INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL

ESCUELA SUPERIOR DE COMPUTO

APUNTES DEL CURSO DE ECUACIONES DIFERENCIALES

César Román Martínez García

Ciudad, D.F., México Febrero de 2018

ÍNDICE GENERAL

ÍNDICE GENERAL **iii**

1 Introducción a las Ecuaciones Diferenciales **1**

1.1 Introducción 3

1.2 Definicion de ecuación diferencial 3

1.3 Clasificación de ecuaciones ordinarias y parciales 4

1.4 Solución de una ecuacion diferencial 5

1.5 Problema de valor inicial y de frontera 11

1.6 Teorema de existencia y unicidad 13

2 Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden **17**

2.1 Método de separación de variables 17

2.2 Ecuaciones algebraicas de grado homogéneo 24

2.3 Ecuaciones diferenciales homogéneos 26

2.4 Ecuaciones diferenciales exactas 29

2.5 Factor integrante 33

2.6 La ecuación diferencial lineal de primer orden 39

2.7 La ecuación de Bernoulli 42

3 Ecuaciones Diferenciales Lineales de Segundo Orden y Orden Superior **47**

3.1 Ecuaciones diferenciales lineales de orden superior 49

3.2 Teoría de las ecuaciones lineales homogéneas de segundo orden 50

3.3 Solución general de ecuaciones diferenciales lineales homogéneas de orden n 50

3.4 Ecuaciones diferenciales lineales homogéneas de orden n con coeficientes constantes . . . 52
3.5 Ecuaciónes diferenciales lineales no homogénea de orden n . . . 53
3.6 Métodos de coeficientes indeterminados . . . 53
3.7 Aplicaciones a circuitos eléctricos en serie RCL . . . 56
3.8 Ecuación de Euler-Cauchy o ecuación equidimensional . . . 71

4 Transformada de Laplace 73
4.1 Definición de la Transformada de Laplace . . . 73
4.2 Teorema de traslación y derivadas de una transformada . . . 98
4.3 Transformadas de derivads, integrales y funciones periódicas . . . 104
4.4 Transformada inversa . . . 111
4.5 Fracciones parciales y linealidad . . . 117
4.6 Algunas transformadas comunes . . . 119
4.7 Aplicaciones de la transformada de Laplace . . . 120
4.7.1 Raíces reales y diferentes . . . 130
4.7.2 Raíces reales dobles . . . 131

5 Solución de Ecuaciones Diferenciales Lineales Usando Series de Potencias 133
5.1 Introducción al uso de la series . . . 133
5.2 Empleo de una serie de potencias centradas en el origen para resolver una ecuación diferencial lineal . . . 134
5.3 Bibliografía . . . 143

CAPITULO 1

Introducción a las Ecuaciones Diferenciales

SIMPLICIDAD DE LA MATEMÁTICA

"Existe una opinión muy generalizada según la cual la matemática es la ciencia más difícil cuando en realidad es la más simple de todas. La causa de esta paradoja reside en el hecho de que, precisamente por su simplicidad, los razonamientos matemáticos equivocados quedan a la vista. En una compleja cuestión de política o arte, hay tantos factores en juego y tantos desconocidos o inaparentes, que es muy difícil distinguir lo verdadero de lo falso. El resultado es que cualquier tonto se cree en condiciones de discutir sobre política y arte, y en verdad lo hace, mientras que mira la matemática desde una respetuosa distancia". *Ernesto Sabato*

Las ecuaciones diferenciales aparecen en casi todos los modelos matemáticos de algún fenómeno natural. Por ejemplo, la ecuación más importante de la Mecánica Clásica, la segunda ley de Newton $F = ma$, es una ecuación diferencial disfrazada lo cual implica que básicamente en todos los problemas de la mecánica aparecerá una ecuación diferencial por resolver, aún cuando en algunos casos es tan sencilla que no se reconozca como tal. De hecho, en cualquier problema en que una cantidad física esté involucrada con una alguna variación de tal cantidad va a aparecer una ecuación diferencial.

La primera parte del curso se dedica exclusivamente a la resolución de tales ecua-

ciones diferenciales usando varios métodos clásicos. Lamentablemente, la cantidad de ecuaciones que pueden resolverse con tales métodos es bastante pequeña, es importante tener presente qué condiciones garantizan que un problema que involucre ecuaciones diferenciales va a tener solución única, pues tal unicidad generalmente se interpreta como la presencia de causalidad o determinismo en el sistema. La segunda parte del curso sigue dedicado a la resolución de ecuaciones diferenciales, sin embargo, las ecuaciones a las que se dedican, que son las lineales, son tan importantes que merecen su propio estudio. Desde el punto de vista teórico, tales ecuaciones cuentan con muchas propiedades matemáticas importantes, por ejemplo, el principio de superposición y la descomposición de la solución como una parte homogénea y no homogénea de la ecuación. Además, tales ecuaciones y sus parientes cercanos, que son los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales, son analizables en gran parte con la ayuda del Álgebra Lineal y el cálculo de valores y vectores propios revelan mucha información sobre las soluciones, por ejemplo, su estabilidad. Dentro del estudio de las ecuaciones lineales aparece la primera generalización del concepto de función que se va a estudiar, que consiste en los operadores diferenciales lineales.

En el tema siguiente apareceran dos generalizaciones adicionales del concepto de función. El primero va a ser la idea de una función generalizada, que básicamente es una "función"que puede tomar valores infinitos, siempre y cuando lo haga bajo reglas estrictas. Con las funciones generalizadas es posible extender muchas técnicas del cálculo, por ejemplo, hallar la derivada de una función en un punto de discontinuidad o aplicar un impulso instántaneo a una partícula. El representante más importante de las funciones generalizadas es la delta de Dirac. La otra generalización de función es el concepto de transformada, que se interpretará como enviar una función de un espacio a otro. La transformada que se estudiará es la de Laplace, que como se verá luego toma una función o señal del dominio temporal en el dominio de frecuencia. La Transformada de Laplace es una de las técnicas más eficientes para resolver los llamados linear time invariant system, y a partir del teorema de convolución tales sistemas están resueltos en el momento que se halle la llamada función de transferencia del sistema.

Siguiendo con la misma línea de resolver ecuaciones diferenciales, otra técnica clásica es el método de solución por medio de series. Este método tiene la ventaja de que per-

mite hallar soluciones a ecuaciones más complicadas siempre y cuando los coeficientes de la ecuación sean analíticos, es decir, expresables como series de potencias. Incluso en el caso en que no sean los coeficientes analíticos, el método de Frobenius se encarga de resolver algunas casos en los que falla la analiticidad.

1.1 Introducción

Una ecuación diferencial es aquella que relaciona las variables independientes con la variable dependiente y sus derivadas con respecto a una o más variables independientes. Las ecuaciones diferenciales juegan un papel fundamental tanto en la propia Matemática como en otras ciencias como la Física, Química, Economía, Biología, etc. Si $y = f(x)$ es una función dada, su derivada respecto de la variable independiente x se puede interpretar como el ritmo de cambio de la variable y respecto de la variable x. Por ejemplo, es bastante usual que en un proceso económico, las variables involucradas y sus ritmos de variación estén relacionados entre sí por medio de los principios económicos que gobiernan dicho proceso. Al expresar tal conexión en términos matemáticos el resultado es, con frecuencia, una ecuación diferencial. A diferencia de las ecuaciones algebraicas, en una ecuación diferencial la incógnita es una función (en ocasiones del tiempo), no un número. Una ecuación diferencial es aquélla que relaciona una o varias variables independientes, una función de dichas variables (que es la función incógnita) y las derivadas de dicha función hasta un cierto orden.

1.2 Definicion de ecuación diferencial

Se llama ecuación diferencial a toda ecuación que contiene las derivadas de una o más variables dependientes respecto a una o más variables independientes. Se llama ecuación diferencial ordinaria *(E. D. O.)* a una ecuación diferencial en la que aparecen derivadas ordinarias de una o más variables dependientes respecto a una única variable independiente.

Se llama ecuación diferencial en derivadas parciales *(E. D. P.)* a una ecuación diferencial en la que aparecen derivadas parciales de una o más variables dependientes

respecto a más de una variable independiente.

$$y'' + log(xy) - x = y,$$
$$y^3 + xy' + e^x sinh(y) = 0$$

1.3 Clasificación de ecuaciones ordinarias y parciales

Ecuación diferencial en derivadas parciales. Cuando la función incógnita depende de más de una variable, tendremos una ecuación diferencial en derivadas parciales. Por ejemplo, la ecuación:

$$F(x, y, z(x, y), \frac{\partial z}{\partial x}(x, y), \frac{\partial z}{\partial y}(x, y), \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x, y)) = 0$$

relaciona las variables independientes x, y con la variable dependiente $z(x, y)$ y las derivadas parciales de $z(x, y)$. Un ejemplo de ecuación diferencial en derivadas parciales es

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = kz$$

donde la función incógnita es $z = z(x, y)$.

Ecuación diferencial ordinaria. Cuando la función incógnita depende de una variable, se dice que es una ecuación diferencial ordinaria; esto es, la ecuación:

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x), ..., y^{(n)}(x)) = 0$$

relaciona la variable independiente x con la variable dependiente $y(x)$ y las derivadas hasta orden n de $y(x)$.

Si la ecuación anterior se puede escribir como

$$y^n(x) = f(x, y(x), y'(x), y''(x), ..., y^{(n-1)}(x))$$

donde f es una determinada función definida en un subconjunto de $R^{(n+1)}$, se dice que la ecuación viene dada en su forma normal.

Se llama orden de una ecuación diferencial ordinaria al mayor de los órdenes de las derivadas que aparecen en la ecuación. En el primer tema nos centraremos en el estudio de las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden; esto es, ecuaciones de la forma

$$F(x, y(x), y'(x)) = 0$$

Se llama solución de una ecuación diferencial ordinaria de primer orden

$$F(x, y(x), y'(x)) = 0$$

en el conjunto $D \subseteq R$ a toda función $y = \varphi(x)$ tal que

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x)) = 0$$

para todo $x \in D \subseteq R$.

En general, una ecuación diferencial ordinaria tiene infinitas soluciones pero se suelen tener condiciones, por ejemplo, valores iniciales, que limitan el número de soluciones adecuadas al modelo a estudiar. Llamamos solución general de una ecuación diferencial al conjunto de todas las soluciones. Y se denomina solución particular de una ecuación diferencial a una cualquiera de sus soluciones.

El proceso de obtención de las soluciones de una ecuación diferencial se denomina resolución o integración de la misma.

1.4 Solución de una ecuacion diferencial

Cuando se empezó a desarrollar la teoría de las ecuaciones diferenciales, se trató de hallar soluciones explícitas de tipos especiales de ecuaciones pero pronto se advirtió que sólo unas pocas ecuaciones se podían resolver de esta manera. Sin embargo, en muchos casos no es necesario obtener fórmulas explícitas de las soluciones y basta con poner en relieve las propiedades más relevantes de la solución. La teoría de las ecuaciones diferenciales comprende muchos resultados sobre el comportamiento general de las soluciones. Esto es lo que se llama teoría cualitativa. Sus resultados principales

son los teoremas de existencia y unicidad de solución, los análisis de sensibilidad e investigaciones de estabilidad de equilibrios. Estos temas tienen tanto interés teórico como una gran importancia práctica.

Como vimos las soluciones de una ecuación diferencial en caso de existir no son únicas, sino que dependen de ciertas constantes arbitrarias provenientes de la integración. En general, dada una ecuación diferencial de la forma

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0,$$

las soluciones de la misma pueden escribirse como

$$f(x, y, c_1, ..., c_n) = 0$$

con $c_i \in R,\ i = 1, 2, ..., n$. Así las soluciones de una ecuación diferencial de orden uno generan una *familia n-paramétrica de curvas* en el plano. En el ejemplo anterior, la solución $y(x) = c/cos(x)$ define una familia de curvas en el plano dependiente del valor o parámetro de c. Recíprocamente, a partir de una familia n-paramétrica de curvas definida por la ecuación anterior puede construirse una ecuación diferencial de la manera siguiente. Derivando n veces la ecuación respecto de x obtenemos $n + 1$ ecuaciones de las que, eliminando los parámetros $c_1, c_2, ..., c_n$, obtendremos una ecuación diferencial de orden n dada. Las soluciones obtenidas como familia n-paramétrica de curvas se llaman soluciones generales de la ecuación diferencial. Por ejemplo, si consideramos la familia de las curvas del plano dependiente de dos parámetros dada por la ecuación $y = c_1e^x + c_2e^{-x},\ c_1,\ c_2 \in R$, derivando implícitamente respecto de x tenemos que

$$\begin{aligned} y' &= c_1e^x - c_2e^{-x}, \\ y'' &= c_1e^x + c_2e^{-x} \end{aligned}$$

Despejando c_1 y c_2 y sustituyendo en la primera ecuación tenemos que $y'' = y$ es la ecuación diferencial que define a la familia de curva anteriores. Nótese que es una ecuación de orden dos dado que la familia depende de dos parámetros.

Sin embargo, no siempre es posible la situación anterior. Por ejemplo, la ecuación $y^2 + (y')^2 = -1$ no posee ninguna solución, mientras que $y^2 + (y')^2 = 0$ tiene como única

solución $y(x) = 0$, que no depende de parámetro alguno. Además la ecuación de orden uno $(y'-y)(y'-2y) = 0$ tiene por soluciones a las funciones dadas por la expresión $(y - c_1e^t)(y - c_2e^{2t}) = 0$. Mención aparte merecen aquellas que no aparecen comprendidas en la familia *n-paramétrica*, las llamadas soluciones singulares. Por ejemplo $y' = -2y^{3/2}$ tiene como solución general $y(x) = \frac{1}{(t+c)^2}$ y como solución singular $y(x) = 0$. Nótese que esta definición es ambigua y depende de la familia de curvas al ser $y(x) = C^2/(Cx+1)^2$ una familia uniparamétrica de soluciones de $y' = -2y^{3/2}$ conteniendo la solución nula.

Ejemplo La función $y = \sqrt{4-x^2}$ es solución de la ecuación diferencial ordinaria $y' = -\frac{x}{y}$ para toda $x \in]-2, 2[$.

Derivando la función y obtenemos que

$$y' = -\frac{x}{\sqrt{4-x^2}} = -\frac{x}{y}$$

Ejemplo La función $y = e^{-x} + x - 1$ es solución de la ecuación diferencial $y' + y = x$ para toda $x \in I\!R$.

Derivando la función y y sustituyendo obtenemos que

$$y' + y = -e^{-x} + 1 + e^x + x - 1 = x$$

Ejemplo La función $u(x, y) = \frac{x^3}{3}e^y + 2xe^y - 2x$ es solución de la ecuación diferencial parcial

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} + 2$$

en todo R^2.

Calculando las derivadas parciales

$$\frac{\partial u}{\partial x} = x^2e^y + 2e^y - 2$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = x^2e^y + 2e^y$$

Al sustituir obtenemos una igualdad

$$\frac{\partial u}{\partial x} + 2 = x^2 e^y + 2e^y - 2 + 2 = x^2 e^y + 2e^y = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$$

Recuerde que no toda ecuación diferencial que se nos ocurra tiene solución, por ejemplo, para la ecuación diferencial

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) + y^2 = -1$$

no existe una función real derivable que la satisfaga, pues el lado derecho es negativo y el lado izquierdo positivo. De aquí en adelante vamos a suponer que las soluciones que buscamos son reales y que el intervalo I es el adecuado que permita que la solución tenga sentido.

Ejemplo La función $y^3 - 3x + 3 + 3y = 5$ es una solución de la ecuación $y'' = -2y\,(y')^3$.

Derivando implícitamente con respecto a x, obtenemos

$$3y^2 y' - 3 + 3y' = 0 \Rightarrow y' = \frac{1}{y^2 + 1}$$

Derivando implícitamente de nuevo, para calcular la segunda derivada

$$y'' = -\frac{2yy'}{(y^2+1)^2} = -\frac{2y}{(y^2+1)^3} = -2y(y')^3$$

Hasta este momento hemos visto ejemplos en los cuales la solucióón esta dada en formas explícita o implícita. En los siguientes ejemplos se muestran situaciones un tanto diferentes.

Ejemplo La curva dada en forma paramétrica por

$$\begin{cases} x &= te^t \\ y &= e^{-t} \end{cases}$$

es solución de la ecuación diferencial $(1 + xy)\,y' + y^2 = 0$.

Calculemos y'

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-e^{-t}}{e^t + te^t} = \frac{-e^{-2t}}{1+t}$$

Sustituyendo

$$(1+xy)\,y' + y^2 = (1+t)\,\frac{-e^{-2t}}{1+t} + e^{-2t} = -2e^{-2t} + 2e^{-2t} = 0$$

Ejemplo

La función

$$y = x\int_0^x \frac{Sen(t)}{t}dt + 4$$

es solución de la ecuación diferencial $xy' = y + xSen(x)$.

Observe que para calcular y' debemos usar el teorema fundamental del cálculo1.2

$$y' = \int_0^x \frac{Sen(t)}{t}dt + Sen(x)$$

Sustituyendo

$$xy' = x\left(\int_0^x \frac{Sen(t)}{t}dt + Sen(t)\right) = y + xsen(x)$$

Si la solución de una ecuación diferencial de orden n tiene n constantes diferentes, diremos que dicha solución es la solución general de la ecuación diferencial . Si asignamos valores a algunas o todas esas constantes obtenemos lo que se conoce como una solución particular .

Ejemplo

La familia de curvas $y = ASen(x) + BCos(x)$ es la solución general de la ecuación diferencial $y'' + y = 0$, mientras que $y = 2Sen(x) + 3Cos(x)$ y $y = ASen(x)$ son soluciones particulares.

Algunas veces, a una solución de una ecuación diferencial se le llama integral de la ecuación y a su gráfica curva integral o curva solución. Como la solución general de una ecuación diferencial de orden n tiene n constantes se acostumbra llamarla familia n-paramétrica de soluciones y se denota por $G(x, y, c_1, c_2, \ldots, c_n) = 0$. Esto quiere decir que una ecuación diferencial tiene una cantidad infinita de soluciones que corresponden a la elección ilimitada de esos paramétros.

