15.17V}{13.5K\Omega} = -1.12mA.$

3.3 Teorema de Thevenin

El Teorema de Thevenin establece lo siguiente:

Cualquier red bilateral lineal de CD de dos terminales puede sustituirse con un circuito equivalente formado por una fuente de voltaje y un resistor en serie.

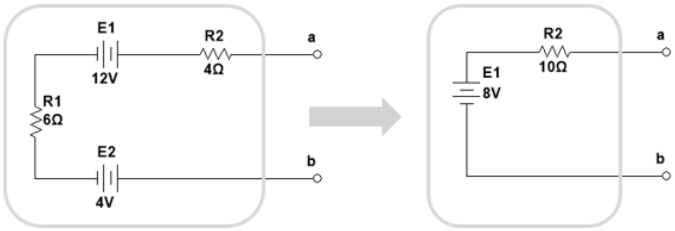

Figura 3.26. Efecto de la aplicación del Teorema de Thevenin

Figura 3.27. (Izquierda) Circuito dividido en dos partes (A y B). (Derecha) Circuito A reemplazado por su circuito equivalente de Thevenin.

En la figura 3.27, el circuito A es reemplazado por su circuito equivalente de Thevenin, el cual consiste en una fuente ideal de voltaje en serie con un resistor, al hacer el reemplazo no cambia el voltaje o corriente de ningún elemento del circuito B.

La siguiente secuencia de pasos conducirá al valor adecuado de R_{Th} y E_{Th}

1. Elimine de la red la parte para la cual se encontrará el circuito equivalente de Thevenin, es decir, elimine el resistor R_L temporalmente de la red.
2. Marque las terminales de la red restante de dos terminales.
3. Calcule R_{Th} haciendo primero todas las fuentes cero (las fuentes de voltaje se sustituyen con cortocircuitos y las fuentes de corriente con circuitos abiertos) y después encontrando la resistencia resultante entre las dos terminales marcadas).
4. Calcule E_{Th} regresando primero todas las fuentes a su posición original y encontrando el voltaje de circuito abierto entre las terminales marcadas.
5. Dibuje el circuito equivalente de Thevenin con la parte del circuito que se eliminó antes conectada entre las terminales del circuito equivalente. Este paso indica con la conexión del resistor R_L entre las terminales del circuito equivalente de Thevenin.

Ejemplo 3.5

Encuentre el circuito de Thevenin para la red de la figura 3.28.

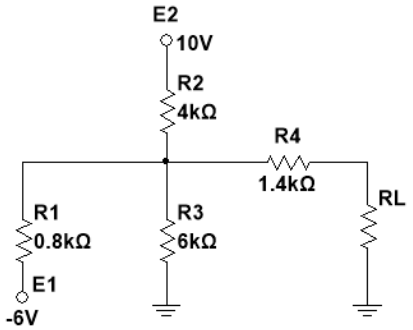

Figura 3.28. Circuito para el ejemplo

Solución:

Aplicando los pasos 1 y 2 se redibuja el circuito (eliminando R_Ly marcando las terminales restantes).

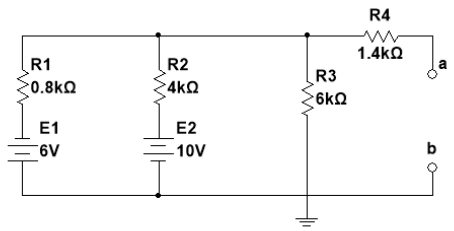

Figura 3.29. Aplicación del paso 1 y 2

En el paso 3 se deben sustituir las fuentes por cortos circuitos.

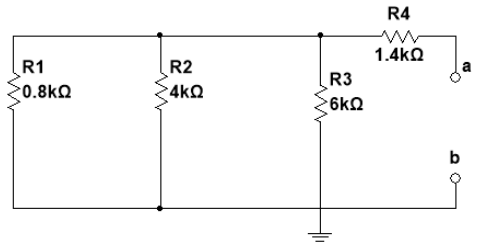

Figura 3.30. Aplicación del paso 3

Resolvemos para obtener R_{Th}

$$
\begin{aligned}
R_{Th} &= R_4 + (R_1||R_2||R_3) \\
&= 1.4\ k\Omega + (0.8\ k\Omega||4k\Omega||6k\Omega) \\
&= 1.4\ k\Omega + (0.8\ k\Omega||2.4\ k\Omega) \\
&= 1.4\ k\Omega + 0.6k\Omega = 2\ k\Omega
\end{aligned}
$$

En el paso 4, se aplica superposición, primero consideramos los efectos de la fuente de Voltaje E_1.