Ejemplo

La familia de parábolas $y^2 = 2xc - c^2$ es la solución general de la ecuación diferencial $y = 2xy' - y\,(y')^2$.

Derivando implícitamente

$$2yy' = 2c \Rightarrow yy' = c$$

Sustituyendo

$$2xy' - y\,(y')^2 = 2xy' - cy' = y' = \frac{c}{y}\,(2x - c) = \frac{2cx - c^2}{y} = \frac{y^2}{y} = y$$

Ejercicios

Compruebe si expresión dada es solución de la ecuación diferencial. Donde sea adecuado suponga que c_1 y c_2 son constantes.

- $x^2y + y^2 = c_1$; $2xydx + (x^2 + 2y)\,dy = 0$
- $y = e^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}dt + c_1e^{-x^2}$; $y' + 2xy = 1$
- $x = Ln\left(\frac{2-y}{1-y}\right)$; $y' = (2 - y)\,(1 - y)$
- $x = y\int_0^x Sen^2(t)dt$; $y = xy' + y^2Sen(x^2)$
- $y^3 = \frac{1}{x} + \frac{c_1}{x^3}$; $xy^2dy + y^3dx = \frac{2}{x}dx$
- $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & Cos(t) \\ y & = & Sen(t) \end{array}\right.$; $x + yy' = 0$

- $\begin{cases} x &= t + arcsen(t) \\ y &= \frac{t^2}{2} - \sqrt{1-t^2} \end{cases}$ $;x = y' + arcsen(y'$
- $y = e^{arcsen(c_1 x)}$; $xy' = yTan(Ln(y))$
- $y = x^2 + x^2 Ln(x)$ con $x > 0$; $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$
- $y'' + y' - 12y = 0$; $xy' = 2y$ $y = \begin{cases} -x^2 & x < 0 \\ x^2 & x \geq 0 \end{cases}$
- $y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-4x}$ $;y'' + y' - 12y = 0$

  Para cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales encuentre el valor o valores de m de forma tal que $y = e^{mx}$ sea una solución de la ecuación diferencial dada.

- $y'' - 5y' + 6y = 0$
- $y'' + 10y' + 25y = 0$
- $y'' - y' - 6y = 0$

  Para cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales encuentre el valor o valores de m de forma tal que $y = x^m$ sea una solución de la ecuación diferencial dada.

- $x^2y'' - y = 0$
- $x^2y'' + 6xy' + 4y = 0$

1.5 Problema de valor inicial y de frontera

De acuerdo con lo visto anteriormente, las soluciones de las ecuaciones diferenciales vienen dadas por una *familia n-paramétrica* de curvas y por lo tanto la solución no es en general única. Para evitar este hecho, suele acompañarse a una ecuación diferencial

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$$

de n condiciones iniciales de la forma
$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y'_0, ..., y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$

donde las constantes $x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)}$ son números reales, de manera que encontremos la solución de la ecuación diferencial satisfaga adicionalmente estas condiciones. Se define un problema de condiciones iniciales o de Cauchy al problema de la forma

$$\begin{aligned} F(x, y, y', ..., y^{(n)}) &= 0, \\ y(x_0) &= y_0; \\ y'(x_0) &= y_0'; \\ &\vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) &= y_0^{(n-1)}. \end{aligned}$$

Lo que se espera añadiendo estas condiciones es eliminar los parámetros de la familia n-paramétrica de soluciones, obteniendo entonces una solución que sea única. Nótese que se añaden tantas condiciones iniciales como orden tiene la ecuación.

Por ejemplo, tomemos la ecuación $y' - ytanx = 0$ de orden uno, que recordemos, tenía por solución $y \in (-\pi/2, \pi/2) \to R$ dada por $y(x) = \frac{c}{cosx}$, donde c es una constante arbitraria. Si consideramos el problema de condiciones iniciales

$$\begin{aligned} y' - ytan(x) &= 0 \\ y(0) &= 1, \end{aligned}$$

tendríamos que necesariamente $1 = y(0) = \frac{c}{cos(0)} = c$, por lo que $c = 1$ y la única solución del problema de condiciones iniciales es $y(x) = \frac{1}{cosx}$.

Sin embargo esta estrategia no siempre produce los frutos deseados. Sin ir más lejos, el problema

$$\begin{aligned} y^2 + (y')^2 &= 0 \\ y(0) &= 0, \end{aligned}$$

no tiene solución y

$$\begin{aligned} y' &= 3y^{2/3} \\ y(0) &= 0, \end{aligned}$$

tiene al menos dos soluciones dadas por $y(x) = 0$ e $y(x) = x^3$. Se verá el la siguiente sección bajo qué condiciones los problemas de existencia y unicidad tienen asociados una única solución.

1.6 Teorema de existencia y unicidad

Llegado este punto y dado que planteamos siempre problemas de condiciones iniciales con solución única, el alumno podría pensar que este tipo de problemas tienen siempre solución única. Es por ello que abordamos el estudio de los problemas de condiciones iniciales desde un punto de vista más teórico para poner de manifiesto cuándo existe solución única, aun cuando ésta no pueda calcularse.

En primer lugar, ejemplos como

$$\begin{aligned} y' &= xlogy \\ y(0) &= -1, \end{aligned}$$

ponen de manifiesto que la solución a este tipo de problemas no tiene porque existir. Es más,

$$\begin{aligned} y' &= 3y^{2/3} \\ y(0) &= 0, \end{aligned}$$

tiene más de una solución a saber $y(x) = 0$ e $y(x) = x^3$. El siguiente resultado podrá orden a todas estas ideas.

Teorema Sea $f : D = [t_0 - a, t_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b] \longrightarrow R$ una función continua tal que la derivada parcial de f respecto a la segunda variable $\frac{\partial f}{\partial y}$ es también continua en D. Sea $M = max\{|f(x, y)| : (x, y) \in D\}$. Entonces el problema de condiciones iniciales

$$\begin{aligned} y' &= f(x,y) \\ y(t_0) &= y_0, \end{aligned}$$

tiene solución única definida en $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ donde $\alpha = min\{a, b/M\}$.

Para demostrar el resultados se puede seguir la referencia (M. Braun, Differential equations and their applications, Springer-Verlag, Berlin, 1993), la cual utiliza muchas herramientas del cálculo ya estudiadas como el Teorema del valor medio, convergencia de series funcionales, etc. Está basada en la sucesión de Picard

$$\begin{aligned} y_0(t) &= y_0 \\ y_{n+1}(t) &= y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y_n(s))ds, \end{aligned}$$

generada a partir del problema integral asociado de la forma

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y_n(s))ds$$

Dicha sucesión de Picard también proporciona una primera idea sobre métodos numéricos de ecuaciones diferenciales.

Ejercicios.

1. $y' + 2y = 0$, con $y(0) = 3$; $\quad y = Ce^{-2x}$.
2. $yy' + x = 0$, con $y(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$; $\quad x^2 + y^2 = C$.
3. $y'' + \frac{1}{4}y = 0$, con $y(\pi) = 1$ & $y'(\pi) = -1$; $\quad y = A\cos\frac{x}{2} + B\,\mathrm{sen}\,\frac{x}{2}$.
4. $yy' - \mathrm{sen}\,x = 0$, con $y(\pi) = 1$; $\quad y^2 = C - 2\cos x$.
5. $2y(x+1) + y' = 0$, con $y(-2) = 1$; $\quad y = Ce^{-(x+1)^2}$.
6. $x\frac{dy}{dx} + y = e^{-\frac{x^2}{2}}$, con $y(2) = -3$; $\quad y = \frac{C}{x} + \frac{1}{x}\int_2^x e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$.
7. $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$, con $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ & $y''(0) = -1$; $y = C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3e^{2x}$.
8. $y'' = \frac{1}{2y'}$, con $y(1) = 2$ y la tangente en este punto forma con la dirección positiva del eje x un ángulo de $45°$; $y = \pm\frac{2}{3}(x + C_1)^{\frac{3}{2}} + C_2$.

9. $y'' - 4y = 0$, con $y(0) = 1$ & $y'(0) = 2$; $\quad y = C_1 \operatorname{senh} 2x + C_2 \cosh 2x$.

10. $2xyy' = x^2 + y^2$, con $y(1) = 3$; $\; y^2 = x^2 - Cx$.

11. $y + xy' = x^4(y')^2$, con $y(1) = 0$; $\; y = C^2 + \dfrac{C}{x}$.

12. $y' = \dfrac{y^2}{xy - x^2}$, con $y(1) = 1$; $y = Ce^{\frac{y}{x}}$.

13. $\dfrac{x}{2} \cot y \dfrac{dy}{dx} = -1$, con $y(1) = \dfrac{\pi}{2}$; $\; y = \operatorname{arcsen} \dfrac{C}{x^2}$.

14. $e^y\, dx + (xe^y + 2y)\, dy = 0$, con $y(4) = 0$; $xe^y + y^2 = C$.

15. $dx = \dfrac{y}{1 - x^2y^2}\, dx + \dfrac{x}{1 - x^2y^2}\, dy$, con $y(0) = 2$; $\ln \dfrac{1 + xy}{1 - xy} - 2x = C$.

16. $(1 + y^2 \operatorname{sen} 2x)\, dx - 2y \cos^2 x\, dy = 0$, con $y(2\pi) = \sqrt{\pi}$; $x - y^2 \cos^2 x = C$.

17. $[\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y - xe^y]\, dy = [e^y + \cos x \cos y]\, dx$, con $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$; $xe^y + \operatorname{sen} x \cos y = C$.

18. $3x^2(1 + \ln y)\, dx + \left(\dfrac{x^3}{y} - 2y\right) dy = 0$, con $y(2) = 1$; $x^3(1 + \ln y) - y^2 = C$.

19. $\dfrac{4y^2 - 2x^2}{4xy^2 - x^3}\, dx + \dfrac{8y^2 - x^2}{4y^3 - x^2y}\, dy = 0$, con $y(2) = 1$; $x^2y^2[4y^2 - x^2] = C$.

20. $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$, con $y'(1) = 2$ & $y(1) = 3$; $\quad y = C_1x^2 + C_2x^2 \ln x$.

CAPITULO 2

Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden

En este capítulo presentamos los métodos para resolver analíticamente Ecuación diferencial de primer orden de los tipos más comunes que se usan en las aplicaciones prácticas.

Los métodos vienen acompañados por pruebas o criterios que nos permitirán identificar una Ecuación Diferencial como perteneciente a uno de esos tipos, junto con un procedimiento de solución. Encontraremos también procedimientos mediante los cuales es posible transformar una Ecuación Difencial en uno de esos tipos.

2.1 Método de separación de variables

Si tenemos la E. D.

$$g(x) = h(y)y'$$

formalmente, podemos poner $g(x)dx = h(y)dy$; si suponemos que G es una primitiva de g y H una de h, tendremos $G'(x)dx = H'(y)dy$ e, integrando, $G(x) = H(y) + C$, que es la solución general de la ecuación. Expliquemos con un poco más de rigor por qué funciona el método: Sea $y = \phi(x)$ una solución de la E. D., es decir, $\phi(x)$ debe cumplir $g(x) = h(\phi(x))\phi'(x)$. Pero H es una primitiva de h, así que, por la regla de la cadena,

$g(x) = h(\phi(x))\phi'(x) = (H \circ \phi)'(x)$. Integrando, $G(x) = (H \circ \phi)(x) + C$ (lo que antes hemos expresado como $G(x) = H(y) + C$), de donde $\phi(x) = H^{-1}(G(x) - C)$.

En los pasos anteriores, está justificado emplear la regla de la cadena cuando ϕ y H son derivables, lo cual es cierto sin más que suponer que h sea continua. Y finalmente, para poder despejar ϕ mediante el uso de H^{-1} bastaría con exigir además que h no se anulara en el intervalo de definición, con lo cual, como $H' = h \neq 0$, H es creciente o decreciente luego existe H (en otras palabras, como la derivada de H no se anula, el teorema de la función inversa nos asegura que existe H^{-1}).

Las ecuaciones en variables separadas son las más sencillas de integrar y, a la vez, las más importantes, ya que cualquier otro método de resolución se basa esencialmente en aplicar diversos trucos para llegar a una ecuación en variables separadas. En ellas hemos visto, con todo rigor, qué hipótesis hay que imponer para que el método que conduce a la solución esté correctamente empleado, y cómo se justifica el funcionamiento del proceso.

En cualquier caso, conviene recordar que la expresión $\frac{dy}{dx}$ es simplemente una útil notación para designar la derivada de y respecto de x, no un cociente de dy dividido por dx; ni dy ni dx tienen entidad en sí mismas. Esta notación se emplea, porque es consecuente con los enunciados de varios importantes resultados. Ya hemos visto cómo resulta adecuada a la hora de recordar cómo resolver ecuaciones en variables separadas $g(x) = h(y)\frac{dy}{dx}$, descomponiendo $g(x)dx = h(x)dy$ (como si dy fuese realmente una fracción) e integrando dx ambos lados de la expresión anterior. Pero no sólo aquí se pone de manifiesto la utilidad de esta notación. Por ejemplo, el teorema de la función inversa prueba (con las hipótesis adecuadas) que, cuando y es una función de x, si se despeja x como función de y se cumple

$$x'(y) = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{y'(x)}$$

es decir, se produce un comportamiento similar a si estuviéramos operando con fracciones. Análogamente, si tenemos que z es una función de y y, a su vez, y una función de x, la regla de la cadena establece que la derivada de la función compuesta $z(x)$ es

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}$$

que es como si simplificáramos dy en los supuestos cocientes de la derecha. Esto permite usar las notaciones del tipo $\frac{dy}{dx}$ y su comportamiento como si fuesen fracciones como regla nemotécnica de los resultados anteriores.

Ejemplo 1. Resolver

$$\frac{dy}{dx} + (\operatorname{sen} x)y = 0.$$

Despejando, $\frac{dy}{y} = -(\operatorname{sen} x)\, dx$ e, integrando, $\log y = \cos x + C$, es decir, $y = e^{\cos x + C}$. Sin más que tomar $K = e^C$ encontramos las soluciones $y = Ke^{\cos x}$. Fijarse que, en principio, parece que K tiene que ser positiva; pero en realidad la integral de $\frac{dy}{y}$ es $\log|y|$, lo que nos llevaría a soluciones con valores negativos de K. Por último, notar $y = 0$ (es decir, tomar $K = 0$) también es claramente una solución de la E. D., aunque no se obtiene con el método seguido. Así pues, la solución general de la E. D. es de la forma $y = Ke^{\cos x}$ con $K \in \mathbb{R}$.

Ejemplo: Vamos a resolver la siguiente ecuación diferencial ordinaria de primer orden de variables separables:

$$u'(x) = 2x(u(x) + 3)$$

esto es,

$$\frac{u'(x)}{u(x) + 3} = 2x$$

Integrando tenemos

$$\int \frac{u'(x)}{u(x) + 3} dx = \int 2x dx$$

esto es,

$$In|u(x) + 3| = x^2 + C$$

y, tomando exponenciales a ambos lados de la igualdad y operando, obtenemos la solución general:

$$u(x) = e^{x^2+C} - 3 = Ke^{x^2} - 3$$

donde $K = e^C$.

Ejemplo:

Hallar la curva tal que la pendiente de la recta tangente a la curva en cada punto es $-x/y$. Por tanto, dicha curva debe satisfacer la siguiente ecuación diferencial:

$$y' = -\frac{x}{y}$$

con $(x, y) \in R - (0, 0)$. La ecuación anterior se puede escribir como sigue:

$$yy' = -x$$

e integrando, tenemos

$$\int y(x)y'(x)dx = \int -xdx,$$

esto es,

$$\frac{1}{2}y(x)^2 = -\frac{1}{2}x^2 + C$$

de donde, operando se tiene $y^2 + x^2 = C$

A la constante $2C$, la denominamos también C ya que vuelve a ser una constante arbitraria.

Consideramos la $y' = 1 + y^2$. Podemos pasar el término de la derecha dividiendo sin problemas ya que no se anula el denominador (a veces esto no pasará y habrá que analizar varios casos separadamente) y no causará problemas en

$$\frac{y'}{1+y^2} = 1.$$

La integración es inmediata: $arctgy = x + c$, o sea, $y = tan(x + c)$.

Un hecho interesante a resaltar es que la solución no existe globalmente para todo valor de x.

Ejemplo

Considere:

$$\begin{aligned} yy' + (1+y^2)sen\, x &= 0 \\ y(0) &= 1. \end{aligned}$$

Como $\frac{yy'}{1+y^2} = -sen\, x$ entonces

$$\int \frac{y}{1+y^2} dy = \int -sen\, x dx,$$

o sea,

$$\frac{1}{2} In(1+y^2) = cos\, x + C.$$

Manipulando la expresión anterior se obtiene:

$$y = \pm\sqrt{e^{2cos\, x + C} - 1}.$$

Aunque hay aparentemente dos familias de soluciones, el dato inicial sólo permite que nos quedemos con la positiva, más aún,

$$y(0) = 1 \Rightarrow 1 = \sqrt{e^{2+C} - 1} \Rightarrow C = In2 - 2,$$

La solución es por tanto

$$y(x) = \sqrt{2e^{2cos\,x-2} - 1},$$

El dominio de definición de la solución es un cierto intervalo simétrico $[-x*, x*]$, donde se satisface que $cos\,x \geq (2 - ln2)/2$. Vuelve a ocurrir que la solución no está definida globalmente.