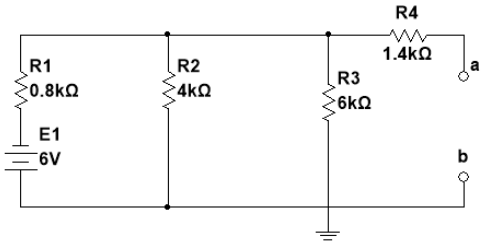

Figura 3.31. Aplicación del paso 4

El circuito abierto requiere que $V_4 = I_4 R_4 = (0)R_4 = 0V$

$$\text{Y,}\ \ E'_{Th} = V_3$$

$$R'_T = R_2 || R_3 = 4k\Omega || 6k\Omega = 2.4k\Omega$$

Aplicando la regla divisora de voltaje.

$$V_3 = \frac{R'_T E_1}{R'_T + R_1} = \frac{(2.4k\Omega)(6V)}{2.4k\Omega + 0.8\ k\Omega} = \frac{14.4\ V}{3.2} = 4.5\ V$$

Ahora, consideremos la fuente E_2.

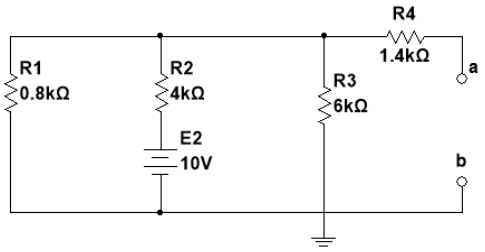

Figura 3.32. Dejando activa la fuente E2

$$E''_{Th} = V_3$$

$$R'_T = R_1 || R_3 = 0.8k\Omega || 6k\Omega = 0.706k\Omega$$

$$y, \qquad V_3 = \frac{R'_T E_2}{R'_T + R_2} = \frac{(0.706k\Omega)(10V)}{706k\Omega + 4\ k\Omega} = \frac{7.06\ V}{4.706} = 1.5V$$

Y puesto que E'_{Th} y E''_{Th} tienen polaridades opuestas,

$$E_{Th} = E'_{Th} - E''_{Th}$$
$$= 4.5\ V - 1.5\ V = 3V$$

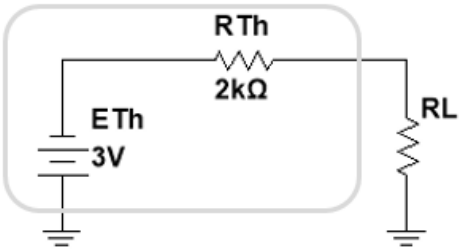

Figura 3. 33. Circuito equivalente de Thevenin

El teorema de Thevenin, según se estableció para los circuitos senoidales de C.A., se modifica sólo para incluir el término impedancia en lugar de resistencia; es decir.

Cualquier red de C.A. lineal de dos terminales podrá ser reemplazada con un circuito equivalente que conste de una fuente de voltaje y una impedancia en serie, como se muestra en la figura 9.17

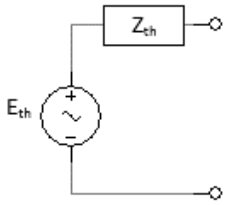

Figura 3. 34. Circuito equivalente de Thevenin para redes de C.A.

Dado que las reactancias de un circuito dependen de la frecuencia, el circuito de Thevenin para una red particular será aplicable sólo a una frecuencia.

Los pasos requeridos para aplicar este método a los circuitos de C.D. se repiten con modificaciones para los circuitos senoidales de C.D. Como antes, el único cambio es el reemplazo del término resistencia por impedancia. Nuevamente, las fuentes dependientes e independientes serán tratadas de manera separada.

Fuentes independientes

1. Elimine la parte de la red en la cual se obtendrá el circuito equivalente de Thevenin.
2. Marque las terminales de la red restante de dos terminales.
3. Calcule Z_{Th} estableciendo primero todas las fuentes de voltaje y de corriente en cero (corto circuito y circuito abierto, respectivamente) y calculando luego la impedancia resultante entre las dos terminales marcadas.
4. Calcule E_{Th} reemplazando primero las fuentes de voltaje y de corriente y calculando luego el voltaje de circuito abierto entre las terminales marcadas.
5. Trace el circuito equivalente de Thevenin con la parte del circuito previamente eliminado reemplazada entre las terminales del circuito equivalente de Thévenin.