Ejemplo:

La ecuación

$$u'(x) = (1 + x^2)(1 + u(x))$$

se puede escribir como

$$\frac{u'(x)}{1 + u(x)} = 1 + x^2.$$

Integrando a ambos lados de la igualdad:

$$\int \frac{u'(x)}{1 + u(x)} dx = \int 1 + x^2 dx \Rightarrow In|(1 + u(x))| = x + \frac{x^3}{3} + C$$

Y, operando tenemos:

$$u(x) = Ce^{x+\frac{x^3}{3}} - 1,$$

Ejemplo Resuelva la ecuación diferencial ordinaria

$$3e^x Tan(y)dx + (2 - e^x)\, Sec^2(y)dy = 0$$

Dividiendo por el factor $Tan(y)\,(2 - e^x)$ obtenemos

$$\frac{3e^x}{2 - e^x} dx + \frac{Sec^2(y)}{Tan(y)} dy = 0$$

Y al integrar

$$-3Ln \mid 2-e^x \mid +Ln \mid Tan(y) \mid = c$$

Simplificando

$$\frac{Tan(y)}{(2-e^x)^3} = c$$

Observe que el factor $Tan(y)\,(2-e^x)$ es cero cuando $x = Ln(2)$ y $y = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$y al sustituirlas en la ecuación original se comprueba que son soluciones, pero se obtienen de la solución general tomando $c = +\infty$ y $c = 0$, respectivamente.

Ejemplo

La pendiente de una familia de curvas está dada por:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3x+xy^2}{2y+x^2y}$$

Encuentre el miembro de la familia que pasa por el punto $(2,1)$.

Separando variables

$$\frac{y}{3+y^2}dy = -\frac{x}{2+x^2}dx$$

Integrando

$$Ln\left(3+y^2\right) + Ln\left(2+x^2\right) = c$$

Simplificando

$$\left(3+y^2\right)\left(2+x^2\right) = c$$

Evaluando en el punto $(2,1)$ obtenemos que $c = 24$, con lo cual el miembro de la familia buscado es

$$\left(3+y^2\right)\left(2+x^2\right) = 24$$

Ejemplo

La ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4y^2 - x^4}{4xy}$$

no es separable, pero se convierte en separable al hacer el cambio de variable $y = ux$.

Al tratar de separar variables llegamos a la ecuación

$$4ydy = \frac{4y^2 - x^4}{x}dx$$

la cual no es separable.

Por otro lado, al hacer el cambio de variable $y = ux$

$$y = ux \Rightarrow y' = xu' + u$$

con lo que al sustituir en la ecuación diferencial obtenemos

$$xu' + u = \frac{4u^2 - x^2}{4u}$$

y simplificando

$$\frac{du}{dx} = -\frac{x}{4u}$$

la cual es separable. Al integrar llegamos a la solución

$$2u^2 + \frac{x^2}{2} = c$$

Volviendo a la variable original

$$2\left(\frac{y}{x}\right)^2 + \frac{x^2}{2} = c$$

la cual es la solución buscada.

2.2 Ecuaciones algebraicas de grado homogéneo

Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden $u'(x) = f(x, u(x))$ se dice que es homogénea si la función f es una función homogénea de grado 0; esto es,

$$f(tx, tu(x)) = t^0 f(x, u(x)) = f(x, u(x)).$$

En este caso, la ecaución diferencial se puede escribir de la siguiente manera:

$$u'(x) = f(1, \frac{u(x)}{x}).$$

La integral general de este tipo de ecuaciones se puede obtener haciendo el cambio de variable:

$$v(x) = \frac{u(x)}{x} \Leftrightarrow u(x) = xv(x),$$

con lo que, derivando, obtenemos

$$u'(x) = v(x) + xv'(x).$$

con un poco de algebra se obtiene la siguiente ecuación diferencial que es de variables separables:

$$v(x) + xv'(x) = f(1, v(x))$$

pues operando, se puede escribir de la siguiente forma:

$$\frac{v'(x)}{f(1, v(x)) - v(x)} = \frac{1}{x}.$$

Veamos algunos ejemplos.

Consideramos la ecuación

$$y' = \frac{y + \sqrt{x^2 - y^2}}{x}$$

Con el cambio $y = xu$ queda

$$xu' + u = \frac{xu + \sqrt{x^2 - x^2u}}{x} = u + \sqrt{1 - u^2},$$

donde en la última igualdad hemos supuesto, por simplicidad en la exposición que $x > 0$. Por tanto

$$xu' = \sqrt{1 + u^2} \Rightarrow x\frac{du}{dx} = \sqrt{1 - u^2} \Rightarrow \int \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} du = \int \frac{1}{x} dx$$

Para poder efectuar el último paso hemos supuesto que $1 - u^2 \neq 0$. Así, obtenemos por un lado la solución

$$y = x\, sen(In|Cx|)$$

y por otro, ya que suponíamos que $1 - u^2 \neq 0$, la que corresponde a este caso $u^2 = 1$, i.e. $y = \pm x$, que efectivamente se comprueba es también solución.

2.3 Ecuaciones diferenciales homogéneos

Homogéneas.

Son de la forma

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Se hace el cambio de función $y(x)$ por $u(x)$ mediante $y = ux$, transformándose así la E. D. en una de variables separadas.

Ejemplo

Resuelva la ecuación diferencial

$$\left(x^2 + y^2\right) dx + xydy = 0$$

La ecuación diferencial es homogénea pues $M(x,y) = x^2 + y^2$ y $N(x,y) = xy$ son homogéneas de grado dos

$$\begin{aligned} M(tx,ty) &= (tx)^2 + (ty)^2 = t^2\left(x^2+y^2\right) = t^2 M(x,y) \\ N(tx,ty) &= (tx)\,(ty) = t^2\,(xy) = t^2 N(x,y) \end{aligned}$$

Haciendo la sustitución

$$\begin{aligned} (x^2 + (ux)^2 dx) + x(uy)(xdu + udx) &= 0 \\ x^2(1+2u^2)dx + ux^3du &= 0 \\ x^3(\tfrac{1}{x}dx + \tfrac{u}{1+2u^2}du) &= 0 \end{aligned}$$

de donde

$$\frac{1}{x}dx + \frac{u}{1+2u^2}du = 0$$

Integrando y volviendo a las variables x y y obtenemos

$$Ln \mid x \mid + \frac{1}{4}Ln \mid 1 + 2\left(\frac{y}{x}\right)^2 \mid = c \Rightarrow x^4 + 2x^2y^2 = c$$

Note que $x = 0$ es una solución singular de la ecuación diferencial dada.

Observación: Cuando la ecuación diferencial homogénea está escrita en la forma

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

conviene más rescribirla en la forma

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$$

y aplicar quí el cambio de variable $y = ux$.

Ejemplo

Resuelva la ecuación diferencial

$$xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$$

Factorizando x

$$y' = \sqrt{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2} + \frac{y}{x}$$

Haciendo la sustitución $y = ux$

$$\frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{dx}{x}$$

Integrando

$$ArcSen(u) = Ln \mid x \mid + Ln \mid c \mid$$

Y despejando y

$$\Rightarrow \quad y = Sen(Ln(cx))$$

Observación: al dividir por el factor $x\sqrt{1-u^2}$ se pudo haber perdido algunas soluciones, pero $x = 0$ no es solución y $1 - \frac{x^2}{y^2} = 0 \Rightarrow y = \pm x$ que son soluciones singulares.

Ejercicios

Determine cuales de las siguientes funciones son homogéneas. En caso de que lo sean determine el grado de homogeneidad.

- $f(x,y) = xSen(\frac{y}{x})$
- $f(x,y) = \frac{y}{x^2+3\sqrt{x^2+y^2}}$
- $f(x,y) = x^2 + 5xy - y^2$
- $f(x,y) = \frac{Ln(x^2)}{Ln(xy)}$

Resuelva cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales

- $(2x + 3y)\,dx + (y - x) = 0$
- $y' = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

- $y' = Sen\left(\frac{y}{x}\right)$
- $(x^4 + y^4)\,dx - 2x^3 dy = 0$
- $(\sqrt{x+y} + \sqrt{x-y})\,dx + (\sqrt{x-y} + \sqrt{x+y})\,dy = 0$
- $\left(y + \sqrt{x^2+y^2}\right)dx - xdy = 0$
- $(xy + y^2 + x^2)\,dx - x^2 dy = 0$

2.4 Ecuaciones diferenciales exactas

Una e.d.o. de la forma

$$P(x,y) + Q(x,y)\frac{dy}{dx} = 0,$$

o equivalentemente escrita como

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0,$$

con $P, Q \in R^2$, se dice exacta si existe una función $U(x,y)$ (función potencial) tal que

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P,\ \frac{\partial U}{\partial y} = Q.$$

Por tanto las soluciones vienen dadas de forma implícita por "las curvas de nivel" $U(x,y) = C$, con C una constante, ya que $\frac{d}{dx}[U(x,y(x))] = 0$, se dice que $U(x,y(x))$ es una integral primera del problema.

Un CRITERIO para saber si una e.d.o. es exacta, esto es, para ver si $F = (P,Q)$ es conservativo es el siguiente: supuesto que $P, Q \in R^2$ y que es un dominio simplemente conexo (esto es, "sin agujeros") $Pdx + Qdy$ es exacta si y sólo si se cumple la igualdad

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Ocurre de nuevo que hay dos formas de calcular U. Los exponemos a continuación y después los ilustramos con varios ejemplos.

En tal caso, la función potencial U, al tener que cumplir $\frac{\partial U}{\partial x} = P$, es de la forma

$$U(x,y) = \int P(x,y)dx + g(y).$$

Por otro lado, como también debe cumplirse $\frac{\partial U}{\partial y} = Q$, se tiene que verificar

$$\frac{\partial}{\partial y}(\int P(x,y)dx) + g'(y) = Q,$$

de modo que la expresión final de la función U viene dada por

$$g(y) = \int (Q - \frac{\partial}{\partial y}\int Pdx)dy$$

El segundo método se basa en el hecho de que las integrales exactas no dependen del camino elegido en la integración. Entonces

$$U(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(s,y_0)ds + \int_{y_0}^{y} Q(x,s)ds.$$

En efecto, veamos que se cumple con la condición de ecuación exacta. Se tiene que

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x,y) = P(x,y_0) + \frac{\partial}{\partial x}\int_{y_0}^{y} Q(x,s)ds.$$

Por la igualdad

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_{y_0}^{y} Q(x,s)ds = \int_{y_0}^{y} \frac{\partial}{\partial x}Q(x,s)ds = \int_{y_0}^{y} \frac{\partial}{\partial y}P(x,s)ds = P(x,y) - P(x,y_0).$$

Concluimos que $\frac{\partial U}{\partial x}(x,y) = M(x,y)$. La derivada parcial restante es más simple:

$$\frac{\partial U}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\int_{x_0}^{x} P(s,y_0) + Q(x,y) = Q(x,y).$$

Ejemplo

Considere la ecuación

$$\begin{aligned} 3xy^2y' &= 2x - y^3, \\ y(1) &= 1. \end{aligned}$$

La resolveremos por los dos métodos.

Notamos $P(x,y) = 2x - y^3$, $Q(x,y) = -3xy^2$. Como se tiene $\dfrac{\partial P}{\partial x} = \dfrac{\partial Q}{\partial y} = -3y^2$, la ecuación es exacta. De nuevo lo resolvemos por los dos métodos posibles.

(a)

$$\frac{\partial}{\partial x}\Phi(x,y) = 2x - y^3 \;\Rightarrow\; \Phi(x,y) = x^2 - y^3x + C(y).$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\Phi(x,y) = -3xy^2 = -3xy^2 + C'(y) \;\Rightarrow\; C'(y) = 0 \Rightarrow C(y) = C.$$

La solución del problema viene dada por $\Phi(x,y) = x^2 - y^3x = C$. Como debe cumplirse $y(1) = 1$, entonces debe ser $C = 0$. Despejando, se tiene que $y = \sqrt[3]{x}$.

(b)

$$\begin{aligned} \Phi(x,y) &= \int_1^x P(s,1)ds + \int_1^y Q(x,s)ds \\ &= \int_1^x (2s-1)ds - \int_1^y 3xs^2ds \\ &= [s^2 - s]_1^x - [xs^3]_{s=1}^{s=y} \\ &= x^2 - x - 1 + 1 - xy^3 + x, \end{aligned}$$

de donde se obtiene la expresión implícita de la solución: $\Phi(x,y) = x^2 - xy^3 = 0$ (al haber impuesto ya los límites precisos de integración).

Ejemplo

La solución general de la ecuación diferencial

$$\left(4xy^3 + 3y^2 + 1\right) dx + \left(6x^2y^2 + 6xy\right) dy = 0$$

es $2x^2y^3 + 3xy^2 + x = c$, pues la ecuación diferencial es exacta y como hemos visto $f(x, y) = 2x^2y^3 + 3xy^2 + x + c$ es la función potencial del campo vectorial $F(x, y) = (4xy^3 + 6y^2 + 1)\,\vec{i} + (6x^2y^2 + 6xy)\,\vec{j}$.

Ejemplo

Determine una función $M(x, y)$ de modo que la ecuación diferencial

$$M(x, y)dx + \left(xe^{xy} + 2xy + \frac{1}{x}\right) dy = 0$$

(1.1)

sea exacta.

Para que la ecuación diferencial (1.1) sea exacta debe cumplirse que

Y al integrar respecto a y, obtenemos que

$$M(x, y) = ye^{xy} + y^2 - \frac{y}{x^2} + c$$

Observación: en realidad obtenemos toda una familia de funciones $M(x, y)$, debido a la constante de integración c, como queremos sólo una función $M(x, y)$ podemos tomar $c = 0$.

Ejemplo

Determine el valor o valores de k de forma que la ecuación diferencial

$$\left(2x - ySen(xy) + ky^4\right) dx - \left(20k^2xy^3 + xSen(xy)\right) dy = 0$$

(1.2)

Para que la ecuación diferencial (1.2) sea exacta debe satisfacer

de donde obtenemos que

$$4k = -20k^2 \Rightarrow 20k^2 + 4k = 0 \Rightarrow k = 0 \wedge k = -\frac{1}{5}$$

Ejercicios

Resuelva cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales

- $(x+y)(x-y)\,dx + x(x-2y)\,dy = 0$
- $(x^3+y^3)\,dx + 3xy^2dy = 0$
- $(3x^2y+e^y)\,dx + (x^3+xe^y-2y)\,dy = 0$
- $(yLn(y)-e^{xy})\,dx + \left(\frac{1}{y}+xLn(y)\right)dy = 0$

  Determine el valor de k de modo que las siguientes ecuaciones sean exactas

- $(y^3+kxy^4-2x)\,dx + (3xy^2+20x^2y^3)\,dy = 0$
- $(2x-ySen(x)+ky^4)\,dx - (20xy^3+xSen(xy))\,dy = 0$
- $(6xy^3+Cos(y)) + (kx^2y^2-xSen(y))\,dy = 0$

  Obtenga una función $M(x,y)$ de forma que la ecuación diferencial

- $$M(x,y)dx + \left(xe^{xy}+2xy+\frac{1}{x}\right) = 0$$

  sea exacta.

  Determine una función $N(x,y)$ de manera que la ecuación diferencial

- $$\left(\sqrt{\frac{y}{x}}+\frac{x}{x^2+y}\right)dx + N(x,y)dy = 0$$

  sea exacta.

2.5 Factor integrante

A veces puede ocurrir que una ecuación diferencial no sea exacta pero que exista un factor $\mu \in R^2$ con $\mu \neq 0$ en R^2 y tal expresión

$$\mu(x,y)P(x,y)dx + \mu(x,y)Q(x,y)dy = 0$$

Sí es exacta, es decir, con lo que se verificar

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu(x,y)P(x,y)) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu(x,y)Q(x,y)).$$

En tal caso a μ se le llama factor integrante. La condición para que la ecuación sea exacta si μ depende explícitamente de las dos variables x e y es en principio más complicada,

$$\mu_y P + \mu P_y = \mu_x Q + \mu Q_x$$

Como en principio no sabemos si dicho factor integrante existe o no, por simplicidad buscamos factores dependientes sólo de una variable. Así, resulta más fácil buscar por ejemplo $\mu = \mu(x)$, en cuyo caso la condición queda

$$\mu_y P = \mu'_x Q + \mu Q_x \Rightarrow \frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = \frac{P_y - Q_x}{Q}.$$

Si la expresión $\frac{P_y - Q_x}{Q}$ sólo depende de x, entoces podríamos hallar el factor integrante (al tratarse de una ecuación de variables separables). Otras opciones válidas serían $\mu = \mu(y)$, o $\mu = \mu(t)$ con t algún cambio de variables que resulte adecuado.

Ejemplo

La ecuación

$$x(1-y) + (y + x^2)y' = 0$$

no es exacta, ya que si denotamos $P(x,y) = x(1-y)$ *y* $Q(x,y) = (y+x^2)$, *se tiene* $P_y \neq Q_x$. *Veamos que* $\mu(x,y) = \nu(t)$, *con* $t = x^2+y^2$, *es un factor integrante.*

Hay que intentar conseguir la igualdad

$$\mu_y x(1-y) - x\mu = \mu_x(y+x^2) + 2x\mu,$$

o lo que es lo mismo, dada la relación entre μ *y* ν,

$$\nu'(t)2yx(1-y) - x\nu(t) = \nu'(t)2x(y+x^2) + 2x\nu.$$

Tras hacer algunas simplificaciones, se obtiene que

$$\nu'(t)(-2x)(y^2+x^2) = 3x\nu(t) \;\Rightarrow\; \nu'(t) = -\frac{3}{2t}\nu(t),$$

con lo que una solución posible (no nos interesa obtener todas) es

$$\nu(t) = t^{-3/2}.$$

Por tanto, hemos conseguido probar la existencia de un factor integrante, $\mu(x,y) = (x^2+y^2)^{-3/2}$. *Así, la ecuación exacta es*

$$\mu x(1-y) + \mu(y+x^2)y' = 0.$$

La solución del problema ahora viene dada por

$$\Phi(x,y) = \int \frac{x(1-y)}{(x^2+y^2)^{3/2}}dx + C(y) = (-1+y)(x^2+y^2)^{-1/2} + C(y).$$

Imponiendo la condición con respecto a la derivada parcial respecto de y, *debe cumplirse que*

$$(x^2+y^2)^{-1/2} - (y-1)(x^2+y^2)^{-3/2}y + C'(y) = \frac{y+x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}.$$

Operando concluimos que $C'(y) = 0$, *o sea,* $C(y) =$*Cte, de modo que la solución final es:*

$$\Phi(x,y) = \frac{y-1}{\sqrt{x^2+y^2}} = C.$$

Ejemplo: Resolver la ecuación diferencial

$$\left(3x + 2yy^2\right)dx + \left(x + 4xy + 5y^2\right)dy = 0$$

si su factor integrante es de la forma $\mu(x,y) = \phi(x+y^2)$.

Haga $z = x + y^2$ y calculemos las derivadas parciales de μ respecto a x e y

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{d\mu}{\partial z}\frac{\partial z}{dx} = \frac{\partial \mu}{\partial z}$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{d\mu}{\partial z}\frac{\partial z}{dy} = 2y\frac{\partial \mu}{\partial z}$$

Sustituyendo en la ecuación anterior obtenemos que

$$(2yM - N)\frac{d\mu}{dz} = \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\mu$$

Separando variables

$$\frac{d\mu}{\mu} = \left(\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{2yM - N}\right)dz$$

Como $M(x,y) = 3x + 2yy^2$ y $N(x,y) = x + 4xy + 5y^2$, resulta que

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{1}{x+y^2}dz = \frac{1}{z}dz$$

Integrando obtenemos que $\mu = z$. Es decir, que el factor integrante es $\mu(x,y) = x + y^2$. Al multiplicar por este factor tenemos que la ecuación original se convierte en

$$\left(3x^2 + 2xy + 4xy^2 + 2y^2 + 2y^3 + y^4\right)dx + \left(x^2 + 4x^2y + 6xy^2 + 4xy^3 + 5y^4\right)dy = 0$$

la cual es exacta y tiene como solución

$$x^3 + x^2y + 2x^2y^2 + 2xy^3 + xy^4 + y^5 = c$$

Ejemplo:

Resuelva la siguiente ecuación diferencial

$$\left(xy^2 - y^3\right)dx + \left(1 - xy^2\right)dy = 0$$

Primero calculamos

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2xy - 3y^2 \qquad\qquad \frac{\partial N}{\partial x} = -y^2$$

Ahora intentamos hallar un factor integrante que dependa únicamente de x o de y, en este caso encontramos que depende de y.

$$g(y) = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{M} = \frac{-y^2 - 2xy + 3y^2}{xy^2 - y^3} = \frac{2y^2 - 2xy}{y^2\,(x-y)} = -\frac{2}{y}$$

Con lo cual el factor integrante esta dado por

$$\mu(y) = e^{\int g(y)dy} = e^{-2ln(y)} = \frac{1}{y^2}$$

Y al multiplicar la ecuación diferencial por este factor integrante obtenemos la ecuación

$$(x-y)\,dx + \left(\frac{1}{y^2} - x\right) dy = 0$$

la cual es exacta y tiene como solución

$$\frac{x^2}{2} - \frac{1}{y} - xy = c$$

Ejemplo

Halle los valores de p y q de forma tal que $\mu(x,y) = x^p y^q$ sea un factor integrante de la ecuación diferecnial

$$\left(2y^2 + 4x^2y\right) dx + \left(4xy + 3x^3\right) dy = 0$$

(1.9)

Si $\mu(x,y) = x^p y^q$ es un factor integrante entonces al multiplicar la ecuación diferencial (1.9) obtenemos que

$$\left(2x^p y^{q+2} + 4x^{p+2}y^{q+1}\right) dx + \left(4x^{p+1}y^{q+1} + 3x^{p+3}y^q\right) dy = 0$$

es una ecuación exacta, es decir, debe cumplir que

$$2\,(q+2)\,x^p y^{q+1} + 4\,(q+1)\,x^{p+2}y^q = 4\,(p+1)\,x^p y^{q+1} + 3\,(p+3)\,x^{p+2}y^q$$

igualando coeficientes obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2\,(q+2) &= 4\,(p+1) \\ 4\,(q+1) &= 3\,(p+3) \end{cases}$$

el cual es equivalente a

$$\begin{cases} 4p-2q &= 0 \\ 3p-4q &= -5 \end{cases}$$

y tiene como solución $p=1$ y $q=2$, con lo cual el factor integrante es $\mu(x,y)=xy^2$ y la solución de la ecuación diferencial esta dada por

$$x^2y^4+x^4y^3=c$$

Ejercicios

Resuelva cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales

- $2xyln(y)dx+\left(x^2+y^2\sqrt{y^2+1}\right)dy=0$
- $(3x^2+y)\,dx+(x^2y-x)\,dy=0$
- $(y^2+2xy)\,dx-x^2dy=0$
- $(x^4-x+y)\,dx-xdy=0$

  Para las siguientes ecuaciones diferenciales encuentre un factor integrante de la forma x^ny^m y resuelva la ecuación.

- $(2y^2-6xy)\,dx+(3xy-4x^2)\,dy=0$
- $(12+5xy)\,dx+\left(6\frac{x}{y}+2x^2\right)dy=0$
- $\frac{2y}{x}dx+\left(\frac{y^2}{x^2}-1\right)dy=0$

  Si

- $$xM(x,y)+yN(x,y)=0$$

  encuentre la solución de la ecuación diferencial

- $$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

  Resolver la ecuación diferencial

- $$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x} + \frac{x^3}{y} + xTan\left(\frac{y}{x^2}\right)$$

  haciendo el cambio de variable $y = xz^n$, eligiendo un valor conveniente de n.

2.6 La ecuación diferencial lineal de primer orden

Llamamos e.d.o. lineal de primer orden a una ecuación del tipo

$$y' + a(x)y = b(x).$$

Hay dos métodos para resolver este tipo de problemas. El primero consiste en encontrar un factor integrante (esto se usará también más adelante y de forma más general). Si A es una primitiva de a, entonces la ecuación anterior equivale a

$$e^{A(x)}y' + e^{A(x)}a(x)y = e^{A(x)}b(x),$$

de donde

$$e^{A(x)}y(x) = \int e^{A(x)}b(x)dx.$$

El segundo método es la llamada fórmula de variación de las constantes de Lagrange, y consta de dos pasos. Primero resolvemos la ecuación lineal homogénea (i.e. sin término b)

$$y' + a(x)y = 0,$$

que es del tipo de variables separables y tiene por solución $y(x) = Ce^{A(x)}$ con $C \in R$. El nombre del método quedará claro con el segundo paso. Buscamos una variación de la constante C anterior, concretamente suponemos que ahora $C = C(x)$ es una función, e imponemos que $y(x) = C(x)e^{A(x)}$ sea solución de la ecuación lineal, tras lo cual una solución particular de la ecuación no homogénea sumada con todas las soluciones posibles de la homogénea,

$$y = y_p + y_H,$$

hace que recuperemos la solución general obtenida por el primer método.

Ejemplo

Usamos el factor integrante para obtener la ecuación equivalente

$$e^{sen\,x}y' + cos\,xe^{sen\,x}y = sen\,x\,cos\,xe^{sen\,x}.$$

Como

$$\frac{d}{dx}[e^{sen\,x}y] = e^{sen\,x}y' + \ cos\,xe^{sen\,x}y.$$

deducimos que

$$e^{sen\,x}y = \int sen\,x\,cos\,xe^{sen\,x}dx,$$

La integral indefinida se hace por partes:

$$\int sen\,x\,cos\,xe^{sen\,x}dx = e^{sen\,x}(sen\,x - 1) + C,$$

con lo que la solución final es

$$y(x) = sen\,x - 1 + Ce^{-sen\,x}.$$

Ejemplo

Considérese el problema de Cauchy

$$\begin{aligned} y' + y &= \frac{1}{1+x^2}, \\ y(2) &= 3, \end{aligned}$$

cuya ecuación se resuelve por medio de

$$e^x y' + y e^x = \frac{e^x}{1+x^2}.$$

Integrando y considerando la condición inicial

$$\int_2^x \frac{d}{ds}(e^s y(s))ds = \int_2^x \frac{e^s}{1+s^2}ds,$$

es decir

$$e^x y(x) - 3e^2 = \int_2^x \frac{e^s}{1+s^2}ds,$$

Así, la solución al problema es

$$y(x) = 3e^2 - x + e^{-x}\int_2^x \frac{e^s}{1+s^2}ds,$$

Ejercicios

Halle la solución general para cada una de las siguientes ecuaciones

- $(xy + x^3 + x)\,dx + (1 + x^2)\,dy = 0$
- $2ydx + (x + 4y^2)\,dy$
- $\frac{dy}{dx} + y = \frac{1-e^{-2x}}{e^x+e^{-x}}$
- $\frac{dr}{d\theta} + rSec(\theta) = Cos(\theta)$
- $(2ySen(x) - Tan(x))\,dx + (1 - Cos(x))\,dy = 0$

- $xy' + (1+x)\,y = e^{-x}Sen(2x)$
- Resuelva la ecuación diferencial $xy' + 3 = 4xe^{-y}$ sujeta a la condición $y(2) = 0$
- Resuelva la ecuación diferencial

$$-Sen(y)\frac{dy}{dx} + 2Cos(y)Cos(x) = Sen^2(x)Cos(x)$$

haciendo el cambio de variable $u = Cos(y)$.

2.7 La ecuación de Bernoulli

Decimos que una ecuación diferencial ordinaria de primer orden es de Bernoulli si se puede escribir de la siguiente forma:

$$y'(x) = y(x)f(x) + y(x)^n g(x);$$

con $n \neq 0, 1$. Si $n = 0$ tenemos una EDO de variables separables y con $n = 1$ tenemos una ecuación lineal.

Dividiendo por $y(x)^n$ obtenemos:

$$\frac{y'(x)}{y(x)^n} = \frac{y(x)}{y(x)^n}f(x) + g(x).$$

Para convertirla en una EDO lineal hacemos el cambio:

$$u(x) = \frac{y(x)}{y(x)^n}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} u'(x) &= \frac{y(x)y(x)^n - y(x)ny(x)^{n-1}y'(x)}{y(x)^{2n}} \\ &= y'(x)\frac{y(x)^n - ny(x)^n}{y(x)^{2n}} \\ &= y'(x)(1-n)\frac{1}{y(x)^n} \end{aligned}$$

luego

$$\frac{y'(x)}{y(x)^n} = \frac{u'(x)}{1-n}.$$

Sustituyéndolo en la EDO obtenemos la siguiente EDO lineal que resolvemos siguiendo los pasos del apartado anterior:

$$u'(x) = (1-n)f(x)u(x) + (1-n)g(x).$$

Ejemplo Obtengamos la solución general de la ecuación diferencial

$$y'(x) = -\frac{1}{x+2}y(x) - \frac{1}{2}(x+2)^4 y(x)^2.$$

Es una EDO de Bernoulli con $n = 2$. Dividiendo por $y(x)^2$, obtenemos:

$$\frac{y'(x)}{y(x)^2} = -\frac{1}{x+2}\frac{1}{y(x)} - \frac{1}{2}(x+2)^4$$

y hacemos el cambio de variable:

$$u(x) = \frac{1}{y(x)}.$$

luego

$$u'(x) = -\frac{y'(x)}{y(x)^2}.$$

Lo sustituimos en la EDO y obtenemos la siguiente ecuación lineal:

$$u'(x) = \frac{1}{x+2}u(x) + (x+2)^4.$$

Hacemos el cambio $u(x) = w(x)v(x)$. Luego $u'(x) = w'(x)v(x) + w(x)v'(x)$, y lo sutituimos en la EDO:

$$w'(x)v(x) + w(x)v'(x) = \frac{1}{x+2}w(x)v(x) + (x+2)^4.$$

Tomamos $v(x)$ tal que:

$$v'(x) = \frac{1}{x+2}v(x)$$

Integrando esta EDO obtenemos:

$$\int \frac{v'(x)}{v(x)}dx = \int \frac{1}{x+2}dx$$

luego,

$$v(x) = x + 2.$$

Luego la EDO se escribe como sigue:

$$w'(x)(x+2) = \frac{1}{2}(x+2)^4 \Rightarrow w'(x) = (x+2)^3.$$

Luego, integrando obtenemos:

$$w(x) = \int \frac{1}{2}(x+2)^3 dx = \frac{1}{2}\frac{(x+2)^4}{4} + C$$

luego

$$\begin{aligned} u(x) &= w(x)v(x) \\ &= [\frac{(x+2)^4}{8} + C](x+2) \\ &= \frac{(x+2)^5 + 8C(x+2)}{8} \end{aligned}$$

y la solución general de nuestra EDO es:

$$y(x) = \frac{8}{(x+2)^5 + 8C(x+2)}.$$

Ejemplo:

Resuelva la ecuación

$$\frac{dy}{dx} - 5y = -\frac{5}{2}xy^3$$

Solución

Ésta es una ecuación de Bernoulli con $n = 3$, $P(x) = -5$ y $Q(x) = -\frac{5x}{2}$. Para resolverla primero dividamos por y^3

$$y^{-3}\frac{dy}{dx} - 5y^{-2} = -\frac{5x}{2}$$

Ahora efectuemos la transformación $u = y^{-2}$. Puesto que $\frac{du}{dx} = -2y\frac{dy}{dx}$, la ecuación se transforma en

$$-\frac{1}{2}\frac{du}{dx} - 5u = -\frac{5}{2}x$$

Simplificando obtenemos la ecuación lineal

$$\frac{du}{dx} - 10u = 5x$$

Cuya solución es

$$u = \frac{x}{2} - \frac{1}{20} + ce^{-10x}$$

y al sustituir $u = y^{-2}$ se obtiene la solución de la ecuación original

$$\frac{1}{y^2} = \frac{x}{2} - \frac{1}{20} + ce^{-10x}$$

Observación: en esta solución no está incluida la solución $y = 0$, que se perdió durante el proceso de dividir por y^3. Es decir, se trata de una solución singular.

Ejemplo:

Compruebe que la ecuación diferencial

$$xy' + 3 = 4xe^{-y}$$

se transforma en una ecuación de Bernoulli al hacer $u = e^{-y}$.

Solución

Como

$$u = e^{-y} \Rightarrow u' = -e^{-y}y' \Rightarrow y' = -\frac{u'}{u}$$

Sustituyendo obtenemos

$$u' - \frac{3}{x}u = -4u^2$$

la cual es una ecuación de Bernoulli.

Ejercicios

Resuelva cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales

- $y' - y = xy^2$
- $y^2 dx + (xy - x^3)\, dy = 0$
- $y' + \frac{y}{x} = xy^2$
- $xy' + y = y^2 Ln(x)$
- $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^5 + xy}$
- $4\,(1 + x^2)\,\frac{dy}{dx} = 2xy\,(y^4 - 1)$
- $x^2 \frac{dy}{dx} - 2xy = 3y^4 \;\; y(1) = \frac{1}{2}$
- $2\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - \frac{x}{y^2} \;\; y(1) = 1$

  Resuelva la ecuación

- $$xy'' - 3y' = 4x^2$$

  (Sugerencia: Haga $u = y'$)

CAPITULO 3

Ecuaciones Diferenciales Lineales de Segundo Orden y Orden Superior

Una ecuación diferencial lineal de orden n tiene la forma

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = b(x)$$

Vamos a presuponer que $a_0(x) \neq 0$ para todo x, de modo que estudiaremos las ecuaciones diferenciales lineales de la forma

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = b(x)$$

La ecuación diferencial lineal se dice que es *homogénea* si $b(x) = 0$. En caso contrario se dice que es *completa* o *no homogénea*.

A menudo denotaremos por $L(y)$ o $L[y]$ al primer miembro de

$$\begin{aligned} L(y) = L[y] &= y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y \\ &= \left(D^n + a_1(x)D^{n-1} + \cdots a_{n-1}(x)D + a_n(x)\right) y \end{aligned}$$

donde en este último caso $D = \frac{d}{dx}$ se utiliza como un ente algebraicoAsí se puede representar la ecuación diferencial lineal homogénea por $L[y] = 0$, donde $L[y]$ es un *operador lineal*, i.e.

$$L\left[c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x)\right] = c_1L[\varphi_1(x)] + c_2L[\varphi_2(x)]$$

En este tema estudiaremos las ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes, i.e. $a_1(x), \ldots, a_n(x)$ son constantes.

Comenzaremos estudiando el caso particular de las ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden ($n = 2$) y luego lo generalizaremos para n cualquiera.

Estudiaremos en primer lugar la ecuación homogénea, puesto que la resolución de la ecuación no homogénea se basa en el método de resolución de la ecuación homogénea.

3.1 Ecuaciones diferenciales lineales de orden superior

Una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden tiene la forma

$$L[y] = y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$$

donde $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ y $b(x)$ es una función contínua en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$.

La ecuación diferencial lineal homogénea de primer orden $y' + ay = 0$ tiene solución, como ecuación diferencial ordinaria de variables separadas, $y = ce^{-ax}$.

Sería bueno buscar soluciones exponenciales para $L[y]$. Basándose en esa idea se trata de buscar soluciones del tipo* $y = e^{rx}$, que substituyendo en $L[y]$ queda

$$\begin{aligned} L[e^{rx}] &= r^2 e^{rx} + a_1 r e^{rx} + a_2 e^{rx} \\ &= e^{rx}\left(r^2 + a_1 r + a_2\right) = 0 \end{aligned}$$

Debido a que $e^{rx} \neq 0$, se tendrán soluciones para las raíces del *polinomio característico* $q(r) = r^2 + a_1 r + a_2$. Este polinomio tendrá dos soluciones r_1, r_2. Consideramos las tres posibilidades:

- Si r_1, r_2 son reales y $r_1 \neq r_2$ se tiene que las soluciones de $L[y]$ son

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= e^{r_1 x} \\ \varphi_2(x) &= e^{r_2 x} \end{aligned}$$

- Si $r_1 = r_2$ son reales, entonces las solución de $L[y]$ son

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= e^{r_1 x} \\ \varphi_2(x) &= x \cdot e^{r_1 x} \end{aligned}$$

- Si r_1, r_2 son complejas conjugadas, $r_1 = \alpha + i\beta$, $r_2 = \alpha - i\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces las soluciones de $L[y]$ son

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= e^{ax} cos(bx) \\ \varphi_2(x) &= e^{ax} sen(bx) \end{aligned}$$

Nótese que las soluciones son linealmente independientes, según se entiende por la siguiente definición

Dadas $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ funciones definidas en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$, se dice que son *linealmente independientes* si se verifica que para todo x

$$c_1\varphi_1(x) + \cdots + c_n\varphi_n(x) \quad \Rightarrow \quad c_1 = \cdots = c_n = 0$$

donde $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$

3.2 Teoría de las ecuaciones lineales homogéneas de segundo orden

Para resolver una ecuación diferencial lineal de orden n se necesitan n condiciones generales. En general, dada una $f(x, y, y') = 0$ si la desarrollamos en serie de potencias en un entorno de un punto x_0,

$$y(x) = y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \cdots$$

Dada la condición inicial $f(x_0, y_0, y'(x_0)) = 0$ se puede despejar y'. Una vez conocida y', con otra condición inicial adicional se podría despejar y'', y con otra más se podría despejar y'''. Así, para una ecuación diferencial lineal de orden n se necesitan n condiciones iniciales.