Ejemplo 3.6

Encuentre el circuito equivalente de Thevenin para la red externa al resistor R en la figura 3.35.

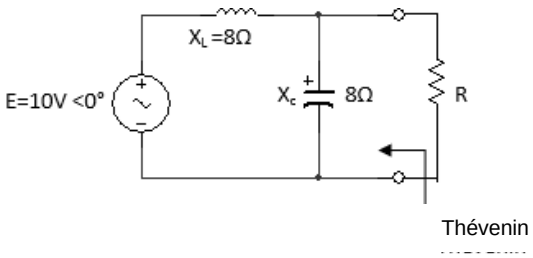

Figura 3.35. Circuito

Solución

Los pasos 1 y 2 (figura 3.36)

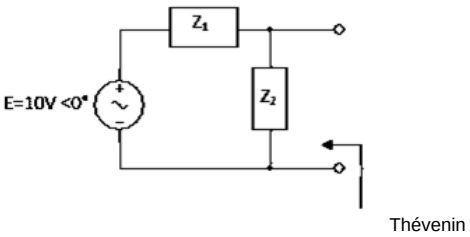

Figura 3.36. Asignación de las impedancias con subíndice a la red de la figura 3.35

$Z_1 = j\,X_L = j\,8\ \Omega \qquad Z_2 = -\,j\,X_C = -\,j\,2\ \Omega$

Paso 3 (figura 3.37):

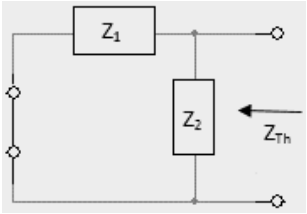

Figura 3.37. Determinación de la impedancia de Thevenin para la red de la figura 3.36

$$Z_{Th} = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{(j\,8\,\Omega)(-\,2\,\Omega)}{j\,8\,\Omega - j\,2\,\Omega} = \frac{-\,j2\,16\,\Omega}{j\,6} = \frac{16\,\Omega}{6\angle 90°}$$

$$= 2.67\ \Omega \angle\ -90°$$

Paso 4:

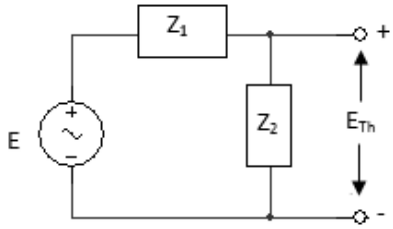

Figura 3. 38. Determinación del voltaje de Thevenin de circuito abierto para la red de la figura 3.36

$$E_{Th} = \frac{Z_2 E}{Z_1 + Z_2} \qquad \text{(regla del divisor de voltaje)}$$

$$= \frac{(-\,j\,2\,\Omega)(10\ V)}{j\,8\,\Omega - j\,2\,\Omega} = \frac{-\,j\,20\ V}{j\,6} = 3.33\ V \angle\ -180°$$

Paso 5: El circuito equivalente de Thevenin

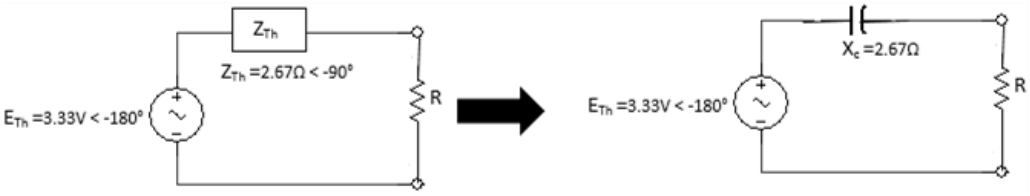

Figura 3.39. Circuito equivalente de Thevenin para la red de la figura 3.36

3.4 Teorema de Norton

Se sabe que cada fuente de voltaje con una resistencia interna en serie posee una fuente de corriente equivalente. El equivalente de la fuente de corriente de la red de Thevenin es dado por el siguiente circuito y se determina mediante el Teorema de Norton.