3.3 Solución general de ecuaciones diferenciales lineales homogéneas de orden n

Dado que toda solución de una ecuacion diferencial lineal es combinación lineal de soluciones de la misma, la solución general será una combinación lineal de soluciones linealmente independientes.

Dado el Problema de Cauchy para cualquier $x_0 \in \mathbb{R}$

$$
\begin{aligned}
ly'' + a_1 y' + a_2 y &= 0 \\
y(x_0) = y_0 &= \alpha \\
y'(x_0) = y'_0 &= \beta
\end{aligned}
$$

siempre existe solución (única) cualesquiera que sean los parámetros α, β.

Sean $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ funciones $(n-1)$ derivables, se define el *Wronskiano* como

$$
W(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \cdots & \varphi_n(x) \\ \varphi'_1(x) & \varphi'_2(x) & \cdots & \varphi'_n(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) & \varphi_2^{(n-1)}(x) & \cdots & \varphi_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}
$$

También suele denotarse como $W(\varphi_1, \ldots, \varphi)(x)$, $W[\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)]$ ó $W(x)$.

Sean $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ soluciones de la ecuación $y''+a_1y'+a_2y = 0$ con $x \in I$ un intervalo, $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. Entonces

$\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ son linealmente independientes si y sólo si $W(\varphi_1, \varphi_2)(x) \neq 0 \quad \forall\, x \in I$

[Fórmula de Jacobi-Liouville] Sean $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ soluciones de la ecuación $y''+a_1y'+a_2y = 0$, $x_0 \in I$, entonces

$$
W(\varphi_1, \varphi_2)(x) = W(\varphi_1, \varphi_2)(x_0) e^{-a_1(x-x_0)}
$$

Nótese que si $\exists\, x_0 \in I$ tal que $W(\varphi_1, \varphi_2)(x_0) = 0$, entonces $W(\varphi_1, \varphi_2)(x) = 0 \quad \forall\, x \in I$, esto es, o se anula $W(\varphi_1, \varphi_2)(x)$ en todo I o no se anula en ningún $x \in I$.

En general,

$$
\frac{d}{dx}\left(W(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)\right) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \cdots & \varphi_n(x) \\ \varphi'_1(x) & \varphi'_2(x) & \cdots & \varphi'_n(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-2)}(x) & \varphi_2^{(n-2)}(x) & \cdots & \varphi_n^{(n-2)}(x) \\ \varphi_1^{(n)}(x) & \varphi_2^{(n)}(x) & \cdots & \varphi_n^{(n)}(x) \end{vmatrix}
$$

Sean $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ dos funciones. Si $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ son linealmente dependientes, entonces $W(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)(x) = 0$.

Nt́ese que el recíproco no es necesariamente cierto; no se puede garantizar que si $W(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)(x) = 0$ entonces $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ son linealmente dependientes. Lo que sí es cierto es que si $W(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)(x_0) \neq 0$ en cierto x_0, entonces $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ son linealmente independientes.

Sean $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ funciones en el intervalo I. Si para todo $x \in I$ se verifica que $W(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)(x) = 0$ y $\varphi_2(x) \neq 0$, entonces $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ son linealmente dependientes

El conjunto de soluciones de una ecuación diferencial lineal homogénea de coeficientes constantes de orden n es un espacio vectorial de dimensión n.

Si la ecuación diferencial $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$, $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, tiene una solución compleja $y = u(x) + iv(x)$, entonces $Re(y(x)) = u(x)$ y $Im(y(x)) = v(x)$ son también soluciones.

Sea la ecuación diferencial lineal homogénea real $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$, con $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. Si las condiciones iniciales son reales, entonces la solución general es real.

Sea una ecuación diferencial lineal homogénea $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$, con $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. Dadas las soluciones $\varphi_1(x)$ con las condiones iniciales $y(x_0) = y_{01}, y'(x_0) = y'_{01}$ y $\varphi_2(x)$ con las condiones iniciales $y(x_0) = y_{02}, y'(x_0) = y'_{02}$ se verifica que, si las condiciones iniciales son linealmente independientes, entonces las soluciones $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ son linealmente independientes.

3.4 Ecuaciones diferenciales lineales homogéneas de orden n con coeficientes constantes

Si $r_l = \alpha_1 + i\beta_1, \ldots, r_l = \alpha_l + i\beta_l$ son las $2l$ raíces complejas del polinomio característico con orden de multiplicidad $m_1, \ldots, m_l$ respectivamentey $r_{2l+1}, r_{2l+2}, \ldots, r_s$ son las raíces

reales del polinomio característico con orden de multiplicidad $m_{2l+1}, m_{2l+2}, \ldots, m_s$,

$$\begin{array}{llll}
e^{\alpha_1 x}cos\beta_1 x, & xe^{\alpha_1 x}cos\beta_1 x, & \ldots, & x^{m_1-1}e^{\alpha_1 x}cos\beta_1 x \\
e^{\alpha_1 x}sen\beta_1 x, & xe^{\alpha_1 x}sen\beta_1 x, & \ldots, & x^{m_1-1}e^{\alpha_1 x}sen\beta_1 x \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
e^{\alpha_n x}cos\beta_n x, & xe^{\alpha_n x}cos\beta_n x, & \ldots, & x^{m_n-1}e^{\alpha_n x}cos\beta_n x \\
e^{\alpha_n x}sen\beta_n x, & xe^{\alpha_n x}sen\beta_n x, & \ldots, & x^{m_n-1}e^{\alpha_n x}sen\beta_n x \\
e^{r_{2l+1}x}, & xe^{r_{2l+1}x}, & \ldots, & x^{m_{2l+1}-1}e^{r_{2l+1}x} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
e^{r_s x}, & xe^{r_s x}, & \ldots, & x^{m_s-1}e^{r_s x}
\end{array}$$

son las $n = \sum_{j=1}^{l} 2m_j + \sum_{j=2l+1}^{s} m_j$ soluciones $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$, que serán linealmente independientes si y sólo si $W(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \neq 0$.

3.5 Ecuaciónes diferenciales lineales no homogénea de orden n

El conjunto de las soluciones de una ecuación diferencial lineal homogénea de orden n es un espacio vectorial de dimensión n. El conjunto de las soluciones de una ecuación diferencial lineal no homogénea (completa) de orden n es un espacio afín de dimensión n asociado al espacio vectorial del conjunto de las soluciones de la ecuación homogénea asociada.

3.6 Métodos de coeficientes indeterminados

Existen varios métodos de resolución de ecuaciones diferenciales lineales completas (y homogéneas). A continuación estudiaremos el método de variación de las constantes y el método de los coeficientes indeterminados.

Se trata de determinar $c_1(x), c_2(x)$ tales que $y_p = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)$ sea una solución particular de la ecuación completa, donde $y_{gh} = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ es la solución

general de la ecuación homogénea. Exigiendo las condiciones

$$\begin{aligned} c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) &= 0 \\ c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) &= b(x) \end{aligned}$$

se obtiene que la solución particular de la ecuación completa es

$$y_{pc} = y_2(x)\int \frac{y_1(x)b(x)}{W(x)}dx - y_1(x)\int \frac{y_2(x)b(x)}{W(x)}dx$$

donde $W(x) = W(y_1, y_2)(x)$. Si la ecuación fuera de la forma $a_0y''+a_1y'+a_2y = b(x)$, entonces el coeficiente a_0 aparecería en la solución general

$$y_{pc} = y_2(x)\int \frac{y_1(x)b(x)}{a_0 \cdot W(x)}dx - y_1(x)\int \frac{y_2(x)b(x)}{a_0 \cdot W(x)}dx \tag{3.1}$$

Método de los coeficientes indeterminados

Este método sólo puede aplicarse si $b(x)$ es una exponencial, un polinomio, seno, coseno o combinación de éstas (aditiva o multiplicativa).

$$\begin{aligned} b(x) &= a \cdot e^{bx} \\ b(x) &= P_m(x) \\ b(x) &= a \cdot cos(qx) \\ b(x) &= b \cdot sen(qx) \end{aligned}$$

El Principio de Superposición dice que dada la ecuación diferencial lineal $y''+a_1y'+a_2y = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x)$ la solución general es $y = y_{gh} + y_{p1} + \cdots + y_{pn}$, donde y_{gh} es la solución general de la ecuación homogénea e y_{pi} es una solución particular de $y'' + a_1y' + a_2y = f_i(x)$ para cada $i = 1, \ldots, n$.

Según la forma de $b(x) = f_i(x)$ se obtiene una solución particular para la ecuación completa, que debe multiplicarse por x^m donde m es la multiplicidad de la raíz excepcional (si ésta existiera). El cuadro 3.1 resume cómo tratar con las distintas formas de $b(x)$.

Todos estos resultados para ecuaciones diferenciales lineales homogéneas y no homogéneas con coeficientes constantes de segundo grado, pueden generalizarse para un orden n cualquiera.

$b(x)$	y_p	raíz exc.
a	A (xA si la raíz es 0)	0
ax^m	$A_0x^n + \cdots + A_n$	0
$P_n(x)$	$A_0x^n + \cdots + A_n$	0
ae^{mx}	Ae^{mx}	m
$P_n(x)e^{mx}$	$(A_0x^n + \cdots + A_n)e^{mx}$	m
$bsen(qx)$	$Acos(qx) + Bsen(qx)$	$\pm iq$
$acos(qx)$	$Acos(qx) + Bsen(qx)$	$\pm iq$
$ae^{px}sen(qx)$	$(Acos(qx) + Bsen(qx))e^{px}$	$p \pm iq$
$ae^{px}cos(qx)$	$(Acos(qx) + Bsen(qx))e^{px}$	$p \pm iq$
$P_n(x)e^{px}sen(qx)$	$[(A_0x^n + \cdots + A_n)cos(qx) + (B_0x^n + \cdots + B_n)sen(qx)]e^{px}$	$p \pm iq$
$P_n(x)e^{px}cos(qx)$	$[(A_0x^n + \cdots + A_n)cos(qx) + (B_0x^n + \cdots + B_n)sen(qx)]e^{px}$	$p \pm iq$

Tabla 3.1: Relación de soluciones particulares y_p y sus raíces excepcionales para distintos coeficientes independientes $b(x)$ de la ecuación diferencial lineal completa.

Si $r_1, r_2, \ldots, r_s$ son las raíces reales del polinomio característico con orden de multiplicidad $m_1, m_2, \ldots, m_s$ respectivamente, entonces para cada $i = 1, \ldots, s$ las funciones $x^j e^{r_i x} \quad \forall\, j < m_i$ son soluciones de la ecuación $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_n y = 0$ y la solución general será

$$y = \varphi(x) = \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=0}^{m-1} c_{ij} x^j e^{r_i x} \tag{3.2}$$

con $c_{ij} \in \mathbb{R}$ constantes.

Un *sistema fundamental* de soluciones es un conjunto de soluciones linealmente independientes cuya combinación lineal es la solución general.

Método de variación de parámetros

Se trata de determinar $c_1(x), c_2(x)$ tales que $y_p = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)$ sea una solución particular de la ecuación completa, donde $y_{gh} = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ es la solución general de la ecuación homogénea. Exigiendo las condiciones

$$\begin{aligned} c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) &= 0 \\ c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) &= b(x) \end{aligned}$$

se obtiene que la solución particular de la ecuación completa es

$$y_{pc} = y_2(x)\int \frac{y_1(x)b(x)}{W(x)}dx - y_1(x)\int \frac{y_2(x)b(x)}{W(x)}dx$$

donde $W(x) = W(y_1, y_2)(x)$. Si la ecuación fuera de la forma $a_0y'' + a_1y' + a_2y = b(x)$, entonces el coeficiente a_0 aparecería en la solución general

$$y_{pc} = y_2(x)\int \frac{y_1(x)b(x)}{a_0 \cdot W(x)}dx - y_1(x)\int \frac{y_2(x)b(x)}{a_0 \cdot W(x)}dx \tag{3.3}$$

3.7 Aplicaciones a circuitos eléctricos en serie RCL

Los circuitos eléctricos, también llamados redes eléctricas, son un conjunto de elementos conectados entre sí, de manera que tienen un comportamiento determinado y predecible.

Son un caso de los muchos sistemas que pueden aparecer en la física. Será relevante analizar las variables del circuito que determinan su comportamiento.

> **Convención**: en las ecuaciones se utilizan letras minúsculas para representar las variables, siempre que puedan ser dependientes del tiempo. Las letras mayúsculas indicarán que permanecen constantes.

Carga eléctrica

La carga eléctrica es la más antigua de las variables que se hizo visible. Es una propiedad de la materia, no se puede decir qué es, pero se conocen sus propiedades; define el comportamiento de un cuerpo en los circuitos eléctricos. Es observable, medible y predecible.

Su unidad es el Coulomb (C).

La carga eléctrica de un electrón es de: $e = 1,6.10^{-19}C$. Es la carga mínima posible en la naturaleza.

La variable que indica la carga eléctrica suele ser $q(t)$, o bien Q si la carga es constante.

Intensidad de corriente eléctrica

La intensidad de corriente eléctrica es el flujo neto de cargas eléctricas moviéndose a través de una superficie. Es decir, es el movimiento de cargas (generalmente electrones) en el circuito eléctrico. Puede variar a lo largo del tiempo.

Su unidad es el Ampére (a), y es equivalente a Coulomb dividido segundos (C/s).

Es posible expresar la intensidad de corriente eléctrica en función de la carga, mediante la siguiente ecuación.

$$i(t) = \frac{dq}{dt} \tag{3.4}$$

Luego, es posible expresar la carga eléctrica en función de la intensidad de carga, mediante la siguiente ecuación.

$$q(t) = \int_{-\infty}^{t} i(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{0} i(\tau)d\tau + \int_{0}^{t} i(\tau)d\tau \tag{3.5}$$

Se considera que la integral desde $-\infty$ hasta cero representa las condiciones iniciales de la carga, y se la denomina q_0. De esta manera, se obtiene la siguiente fórmula para la carga eléctrica:

$$q(t) = q_0 + \int_{0}^{t} i(\tau)d\tau \tag{3.6}$$

Nota: A la intensidad de corriente que circula por un elemento del circuito, se la suele llamar simplemente *corriente*.

Energía eléctrica

Al igual que la carga eléctrica, la energía eléctrica es una variable que se puede apreciar, aún cuando no se pueda explicar su existencia. Está relacionada con la capacidad de desarrollar un trabajo, y como en la mayoría de los sistemas que se estudian en la física, se considera que la energía total se conserva.

Se la representa con la letra w. Su unidad es el Joule (J).

Potencia eléctrica

La potencia eléctrica consiste en la capacidad que tiene un determinado circuito eléctrico para desarrollar un trabajo, en un determinado tiempo. Y está dada por la variación de la energía en el tiempo.

Su unidad es el Watt (W), que es equivalente a J/s.

Para representar la potencia eléctrica, y la energía eléctrica, se utilizan las siguientes ecuaciones.

$$p(t) = \frac{d\omega}{dt} \tag{3.7}$$

$$\omega(t) = \omega_0 + \int_0^t p(\tau)d\tau \tag{3.8}$$

Potencial electrostático

El potencial electrostático es la variación de la energía eléctrica con respecto a la carga eléctrica. Se refiere a una partícula que entrega o recibe trabajo al moverse de un punto a otro.

Su unidad es el Volt (V), y se define de la siguiente manera: si una carga eléctrica de 1 Coulomb, se mueve entre dos puntos del espacio, variando su energía en 1 Joule, la diferencia de potencial entre esos dos puntos es de 1 Volt,

Es posible expresar el potencial electrostático con la siguiente ecuación.

$$v(t) = \frac{d\omega(t)}{dq} \tag{3.9}$$

De esta manera, es posible obtener una nueva definición para la potencia eléctrica.

$$p(t) = \frac{d\omega}{dt}\frac{dq}{dq} = \frac{d\omega}{dq}\frac{dq}{dt} = v(t)i(t) \tag{3.10}$$

Nota: A la diferencia de potencial (ddp) entre dos puntos, se la suele llamar *tensión* entre esos dos puntos. También se lo puede encontrar identificado con el nombre de *voltaje*.

Flujo y Campo magnéticos

El flujo magnético está definido por la ley de Faraday:

$$v(t) = \frac{d\phi}{dt} \tag{3.11}$$

El campo magnético puede apreciarse cuando aparece una fuerza en una partícula que se encuentra en movimiento.

Es necesario establecer la convención que se utilizará. Se considera positiva la carga del protón y negativa la del electrón.

Corrientes

En 1752, Benjamin Franklin estableció que la corriente circula desde el terminal positivo hacia el negativo. Luego se descubrió que en la realidad sucede exactamente al revés. Sin embargo, por cuestiones de simplicidad, se suele adoptar esa convención.

Se indicará con una flecha el sentido hacia el cual circula la corriente, que será positiva cuando circule en ese sentido y negativa cuando circule en el sentido contrario.

Diferencia de potencial

Si una carga q positiva que se lleva desde el punto A hasta el punto B, aumenta su energía, el potencial de B es mayor que el de A.

Podemos establecer que la diferencia de potencial (ddp) entre los puntos A y B será: $v_{AB} = v_A - v_B = \frac{\Delta E}{q}$. Esta diferencia v_{AB} será positiva cuando el potencial en A sea mayor que el potencial en B.