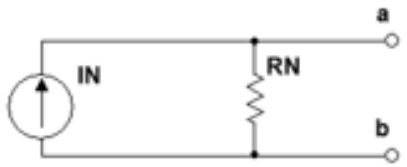

Figura 3.40. Circuito equivalente de Norton

El análisis del teorema de Thevenin con respecto al circuito equivalente también se aplica al circuito equivalente de Norton. Ahora se listan los pasos que conducen a los valores adecuados de I_N y R_N

1. Elimine de la red la parte para la que se encontrará el circuito equivalente de Norton.
2. Marque las terminales de la red restante de dos terminales.
3. Calcule R_N haciendo primero todas las fuentes cero (las fuentes de voltaje se sustituyen con cortocircuitos y las fuentes de corriente con circuitos abiertos) y después encontrando la resistencia resultante entre las dos terminales marcadas. (Si la resistencia interna de las fuentes de voltaje y/o corriente se incluye en la red original, debe permanecer cuando las fuentes se hagan cero.) Debido a que $R_N = R_{Th}$, el procedimiento y valor obtenidos usando la técnica descrita para el teorema de Thevenin determinarán el valor adecuado de R_N.
4. Calcule I_N regresando primero todas las fuentes a su posición original y después encontrando la corriente de cortocircuito entre las terminales marcadas.
5. Dibuje el circuito equivalente de Norton con la parte del circuito que se eliminó antes conectándola entre las terminales del circuito equivalente.

Los circuitos equivalentes de Norton y de Thevenin se encuentran uno a partir de otro usando la transformación de fuentes.

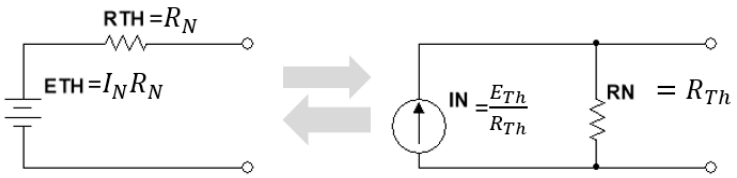

Figura 3. 41. Conversión entre los circuitos equivalentes de Thevenin y de Norton

Ejemplo 3.7

Encuentre el circuito equivalente de Norton para la siguiente red:

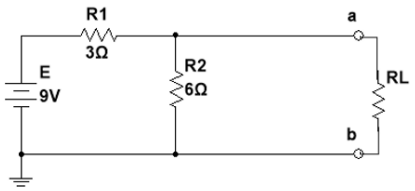

Figura 3. 42. Circuito para el ejemplo 3.5

En el paso 1 y 2, se identifican las terminales de interés para obtener el equivalente de Norton.

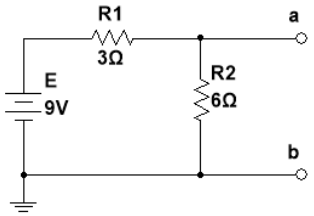

Figura 3.43. Determinación del paso 1 y 2

En el paso 3, se cambian las fuentes de voltaje por cortocircuito.

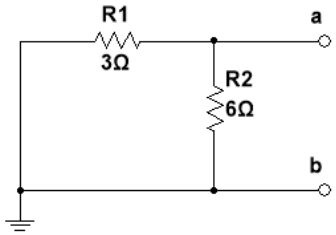

Figura 3. 44. Determinación del paso 3

De este modo se obtiene R_N,

$$R_N = R_1||R_2 = 3\Omega||6\Omega = \frac{(3\Omega)(6\Omega)}{3\Omega + 6\Omega} = \frac{18\Omega}{9} = 2\Omega$$

En el paso 4 se reconecta el corto circuito entre las terminales a y b, está en paralelo con R_2 y elimina su efecto, por tanto I_N es la misma que pasa por R_1 y el voltaje completo de la batería aparece a través de R_1, dato que:

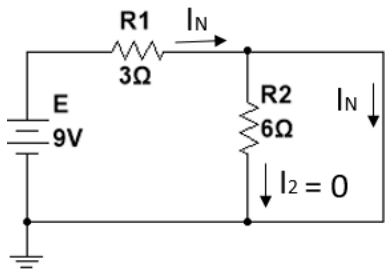

Figura 3. 45. Determinación del paso 4

$$V_2 = I_2R_2 = (0)6\Omega = 0\text{V}$$

Por tanto,

$$I_N = \frac{E}{R_2} = \frac{9V}{3\Omega} = 3A$$

Finalmente observamos que el circuito obtenido es igual al primero que se consideró desarrollando el teorema de Thévenin.