Elementos de dos terminales

Un elemento de un circuito es cualquier elemento que se pueda introducir en el circuito y que permita establecer relaciones eléctricas con el resto del circuito.

El terminal de un elemento es aquél punto que puede conectarse con otro terminal de otro elemento, de forma tal que circule corriente entre ellos.

Los elementos que tienen más de dos terminales pueden escribirse como una combinación de elementos de dos terminales.

Sentidos de referencia asociados

La corriente se considera positiva cuando ingresa por el terminal que se indique como positivo para la diferencia de potencial. Esto en la realidad es exactamente al revés, pero para el análisis de circuitos no tiene importancia, ya que se trata simplemente de una convención de signos.

Se indicará con una flecha el sentido que tiene la corriente, y luego se indicarán los terminales positivo y negativo.

Es decir que, para poder establecer los sentidos de referencia asociados a un determinado elemento, debe ser posible asociar al potencial un valor positivo o negativo para cada uno de los terminales.

Si un elemento no posee sentidos de referencia asociados, esto se debe a que la intensidad de corriente y la diferencia de potencial son independientes.

Si la potencia calculada según los sentidos de referencia asociados es positiva, el elemento está recibiendo potencia. Si, en cambio, la potencia calculada según los sentidos de referencia es negativa, el elemento está entregando potencia.

Tipos de elementos

Lineales o alineales son lineales aquellos elementos para los que vale el principio de superposición. Es decir, que el efecto producido por la suma de varias causas es equivalente a los efectos producidos por esas causas separadamente.

Tanto la derivación, la integración y la multiplicación por una constante son lineales sobre una función. De manera que si el efecto que produce el elemento está expresado por medio de alguna de estas tres posibilidades, o por combinaciones de ellas, el elemento es lineal.

En la vida real, ningún elemento es realmente lineal. Se utilizan modelos lineales para poder estudiar un sistema, porque consisten en una buena aproximación a la realidad.

Los transistores, por ejemplo, son elementos alineales, pero para ciertos análisis puede resultar útil considerar que son lineales dentro de una gama restringida de operación.

Variantes o invariantes en el tiempo son invariantes en el tiempo aquellos elementos que mantienen sus características en forma constante.

Al igual que en el caso de los elementos lineales, los elementos invariantes en el tiempo no existen en la realidad.

Sin embargo, según cómo se esté estudiando al sistema, si el tiempo de ensayo es mucho menor que la variación de las características, muchos elementos pueden considerarse invariantes en el tiempo.

Parámetros concentrados o no concentrados los elementos de parámetros concentrados son aquellos en los que todo el comportamiento eléctrico que puede ser atribuído a ese elemento, se concentra en un único punto.

Es decir que, el tamaño del elemento es lo suficientemente pequeño como para que los fenómenos se puedan considerar simultáneos en cualquier parte del elemento.

Un ejemplo de un elemento de parámetros no concentrados son las antenas, que pierden su energía en radiación.

Pasivos o activos son pasivos aquellos elementos en los cuales la energía total que reciben es, en todo momento, positiva.

$$\omega(t) = \int_{-\infty}^{t} p(\tau)d\tau > 0 \; \forall t \tag{3.12}$$

Los elementos activos son los que entregan energía al sistema, es decir, las fuentes de tensión y corriente. Para estos elementos, se cumple que no siempre la potencia es mayor que cero.

$$\exists t/\omega(t) < 0 \tag{3.13}$$

Los elementos que se considerarán para el análisis de circuitos serán lineales, invariantes en el tiempo y de parámetros concentrados. De forma que las ecuaciones diferenciales que se obtengan serán ordinarias y a coeficientes constantes.

Se trata de una simplificación de lo que sucede en la vida real, sin embargo, los valores que se obtengan de los cálculos se aproximarán bastante a los valores de la vida real.

Leyes de Kirchhoff

En 1845 Kirchhoff enunció las leyes que describen el comportamiento de las corrientes y las diferencias de potencial a lo largo de un circuito.

Ambas leyes son válidas para un circuito de **parámetros concentrados**.

Definiciones

Una **rama** de un circuito, consiste en una línea de circuito sobre la que está colocado un elemento.

Un **nodo** es un punto de la red al cual están conectadas una o más ramas del circuito.

Un **lazo** es un conjunto de elementos de red que forman un camino cerrado, de tal manera que los nodos que aparecen en el camino están incluidos una sola vez. No todos los nodos tienen que estar incluidos, pero ninguno puede estar repetido.

Una **malla** es un lazo dentro del cual no hay ningún otro elemento de circuito. El número de mallas de un circuito siempre es menor al número de lazos.

Ley de las corrientes

Según lo expresado por la **ley de la conservación de la carga**, en todo momento, la carga de un punto del circuito debe permanecer constante, es decir que no se debe acumular carga en ninguno de los nodos. Toda la carga que ingresa debe salir por algún camino.

De aquí se deduce la ley de Kirchhoff de las corrientes: *la suma algebraica de las corrientes de rama en cualquier nodo, debe ser cero, en cualquier instante de tiempo.*

$$\sum i(t) = 0 \tag{3.14}$$

En general, se aceptan como positivas las corrientes que ingresan al nodo, y negativas las que salen.

Otra forma de enunciar la misma ley será: la sumatoria de las corrientes que ingresan a un nodo, debe ser igual a la sumatoria de las corrientes que egresan de él.

la ecuación para el nodo 1 será: $i_1(t) + i_2(t) = 0$; mientras que la ecuación para el nodo 2 será: $-i_2(t) - i_3(t) - i_4(t) = 0$.

Es importante recalcar que esta ley debe cumplirse en todo momento, sin tener en cuenta si la corriente es constante o varía en el tiempo.

Ley de las diferencias de potencial

La **ley de la conservación de la energía** nos indica que toda carga que recorre un circuito, al volver al punto original debe tener la misma energía que tenía anteriormente en ese punto.

De aquí se deduce la ley de Kirchhoff para las diferencias de potencial: *La suma algebraica de las diferencias de potencial en las ramas, a lo largo de cualquier lazo, debe ser cero.*

$$\sum v(t) = 0 \tag{3.15}$$

Los sentidos de referencia que se apliquen a las diferencias de potencial deben ser los mismos que se asociaron a las corrientes asignadas a los nodos.

La ley nos dice que a lo largo de cualquier lazo, la sumatoria de las subidas de potencial debe ser igual a la sumatoria de las caídas de potencial.

Como se dijo anteriormente, se consideran positivas las caídas de potencial, y negativas las elevaciones de potencial. Al hablar de elevaciones o caídas de potencial, siempre se debe tomar el potencial de algún nodo como el potencial de referencia para nuestro circuito. A este valor de referencia se lo denomina **tierra**.

La ecuación para el lazo exterior será: $v_1(t) + v_4(t) = v_2(t) + v_5(t)$.

> **Nota:** Esta ley es válida solamente si se trabaja con circuitos de parámetros concentrados. Es decir, suficientemente chicos como para que la propagación de una onda electromagnética se realice en un tiempo nulo.

Dos elementos de un circuito están conectados en serie, cuando tienen únicamente un nodo común, al que no llega ningún otro elemento del circuito.

Teniendo en cuenta la ecuación (3.14), la corriente i_1 debe ser igual a la corriente i_2.

Conexión Paralelo

Dos elementos están conectados en paralelo, cuando tienen sus dos nodos en común.

De esta manera, dado que el potencial en el nodo A y el potencial en el nodo B son iguales para los dos elementos, también lo será la diferencia de potencial v_{AB}. Por lo cual, la diferencia de potencial v_1 debe ser igual a la diferencia de potencial v_2.

Elementos de circuito

Resistores

La resistencia eléctrica de un elemento consiste en su capacidad de disipar energía eléctrica en forma de calor. Está relacionada con las características de material, forma y tamaño del elemento.

Se denomina resistor al elemento cuya propiedad eléctrica predominante es la resistencia. Presenta una relación formal entre la tensión y la corriente, dada por la **Ley**

de Ohm:

$$R = \frac{v(t)}{i(t)} \tag{3.16}$$

La unidad de la resistencia es el ohm (Ω).

La inversa de la resistencia es la conductancia. Cuya unidad internacional es el siemens (S), pero generalmente se utiliza el mho ($\mho$).

$$G = \frac{1}{R} = \frac{i(t)}{v(t)} \tag{3.17}$$

Relación entre la corriente y la tensión

El valor de la resistencia estará dado por $R = \tan\alpha$. A medida que aumenta el valor de la resistencia, la pendiente de la recta se hace mayor.

Cuando $\alpha = \frac{\pi}{2}$, la conductancia es cero. Es decir, no circula corriente. A esta situación la llamamos **circuito abierto**.

Cuando $\alpha = 0$, la resistencia es cero. Es decir que, para cualquier corriente circulante, la diferencia de potencial será siempre nula. A esta situación la llamamos **cortocircuito**.

No existen elementos que tengan una resistencia negativa. Sin embargo, pueden construirse circuitos que se comporten como si su resistencia fuera negativa.

Energía y Potencia

La energía en un resistor está dada por:

$$\omega = \int_{-\infty}^{t} p(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{t} v(\tau)i(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{t} i^2(\tau)Rd\tau \tag{3.18}$$

Esta integral será siempre positiva. Por lo que es posible comprobar que los resistores son elementos pasivos.

Además, dado que la potencia es siempre positiva, los resistores son siempre disipativos. Es decir que no pueden acumular energía en ningún instante de tiempo. Toda la energía recibida será disipada en forma de calor.

La capacidad de disipar calor de un determinado resistor está relacionada con la potencia que se vaya a utilizar en el circuito. Si la potencia llegara a ser mayor a la estipulada, podría dañarse el elemento.

Resistores en Serie

Como se explicó en una conexión serie ambos elementos comparten la misma corriente.

Para obtener la resistencia equivalente para esta conexión[1], se considera un circuito con dos resistores en serie a los que se aplica una diferencia de potencial.

$$\begin{aligned} v(t) &= v_1(t) + v_2(t) \\ v(t) &= i(t)R_1 + i(t)R_2 \\ v(t) &= i(t)(R_1 + R_2) \\ \frac{v(t)}{i(t)} &= R_1 + R_2 = R_{eq} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} i_1(t) &= i_2(t) = i(t) \\ v_1(t) &= i(t)R_1 \\ v_2(t) &= i(t)R_2 \end{aligned}$$

Es decir que, al conectar los resistores en serie, la resistencia equivalente está dada por la suma de las resistencias. La ecuación (3.19) expresa esta relación para n resistores.

$$R_{eq} = \sum_{i=0}^{n} R_i \tag{3.19}$$

Resistores en Paralelo

Como ya se vio anteriormente, para dos elementos conectados en paralelo, la caída de potencial es la misma.

Se buscará a continuaciôn la resistencia equivalente de conectar dos resistores en paralelo a una fuente de tensión $v(t)$.

[1]Se dice que dos redes son equivalentes en un par de terminales si las relaciones de tensión y corriente en ambas redes son iguales en estos terminales

$$\begin{aligned} i(t) &= i_{R_1}(t) + i_{R_2}(t) \\ i(t) &= \frac{v(t)}{R_1} + \frac{v(t)}{R_2} \\ i(t) &= v(t)(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}) \\ \frac{i(t)}{v(t)} &= \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R_{eq}} \\ \frac{i(t)}{v(t)} &= G_1 + G_2 = G_{eq} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_{R_1}(t) &= v_{R_2}(t) = v(t) \\ i_{R_1}(t) &= \frac{v(t)}{R_1} \\ i_{R_2}(t) &= \frac{v(t)}{R_2} \end{aligned}$$

Es decir que, al conectar los resistores en paralelo, la conductancia equivalente está dada por la suma de las conductancias. La ecuación (3.20) expresa esta relación para n resistores.

$$G_{eq} = \sum_{i=0}^{n} G_i \tag{3.20}$$

Es decir que la inversa de la resistencia equivalente está dada por la suma de las inversas de las resistencias.

$$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{R_i} \tag{3.21}$$

Fuentes

En el análisis de circuitos se utilizan fuentes de tensión y de corriente. Ambos tipos de fuentes pueden ser independientes o controladas.

Las **fuentes independientes** son aquellas que entregan siempre el mismo valor, sin importar lo que suceda en el resto del circuito.

Las **fuentes controladas** son aquellas en las cuales el valor que entregan depende de una variable del circuito.

Circuitos con condiciones iniciales no nulas

Se trata de circuitos que no tienen fuentes interiores (con excitación nula) excitados únicamente por las condiciones iniciales de los elementos.

Estos circuitos tendran ecuaciones diferenciales homogéneas.

Si se conecta una resistencia en paralelo con un capacitor cargado, se obtiene un circuito RC de primer orden,

En este caso, utilizando la Ley de Kirchhoff de las corrientes, dada por la ecuación (3.14), la Ley de Ohm, dada por la ecuación (3.16) y la ecuación (**??**) de la corriente del capacitor, se puede llegar a la ecuación diferencial que caracteriza al circuito.

$$
\begin{aligned}
i_R(t) + i_C(t) &= 0 && (3.22)\\
i_R(t) &= -i_C(t) && (3.23)\\
\frac{v(t)}{R} &= -C\frac{dv(t)}{dt} && (3.24)
\end{aligned}
$$

La ecuación característica de este circuito RC, entonces, estará dada por la ecuación (3.25).

$$
\frac{dv(t)}{dt} + \frac{v(t)}{RC} = 0 \tag{3.25}
$$

Una vez obtenida la ecuación diferencial, es necesario encontrar la solución de la ecuación por los métodos estudiados en Análisis Matemático para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias.

A continuación, se resuelve esta ecuación (3.25) paso a paso.

$$
\begin{aligned}
\frac{dV(t)}{dt} &= -\frac{v(t)}{RC} && (3.26)\\
\frac{dv(t)}{v(t)} &= -\frac{dt}{RC} && (3.27)\\
\int \frac{dv(t)}{v(t)} &= -\frac{1}{RC}\int dt && (3.28)\\
\ln v(t) &= -\frac{t}{RC} + K && (3.29)\\
v(t) &= e^{-\frac{t}{RC}+K} = e^K e^{-\frac{t}{RC}} && (3.30)\\
v(t) &= Ae^{-\frac{t}{RC}} && (3.31)
\end{aligned}
$$

Para poder determinar el valor de la constante A es necesario utilizar las condiciones iniciales del circuito. Si, por ejemplo, la carga inicial del capacitor es V_0, se tiene que

$v(0) = Ae^0 = A = V_0$, de modo que la solución del circuito será la expresada por la ecuacion (3.32).

$$v(t) = \left(V_0 e^{-\frac{t}{RC}}\right) u(t) \tag{3.32}$$

A medida que la resistencia aumenta, el decrecimiento de la tensión se hace más lento, de modo que el comportamiento del circuito se acerca al de una fuente de tensión.

En este caso, RC es la constante de tiempo del circuito, usualmente denominada τ. Esta constante de tiempo representa el instante para el cual la diferencia de potencial del circuito se reduce un 36.8 del total. Además, se considera que una vez transcurridos 5τ, el circuito llega a su condición de estabilidad,en este caso $v(t) = 0$, toda la energía almacenada en el capacitor se ha perdido en forma de calor.

Si al circuito RC estudiado anteriormente se conecta una fuente de corriente,

la ecuación diferencial del circuito puede hallarse del mismo modo que con el circuito de excitación nula.

$$i_R(t) + i_C(t) = i(t) \tag{3.33}$$

$$\frac{v(t)}{R} + C\frac{dv(t)}{dt} = i(t) \tag{3.34}$$

La solución de la ecuación homogénea será igual a la encontrada anteriormente, es decir: $v_H(t) = Ae^{\frac{-t}{RC}}$. Para resolver la ecuación particular es necesario conocer $i(t)$.

Respuesta al escalón

Si, por ejemplo, $i(t) = Xu(t)$, la solución a proponer será $v_P(t) = K$. De modo que $\frac{dv(t)}{dt} = 0$, y al reemplazar en la ecuación diferencial se obtiene que $\frac{K}{R} = Xu(t)$, de donde $v_P(t) = RXu(t)$.

La solución completa estará dada por la ecuación (3.35).

$$v(t) = \left(Ae^{\frac{-t}{RC}} + RX\right) u(t) \tag{3.35}$$

Para encontrar el valor de la constante A es necesario utilizar las condiciones iniciales. En este caso, la tensión en el capacitor es nula en el instante $t = 0$, es decir $v(0) = A + RX = 0$, de modo que $A = -RX$.

Finalmente, se llega a que la tensión del circuito está dada por la ecuación (3.36).

$$v(t) = \left(1 - e^{\frac{-t}{RC}}\right) RX\ u(t) \tag{3.36}$$

Como se puede apreciar, esta solución tiene dos términos. El término de la exponencial negativa, que desaparece con el tiempo es llamado **solución transitoria**, mientras que el término constante, que no desaparece con el tiempo, es llamado **solución permanente**.

Es interesante notar que la solución a la ecuación homogénea está relacionada con el término transitorio, mientras que la solución particular está relacionada con el permanente.

Respuesta al coseno

Si, en cambio, la corriente entregada por la fuente es $i(t) = K\cos(\omega t)$, la solución a proponer y su derivada estarán dadas por las ecuaciones (3.37) y (3.38) respectivamente.

$$v_P(t) = K_1 \sin(\omega t) + K_2 \cos(\omega t) \tag{3.37}$$

$$\frac{dv_P(t)}{dt} = \omega K_1 \cos(\omega t) - \omega K_2 \sin(\omega t) \tag{3.38}$$

Al reemplazar en la ecuación diferencial se obtiene la ecuación (3.39).

$$X\cos(\omega t) = \frac{K_1}{R}\sin(\omega t) + \frac{K_2}{R}\cos(\omega t) + CK_1\omega\cos(\omega t) - CK_2\omega\sin(\omega t) \tag{3.39}$$

Agrupando las constantes que multiplican a los senos y cosenos, se puede ver que $\frac{K_2}{R} + CK_1\omega = X$ y $\frac{K_1}{R} - CK_2\omega = 0$.

$$K_1 = RC\omega K_2 \tag{3.40}$$

$$\frac{K_2}{R} + RC^2\omega^2 K_2 = X \tag{3.41}$$

$$K_2 = \frac{XR}{1 + R^2C^2\omega^2} \tag{3.42}$$

$$K_1 = \frac{XR^2C\omega}{1 + R^2C^2\omega^2} \tag{3.43}$$

La solución completa estará dada por la ecuación (3.44).

$$v(t) = \left(Ae^{\frac{-t}{RC}} + \frac{XR^2C\omega}{1+R^2C^2\omega^2} sen(\omega t) + \frac{XR}{1+R^2C^2\omega^2} \cos(\omega t) \right) u(t) \tag{3.44}$$

Nuevamente, para encontrar el valor de la constante A es necesario utilizar las condiciones iniciales. En este caso, la tensión en el capacitor es nula en el instante $t = 0$, es decir $v(0) = A + \frac{XR}{1+R^2C^2\omega^2} = 0$, de modo que $A = -\frac{XR}{1+R^2C^2\omega^2}$.

En este caso, el término permanente de la ecuación es la suma de dos funciones senoidales. Es decir que una vez que haya concluído el período transitorio, la corriente seguirá variando en el tiempo, en forma senoidal.

Respuesta a la rampa

Otra función que puede utilizarse como excitación de la fuente es $i(t) = Ktu(t)$. En este caso, la solución particular está dada por $v_P(t) = K_1t + K_2$, y su derivada será $\frac{dv_P(t)}{dt} = K_1$.

Reemplazando en la ecuación diferencial, se obtiene $\frac{K_1t+K_2}{R} + CK_1 = Ktu(t)$. De donde es evidente que $K_1 = RK$ y $K_2 = -R^2KC$.

La ecuación general estará dada por $v(t) = Ae^{\frac{-t}{RC}} + RKt - R^2KC$. Utilizando la condición inicial nula se puede obtener el valor de la constante A, $v(0) = A - R^2KC$, de modo que (3.45) será la ecuación final.

$$v(t) = \left[-R^2KC \left(1 - e^{\frac{-t}{RC}} \right) + RKt \right] u(t) \tag{3.45}$$

Respuesta al impulso

Finalmente, también es posible excitar el circuito con un impulso $i(t) = K\delta(t)$. Sin embargo, el comportamiento que se observe al utilizar el impulso será distinto del comportamiento observado con las otras excitaciones.

Teniendo en cuenta la ecuación (**??**), es posible observar que el impulso de corriente aplicado al capacitor cambia las condiciones iniciales del circuito.

$$v_C(0^+) = \frac{1}{C} \int_{0^-}^{0^+} K\delta(t) = \frac{K}{C} \tag{3.46}$$

Es decir que, se trata de un circuito con condiciones iniciales nulas y con una excitación dada por una fuente de corriente, pero si se analiza a partir del instante $t = 0^+$,

se puede ver como un circuito con condiciones iniciales no nulas pero sin excitación. La respuesta estará dada por la ecuacion (3.32), con $V_0 = \frac{K}{C}$.

Como ya se dijo, no es posible crear una $\delta(t)$ en la vida real, sin embargo si el tiempo de duración de la corriente es mucho menor que el coeficiente τ del circuito, es posible apreciar un comportamiento similiar al generado por el impulso ideal.

3.8 Ecuación de Euler-Cauchy o ecuación equidimensional

La ED de Cauchy-Euler de orden n tiene la siguiente forma general:

$$a_n x^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1 x \frac{dy}{dx} + a_0 y = g(x), \text{ donde } a_0, a_1, \ldots, a_n \text{ son constantes.}$$

La ED de Cauchy-Euler de orden 3 tiene la siguiente forma:

$$a_3 x^3 \frac{d^3 y}{dx^3} + a_2 x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + a_1 x \frac{dy}{dx} + a_0 y = g(x).$$

Este tipo de ED se puede reducir a una ED de coeficientes constantes, si se realiza el siguiente cambio de variable:

$$x = e^t.$$

Derivamos usando la regla de la Cadena:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{d}{dt}(e^t)} = \frac{\frac{dy}{dt}}{e^t} = e^{-t}\frac{dy}{dt}.$$

Es decir,

$$y' = \frac{dy}{dx} = e^{-t}\frac{dy}{dt}.$$

Al calcular la segunda derivada:

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'}{dx} = \frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{d}{dt}\left(e^{-t}\frac{dy}{dt}\right)}{\frac{d}{dt}(e^t)} = \frac{e^{-t}\frac{d^2y}{dt^2} - e^{-t}\frac{dy}{dt}}{e^t} = e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right).$$

Es decir,

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right).$$

Para la tercera derivada encontramos que

$$y''' = \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{dy''}{dx} = \frac{\frac{dy''}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{d}{dt}\left[e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)\right]}{\frac{d}{dt}(e^t)} =$$

$$= \frac{e^{-2t}\left(\frac{d^3y}{dt^3} - \frac{d^2y}{dt^2}\right) - 2e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)}{e^t} = e^{-3t}\left(\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}\right)$$

Es decir,

$$y''' = \frac{d^3y}{dx^3} = e^{-3t}\left(\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}\right)$$

Al usar estas ecuaciones, y tomando en consideración que $x^{-1} = e^{-t}$, obtenemos una ED con coeficientes constantes y de variable t.

CAPITULO 4

Transformada de Laplace

4.1 Definición de la Transformada de Laplace

Introducción

En el modelo matemático de un sistema físico, como el de una masa m sujeta a un resorte o el de un circuito eléctrico en serie, el lado derecho de la ecuación diferencial

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \beta\frac{dx}{dt} + kx = f(t) \qquad\qquad L\frac{d^2q}{dt^2} + \beta\frac{dq}{dt} + kq = E(t)$$

es una función que representa una fuerza externa $f(t)$ o un voltaje $E(t)$. Hasta ahora hemos resuelto problemas para los cuales estas funciones eran continuas. Sin embargo, no es raro encontrarse con funciones continuas a trozos; por ejemplo, en circuitos eléctricos son muy comunes los voltajes dientes de sierra o escalón. Es difícil, pero no imposible, resolver la ecuación diferencial que describe el circuito en este caso, pero la transformada de Laplace es una valiosa herramienta para resolver problemas de este tipo.

Usaremos la transformada de Laplace en la solución de ecuaciones integrales, de sistemas de ecuaciones diferenciales y también la aplicaremos al cálculo de integrales.

En el capítulo anterior trabajamos con el operador derivación D, el cual es un caso particular de funciones más generales llamadas transformaciones lineales. Ahora estudiaremos una nueva transformación lineal que es un caso especial de una clase de transformaciones lineales de especial interés, llamadas transformaciones integrales. Para comprender en qué consisten, consideremos funciones $f(t)$ definidas en un intervalo

finito o infinito $a \leq t \leq b$ y tomemos una función fija $K(s,t)$ de variable t y parámetro s. Entonces, en general una transformación integral tiene la forma

$$T\left(f(t)\right) = F(s) = \int_a^b K(s,t)f(t)dt$$

La función $K(s,t)$ se llama núcleo de la transformación T. Claramente T es lineal, sin importar la naturaleza de la función $K(s,t)$. El estudio de estas transformaciones integrales generalizadas a conducido al análisis de ciertas transformaciones específicas que han resultado de mucha utilidad al abordar ciertos problemas. Una de estas transformaciones especiales se obtiene haciendo $a = 0$, $b = \infty$ y $K(s,t) = e^{-st}$, como vemos en la siguiente definición.

Definición Transformada de Laplace Suponga que la función $y(t)$ está definida para $t \geq 0$ y la integral impropia

$$\int_0^\infty e^{-st}y(t)dt$$

converge para $s > s_0$. Entonces la transformada de Laplace de $y(t)$ existe para $s > s_0$ y está dada por

$$y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}y(t)dt$$

Antes de dar alguna teoría que nos facilite el trabajo, vamos a calcular la transformada de Laplace de algunas funciones, usando esta definición.

Ejemplo

Calcule $\mathcal{L}\{1\}$.

Solución Por definición

$$\mathcal{L}\{1\} = \int_0^\infty e^{-st}dt = \left.\frac{e^{-st}}{-s}\right|_0^\infty = \frac{1}{s},$$

para $s > 0$.

Ejemplo Calcule $\mathcal{L}\{t\}$.

Solución Usando la definición

$\mathcal{L}\{t\} = \int_0^\infty te^{-st}dt$

$= \left.\frac{te^{-st}}{-s}\right|_0^\infty + \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st}dt$

$= 0 + \frac{1}{s}\mathcal{L}\{1\}$

$= \frac{1}{s}\frac{1}{s}$

$= \frac{1}{s^2}$

Observación: no resulta difícil intuir a partir de estos ejemplos la siguiente transformada

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

para $s > 0$ y $n \geq 0$. Dejamos al lector la comprobación de esta fórmula (sugerencia use inducción matemática).

Ejemplo Calcule $\mathcal{L}\{e^{kt}\}$.

Solución Usando la definición

$\mathcal{L}\{e^{kt}\} = \int_0^\infty e^{-st}e^{kt}dt$

$= \int_0^\infty e^{(k-s)t}dt$

$= \left.\frac{e^{(k-s)t}}{k-s}\right|_0^\infty$

$= \frac{1}{s-k}$

para $s > k$.

Un par de transformadas particularmente útiles son las de las funciones trigonométricas $Sen(t)$ y $Cos(t)$, que calculamos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo Calcule $\mathcal{L}\{Sen(kt)\}$ y $\mathcal{L}\{Cos(kt)\}$.

Solución Usando la definición

$$\mathcal{L}\{Sen(kt)\} = \int_0^\infty e^{-st} Sen(kt)dt$$

$$= -\frac{e^{-st}Sen(kt)}{s}\bigg|_0^\infty + \frac{k}{s}\int_0^\infty e^{-st}Cos(kt)dt$$

$$= 0 + \frac{k}{s}\mathcal{L}\{Cos(kt)\}$$

$$= \frac{k}{s}\mathcal{L}\{Cos(kt)\}$$

Por otro lado

$$\mathcal{L}\{Cos(kt)\} = \int_0^\infty e^{-st} Cos(kt)dt$$

$$= -\frac{e^{-st}Cos(kt)}{s}\bigg|_0^\infty - \frac{k}{s}\int_0^\infty e^{-st}Sen(kt)dt$$

$$= \frac{1}{s} - \frac{k}{s}\int_0^\infty e^{-st}Sen(kt)dt$$

$$= \frac{1}{s} - \frac{k}{s}\mathcal{L}\{Sen(kt)\}$$

$$= \frac{1}{s} - \frac{k}{s}\left(\frac{k}{s}\mathcal{L}\{Sen(kt)\}\right)$$

$$= \frac{1}{s} - \frac{k^2}{s^2}\mathcal{L}\{Cos(kt)\}$$

De donde concluimos que

$$\mathcal{L}\{Cos(kt)\} = \frac{s}{s^2 + k^2},$$

para $s > 0$.

Y retomando la transformada de $Sen(kt)$

$$\mathcal{L}\{Sen(kt)\} = \frac{k}{s}\mathcal{L}\{Cos(kt)\} = \frac{k}{s}\frac{s}{s^2+k^2} = \frac{k}{s^2+k^2},$$

para $s > 0$.

Observación: podemos calcular la transformada $Cos(t)$ usando su representación compleja. Como

$$Cos(t) = \frac{e^{it}+e^{-it}}{2}$$

tenemos que

$\mathcal{L}\left\{Cos(kt)\right\} = \mathcal{L}\left\{\dfrac{e^{ikt}+e^{-ikt}}{2}\right\}$

$= \dfrac{1}{2}\left(\mathcal{L}\left\{e^{ikt}\right\} + \mathcal{L}\left\{e^{-ikt}\right\}\right)$

$= \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{s-ik} + \dfrac{1}{s+ik}\right)$

$= \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2s}{s^2+k^2}\right)$

$= \dfrac{s}{s^2+k^2}$

De forma análoga usando

$$Sen(t) = \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}$$

podemos calcular $\mathcal{L}\left\{Sen(kt)\right\}$.

Ejemplo Calcule $\mathcal{L}\{f(t)\}$, donde

$$f(t) = \begin{cases} t^2+1 & \text{Si } 0 \leq t \leq 1 \\ t-1 & \text{Si } t > 1 \end{cases}$$

Solución Por definición

$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$

$$= \int_0^1 \left(t^2+1\right) e^{-st}dt + \int_1^\infty (t-1)\, e^{-st}dt$$

$$= -e^{-st}\left(\frac{t^2+1}{s} + \frac{2t}{s^2} + \frac{2}{s^3}\right)\Bigg|_1^\infty - e^{-st}\left(\frac{t-1}{s} + \frac{1}{s^2}\right)\Bigg|_1^\infty$$

$$= \frac{s^2+2-e^{-s}\left(s^2+s+1\right)}{s^3} + \frac{e^{-s}}{s^2}$$

$$= \frac{s^2+2-e^{-s}\left(s^2+2s+1\right)}{s^3}$$

Propiedades de la Transformada de Laplace

Como la transformada de Laplace se define en términos de una integral impropia que puede ser divergente, existen funciones para las cuales no existe dicha transformada, incluso hay funciones discontinuas, como la del ejemplo anterior, que pueden tener transformada; entonces, ¿ bajo qué condiciones una funciones tienen transformada de Laplace ?. Antes de dar una respuesta parcial a esta pregunta debemos dar algunas definiciones.

Definición [Funciones continuas a trozos] Decimos que una función $f : [a, b] \to I\!R$ es continua a trozos si

f está definida y es continua en todo $x \in [a, b]$, salvo en un número finito de puntos x_k, para $k = 1, 2, \ldots, n$.

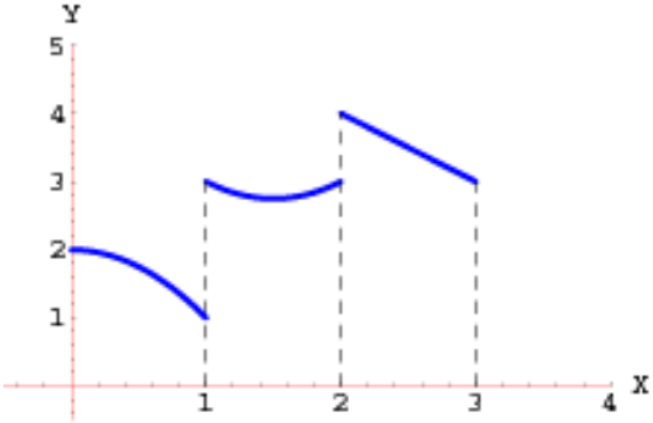
Para cada $x_k \in [a, b]$ los límites

$$f(x_k^+) = \lim_{h\to 0} f(x_k + h) \qquad f(x_k^-) = \lim_{h\to 0} f(x_k - h)$$

existen. Note que, solamente uno de estos límites es pertinente si x_0 es uno de los extremos de $[a, b]$.

En general, el requisito de que estos límites sean finitos en todos los puntos x_k implica que las únicas discontinuidades de f son discontinuidades de salto, del tipo que

aparecen el la.



Intuitivamente podríamos pensar que las funciones continuas a trozos son casi continua o que no son demasiado discontinua.

Otra de las ideas importantes en el estudio de la existencia de la transformada de Laplace es que entendemos porqué una función no crezca demasiado rápido.

Definición [Funciones de orden exponencial] Decimos que la función $f : [0, +\infty[\to I\!R$ es de orden exponencial si existen números k, $M > 0$ y $T > 0$ tales que

$|f(t)| \leq Me^{kt}$

para $t > T$

Intuitivamente esto significa que la función $f(t)$ esta por debajo de una función exponencial,

Observación: algunas veces, para verificar que una función f es de orden exponencial, conviene calcular el siguiente límite:

$\lim_{t\to\infty} \frac{|f(t)|}{e^{kt}} = L$

para algún valor de k. Si L es finito, entonces M puede ser cualquier número mayor que L (y este determina T). Por otro lado, si $L = \infty$, f no es de orden exponencial.

Ejemplo Compruebe que $f(t) = t^3$ es de orden exponencial.

Solución Para comprobar esto, apliquemos tres veces la regla de L'Hôpital

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t^3}{e^{kt}} = \lim_{t\to\infty} \frac{3t^2}{ke^{kt}} = \lim_{t\to\infty} \frac{6t}{k^2e^{kt}} = \lim_{t\to\infty} \frac{6}{k^3e^{kt}} = 0,$$

para cualquier número positivo k. Por lo tanto, si t es suficientemente grande $|t^3| < e^t$, y así t^3 es de orden exponencial.

Ejemplo Compruebe que la función $f(t) = e^{bt}$ es de orden exponencial para cualquier valor de b.

Solución Calculando el límite
$\lim_{t\to\infty} \frac{e^{bt}}{e^{kt}} = \lim_{t\to\infty} e^{(b-k)t} = 0$
siempre y cuando $k > b$. De donde, $e^{bt} < e^{kt}$ para t grande.

Observación: no es difícil comprobar que cualquier polinomio de grado n o función trigonométrica como Sen(bt), Cos(bt), con b constante, son de orden exponencial, así como, las sumas y productos de un número finito de estas funciones. En general, si $f(t)$ y $g(t)$ son de orden exponencial la suma $f(t) + g(t)$ y el producto $f(t) \cdot g(t)$ son de orden exponencial.

Ejemplo Compruebe que la función $f(t) = e^{t^2}$ no es de orden exponencial.

Solución Calculando el límite tenemos que
$\lim_{t\to\infty} \frac{e^{t^2}}{e^{kt}} = \lim_{t\to\infty} e^{t^2-kt} = \infty$
para cualquier valor de k, con lo cual la función $f(t) = e^{t^2}$ no es de orden exponencial.

El siguiente resultado enuncia un resultado que parece obvio.

Teorema [Funciones acotadas] Sea $f : [0, +\infty[\to I\!R$ una función acotada, entonces es de orden exponencial.