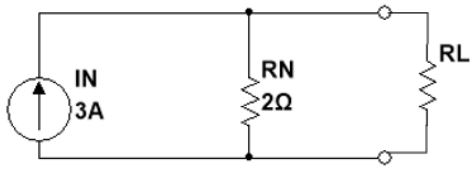

Figura 3. 46. Sustitución del circuito equivalente de Norton por la red externa al resistor RL

3.5 Teorema de Máxima Transferencia de Potencia

El Teorema de la Máxima Transferencia de Potencia establece:

> *"Una carga recibirá una potencia máxima de una red bilateral lineal de corriente directa cuando su valor total resistivo sea exactamente igual a la resistencia de Thevenin de la red, de acuerdo con la forma en la que se toma la carga."*

Se usa para determinar la máxima potencia que puede ser entregada a una carga. Empleando el Teorema de Thevenin, podemos determinar la potencia máxima que un circuito puede suministrar, y la forma en la cual ajustar la carga para efectuar la transferencia de potencia máxima.

"Una fuente de voltaje independiente en serie con una resistencia R_s, o una fuente independiente de corriente en paralelo con una resistencia R_s, lleva una potencia máxima a una resistencia de carga R_L tal que $R_L = R_s$."

Ejemplo 3.8

Encontrar el valor de R_L para la máxima transferencia de potencia del circuito de la figura 3.47, encontrar la máxima potencia.

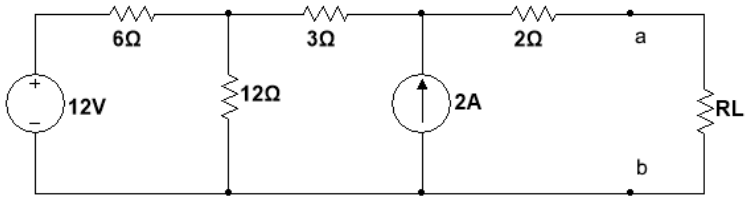

Figura 3.47. Circuito para el ejemplo

Solución

Se encuentra la R_{TH} y V_{TH} en las terminales $a - b$:

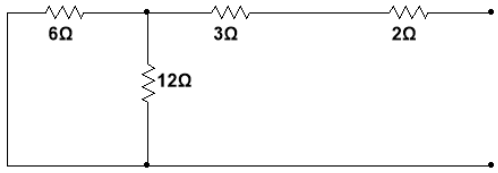

Figura 3.48. Circuito para encontrar el equivalente de Thevenin

$$R_{TH} = 5 + \frac{6(12)}{18} = 9\Omega$$

Para obtener V_{TH} se considera el siguiente circuito:

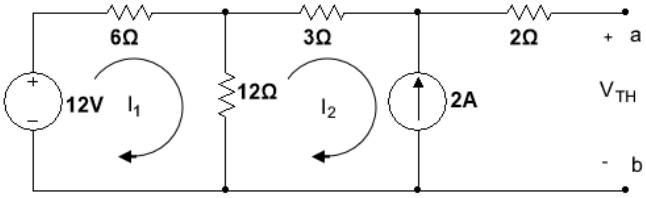

Figura 3.49. Obtención de VTH

Se aplica análisis de malla:

$$-12 + 18i_1 - 12i_2 = 0$$
$$i_2 = -2A$$
$$i_1 = -\frac{2}{3}A$$

Para obtener V_{TH}

$$-12 + 6i_1 + 3i_2 + (2)(0) + V_{TH} = 0$$
$$V_{TH} = 22v$$

Para la máxima transferencia de potencia:

$$R_L = R_{TH} - 9\Omega$$

Y la máxima potencia, es:

$$P_{MAX} = \frac{V_{TH}^2}{4R_L} = \frac{22^2}{4(9)} = 13.44W$$

Bibliografía

Boylestad, Robert L. Análisis Introductorio de Circuitos. Prentice Hall. México 1998, 1168 pags.
ISBN 970-17-0184-4

Dorf, Richard C. Circuitos Eléctricos. Alfaomega. México 2003, 864 pags.
ISBN 970-15-0855-6

Hayt, William H. Jr. Análisis de Circuitos en Ingeniería. Mc Graw Hill. México 2007, 856 pags.
ISBN 970-10-6107-1

Irwin, J David. Análisis Básico de Circuitos en Ingeniería. Limusa Wiley. México 1997, 696 pags.
ISBN 968-880-816-4