Demostración

Como f es acotada $|f(t)| \leq M$ para todo $t \in [0, \infty[$. Entonces

$$\lim_{t\to\infty} \frac{|f(t)|}{e^{kt}} \leq \lim_{t\to\infty} \frac{M}{e^{kt}} = 0,$$

para cualquier $k > 0$, con lo cual f es de orden exponencial.

Observación: como $Sen(bt)$ y $Cos(bt)$ son acotadas, son de orden exponencial.

Una vez definidos los conceptos de función continua a trozos y función de orden exponencial ya estamos listos para enunciar una condición necesaria para la existencia de la transformada de Laplace.

Teorema [Existencia de la transformada] Sea $y : [0, +\infty[\to I\!R$ una función continua a trozos y de orden exponencial, entonces la transformada de Laplace de $y(t)$ existe. Es decir, existe un número s_0 tal que $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$ existe para $s > s_0$.

Demostración

Por ser f de orden exponencial existen números no negativos T, k y M tales que $|y(t)| \leq Me^{kt}$, para $t > T$. Así que

$$\mathcal{L}\{y(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} y(t)dt$$

$$= \int_0^T e^{-st} y(t)dt + \lim_{b\to\infty} \int_T^b e^{-st} y(t)dt$$

La primera integral

$$\int_0^T e^{-st} y(t)dt$$

es una integral definida, por tanto existe. Para la segunda integral note que

$$\left| \int_T^b e^{-st} y(t)dt \right| \leq \int_T^b e^{-st} |y(t)|dt$$

$$\leq \int_T^b e^{-st} Me^{kt} dt$$

$$= M \int_T^b e^{(k-s)t} dt$$

$$= M \frac{e^{(k-s)b} - e^{(k-s)T}}{k-s}$$

Ahora, como

$$\frac{M}{k-s} \lim_{b\to\infty} \left(e^{(k-s)b} - e^{(k-s)T} \right) = \frac{Me^{-(s-k)T}}{s-k}$$

siempre y cuando $s > k$, tenemos que la integral

$$\int_T^b e^{-st} y(t)dt$$

existe y con ello la transformada.

Observación: el teorema anterior enuncia una condición suficiente y no necesaria para la existencia de la transformada de Laplace, es decir, puede darse el caso de una función f que no cumpla las hipótesis del teorema, pero aún así tenga transformada, como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo Compruebe que la transformada

$$\mathcal{L}\{\frac{1}{\sqrt{t}}\}$$

existe, aún cuando $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$ no cumple las hipótesis del teorema de existencia anterior.

Solución Claramente $f(t) = \sqrt{t}$ tiene una discontinuidad infinita en $x = 0$, con lo cual no es continua a trozos en el intervalo $[0, \infty[$; pero

$$\mathcal{L}\left\{\frac{1}{\sqrt{t}}\right\} = \int_0^\infty \underbrace{\frac{e^{-st}}{\sqrt{t}}}_{u=st} dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{u}} \int_0^\infty \underbrace{\frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}}_{z^2=u} du$$

$$= \frac{2}{\sqrt{s}} \int_0^\infty e^{-z^2} dz$$

Para calcular esta última integral sea

$$I_b = \int_0^b e^{-x^2} dx = \int_0^b e^{-y^2} dy$$

con lo cual

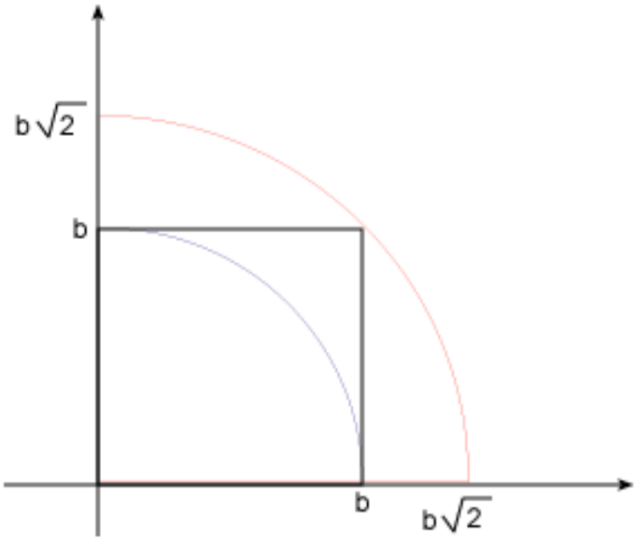
$$\lim_{b \to +\infty} I_b = \int_0^\infty e^{-x^2} dx$$

Ahora note que

$$I_b^2 = \left(\int_0^b e^{-x^2} dx\right)\left(\int_0^b e^{-y^2} dy\right)$$

$$= \int_0^b \int_0^b e^{-(x^2+y^2)} dxdy$$

$$= \int_R e^{-(x^2+y^2)} dxdy$$



Donde R es el cuadrado de lado b, que se muestra en la figura anterior Observe que si R_1 y R_2 son las regiones que se muestran en la figura entonces

$$\iint_{R_1} e^{-(x^2+y^2)} dxdy \leq I_b^2 \leq \iint_{R_2} e^{-(x^2+y^2)} dxdy$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^b re^{-r^2} drd\theta \leq I_b^2 \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{b\sqrt{2}} re^{-r^2} drd\theta$$

$$\frac{\pi\left(1-e^{-b^2}\right)}{4} \leq I_b^2 \leq \frac{\pi\left(1-e^{-2b^2}\right)}{4}$$

Con lo cual, tomando el límite

$$\lim_{b\to\infty} I_b^2 = \frac{\pi}{4}$$

Y así, $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Por lo tanto

$\mathcal{L}\left\{\frac{1}{\sqrt{t}}\right\} = \sqrt{\frac{\pi}{s}}$

El siguiente ejemplo muestra una función para la cual no existe la transformada de Laplace.

Ejemplo Compruebe que

$\mathcal{L}\{\frac{1}{t^2}\}$

no existe.

Solución Usando la definición

$\mathcal{L}\{\frac{1}{t^2}\} = \int_0^\infty \frac{e^{-st}}{t^2}dt$

$= \int_0^1 \frac{e^{-st}}{t^2}dt + \int_1^\infty \frac{e^{-st}}{t^2}dt$

Y puesto que la integral impropia

$\int_0^1 \frac{e^{-st}}{t^2}dt$

diverge, la transformada no existe.

Observación: la otra integral

$\int_1^\infty \frac{e^{-st}}{t^2}dt$

es convergente para $s > 0$, pues

$\frac{e^{-st}}{t^2} \leq \frac{1}{t^2}$

La integral

$\int_0^1 \frac{e^{-st}}{t^2}dt$

diverge, pues, por el criterio de comparación

$\lim_{t\to 0^+} \frac{\frac{e^{-st}}{t^2}}{\frac{1}{t^2}} = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{e^{-st}} = 1$

para toda s, con lo cual ambas integrales convergen o divergen; pero

$\int_0^1 \frac{1}{t^2}dt$

diverge.

Función Gamma

Ahora estudiaremos una función conocida como la función gamma $\Gamma(x)$, la cual es de gran importacia en análisis y en aplicaciones. Esta función se define en términos de una integral impropia, la cual no puede calcularse en términos de funciones elementales.

Definición [Función Gamma] La función $\Gamma : [0, \infty[\to I\!R$ dada por

$$\int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$$

se conoce como la función gamma.

El siguiente teorema establece una de las propiedades más importantes de la función gamma.

Teorema [Recursividad de gamma] Para toda $x > 0$ se tiene que

$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$

Demostración

Integrando por partes

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt = \underbrace{\left.\frac{e^{-t}t^x}{x}\right|_0^\infty}_{0} + \frac{1}{x}\int_0^\infty e^{-t} t^x dt = \frac{1}{x}\Gamma(x+1)$$

Ejemplo Calcule $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$.

Solución

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty \underbrace{t^{-\frac{1}{2}} e^{-t}}_{u^2=t} dt = 2\int_0^\infty e^{u^2} du = \sqrt{\pi}$$

El resultado anterior puede generalizarse, como muestra en el siguiente corolario.

Corolario [Recursividad de Gamma] Para $x > 0$, $p = 1, 2, \ldots$ y $n = 1, 2, \ldots$ se tiene que

$\Gamma(x+p) = (x+p-1)(x+p-2)\ldots x\Gamma(x)$

Observación: de los resultados anteriores obtenemos que $\Gamma(n+1) = n!$, por esta razón se conoce a esta función como el factorial generalizado.

Ejemplo Calcular los valores de $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$, $\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)$, $\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)$.

Solución Usando la propiedad recursiva, tenemos que

Para $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$:

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Para $\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)$:

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{3}{2}+1\right) = \frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}$$

Para $\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)$:

$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \Gamma\left(-\frac{1}{2}+1\right)\sqrt{\pi} = -\frac{1}{2}\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)$

De donde

$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{\pi}$

Definición [Función Beta] La siguiente integral

$\beta(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt$

se conoce como la función beta.

El siguiente teorema enuncia algunas de las propiedades de la función Beta.

Teorema [Propiedades de la función beta]

La función $\beta(x,y)$ converge para $x>0$, $y>0$.

$\beta(x,y) = \beta(y,x)$.

Para $x>0$, $y>0$ se tiene que

$\beta(x,y) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (Sen(t))^{2x-1}(Cos(t))^{2y-1}\,dt$

Para $x>0$, $y>0$ se tiene que

$\beta(x,y) = \int_0^{\infty} \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}}dt$

Para $x>0$, $y>0$ se tiene que

$\beta(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$

Demostración

Para demostrar que la integral convege, separemos la integral en dos partes

$\beta(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt = \int_0^{1/2} t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 t^{x-1}\underbrace{(1-t)^{y-1}}_{u=1-t}dt =$

$\int_0^{1/2} t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt + \int_0^1 u^{y-1}(1-u)^{x-1}\,dt$

Ahora, observe que la primera integral convwerge si

$1-x<1 \Rightarrow x>0$

y de igual manera, la segunda integral converge si

$1-y<1 \Rightarrow y>0$

Para demostrar esta propiedad basta hacer un cambio de variable $u=1-t$

$\beta(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}\underbrace{(1-t)^{y-1}}_{u=1-t}dt = \int_0^1 u^{y-1}(1-u)^{x-1}\,dt = \beta(y,x)$

Haciendo el cambio de variable

$t = Sen^2(u) \Rightarrow dt = 2Sen(u)Cos(u)du$

tenemos que

$$\beta(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}\underbrace{(1-t)^{y-1}}_{t=Sen^2(u)}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(Sen^2(u)\right)^{x-1}\left(1-Sen^2(u)\right)^{y-1}2Sen(u)Cos(u)du$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(Sen(t)\right)^{2x-1}\left(Cos(t)\right)^{2y-1}dt$$

Haciendo el cambio de variable

$$t=\frac{u}{1+u}\Rightarrow dt=\frac{du}{(1+u)^2}$$

tenemos que

$$\beta(x,y)\ =\ \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt\ =\ \int_0^\infty\left(\frac{u}{1+u}\right)^{x-1}\left(1-\frac{u}{1+u}\right)^{y-1}\frac{1}{(1+u)^2}du\ =$$

$$\int_0^\infty\frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}du$$

La demostración de este resultado es un tanto más compleja y se sale de los objetivos del curso, por esta razón no la haremos.

Ejemplo Calcule el valor de la siguiente integral

$$\int_0^\infty\frac{t^3}{(1+t)^7}dt$$

Solución Usando los resultados del teorema anterior

$$\int_0^\infty\frac{t^3}{(1+t)^7}dt=\beta(4,3)=\frac{\Gamma(3)\Gamma(4)}{\Gamma(7)}=\frac{12}{720}=\frac{1}{60}$$

Observe que cuando n es muy grande es extremadamente difícil calcular $n!$, aún con la ayuda de logaritmos. Por ejemplo, la tarea de determinar el número de posibles formas de barajar un maso de cartas podría tomar mucho tiempo, pues involucra el calculo de 52!. El siguiente teorema establece que $(n/e)^n\sqrt{2\pi n}$ es una buena aproximación de $n!$, cuando n es muy grande.

Teorema [Fórmula de Stirling]

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}}{n!}=1$$

Observación: del la fórmula de Stirling1.4 tenemos que

$$\Gamma(n+1)\approx n^ne^{-n}\sqrt{2\pi n}$$

Y por último el siguiente teorema expresa la relación entre la función $\Gamma(x)$ y la transformada.

Teorema [Transformada de t^x] Para $x>0$, tenemos que

$$\mathcal{L}\{t^x\}=\frac{\Gamma(x+1)}{s^{x+1}}$$

Demostración

Usando la definición de transformada y la sustitución $u = st$, tenemos que
$\mathcal{L}\{t^x\} = \int_0^\infty e^{-st}t^x dt = \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-u}\left(\frac{u}{s}\right)^{-u} du = \frac{1}{s^{x+1}}\int_0^\infty u^x e^{-u} du = \frac{\Gamma(x+1)}{s^{x+1}}$
Ejemplo Calcule
$\mathcal{L}\left\{\frac{1}{\sqrt{t}}\right\}$
Solución

Usando el teorema anterior
$\mathcal{L}\left\{\frac{1}{\sqrt{t}}\right\} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\sqrt{s}} = \sqrt{\frac{\pi}{s}}$
Ejemplo Calcule
$\mathcal{L}\left\{\frac{1}{\sqrt{s-2}}\right\}$
Solución Usando el primer teorema de traslación, tenemos que
$\mathcal{L}\left\{\frac{1}{\sqrt{s-2}}\right\} = e^{2t}\mathcal{L}\left\{\frac{1}{\sqrt{s}}\right\} = \frac{e^{2t}}{\sqrt{\pi t}}$
Ejemplo Calcule $\mathcal{L}\{J_0(t)\}$ donde $J_0(t)$ es la función de Bessel de orden cero dada por la serie
$J_0(t) = 1 - \frac{t^2}{2^2} + \frac{t^4}{2^2 4^2} - \frac{t^6}{2^2 4^2 6^2} + \cdots$
Solución Aplicando transformada de Laplace

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{J_0(t)\} &= \frac{1}{s} - \frac{1}{2^2}\frac{2!}{s^3} + \frac{1}{2^2 4^2}\frac{4!}{s^5} + \frac{1}{2^2 4^2 6^2}\frac{6!}{s^7} + \cdots \\
&= \frac{1}{s}\left\{1 - \frac{1}{2}\frac{1}{s^2} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{1}{s^4} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{1}{s^6} + \cdots\right\} \\
&= \frac{1}{s}\left\{\left(1 + \frac{1}{s^2}\right)^{-1/2}\right\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{s^2+1}}
\end{aligned}$$

Observación: en este ejemplo hemos usado que
$\frac{1}{\sqrt{x+1}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + \cdots$
para $|x| < 1$.

Función impulso unitario

Algunos sistemas mecánicos suelen estar sometidos a una fuerza externa (o a una tensión eléctrica en el caso de los circutitos eléctricos) de gran magnitud, que solamente actúa durante un tiempo muy corto. Por ejemplo, una descarga elétrica podría caer

sobre el ala vibrante de un avión; a un cuerpo sujeto a un resorte podría dársele un fuerte golpe con un martillo, una pelota (de beisbol, de golf o de tenis) inicialmente en reposo, podría ser enviada velozmente por los aires al ser golpeada con violencia con un objeto como una bat de beisbol, un bastón de golf o una raqueta de tenis. La función impulso unitario puede servir como un modelo para tal fuerza.

Definición [Impulso unitario] La función $\delta_a : [0, +\infty[\to I\!R$ dada por

$$\delta_a(t - t_0) = \begin{cases} 0 & \text{Si } 0 \leq t \leq t_0 - a \\ \frac{1}{2a} & \text{Si } t_0 - a \leq t \leq t_0 + a \\ 0 & \text{Si } t \geq t \end{cases}$$

donde $a > 0$, $t_0 > 0$ se conoce como la función impulso unitario.

Teorema [Area bajo la función impulso] La función impulso unitario satisface la propiedad

$\int_0^\infty \delta_a(t - t_0)dt = 1$

y de aquí su nombre.

Demostración

$$\int_0^\infty \delta_a(t - t_0)dt = \int_0^{t_0-a} 0 \cdot dt + \int_{t_0-a}^{t_0+a} \frac{1}{2a} \cdot dt + \int_{t_0+a}^{\infty} 0 \cdot dt = 0 + \frac{2a}{2a} + 0 = 1$$

En la práctica es conveniente trabajar con otro tipo de impulso llamado función de Dirac

Definición [Función delta de Dirac] La función delta de Dirac esta dada por

$\lim_{a \to 0} \delta_a(t - t_0) = \delta(t - t_0)$

Observación: la función delta de Dirac, no es una función, realmente es lo que se conoce como una función generalizada (o distribución).

Teorema [Propiedades de la función delta] La función delta de Dirac satisface las siguientes propiedades

$$\delta(t - t_0) = \begin{cases} \infty & \text{Si } t = t_0 \\ 0 & \text{Si } t \neq t_0 \end{cases} \qquad \int_0^\infty \delta(t - t_0)dt = 1$$

El siguiente teorema establece la transformada de Laplace de la función delta de Dirac.

Definición [Transformada de delta] Para $t_0 > 0$

$\mathcal{L}\{\delta(t - t_0)\} = e^{-st_0}$

Demostración Para iniciar la prueba debemos escribir la función impulso unitario en términos de la función escalón unitario

$\delta_a(t-t_0) = \dfrac{1}{2a}\left(H(t-(t_0-a)) - H(t-(t_0+a))\right)$

De donde tenemos que

$\mathcal{L}\left\{\delta_a\left(t-t_0\right)\right\} = \dfrac{1}{2a}\mathcal{L}\left\{H(t-(t_0-a))\right\} - \dfrac{1}{2a}\left\{H(t-(t_0+a))\right\} = \dfrac{1}{2a}\left(\dfrac{e^{-s(t_0-a)}}{s}\right) - \dfrac{1}{2a}\left(\dfrac{e^{-s(t_0+a)}}{s}\right) = e^{-st_0}\left(\dfrac{e^{sa}-e^{-sa}}{2sa}\right)$

con lo cual

$\mathcal{L}\left\{\delta(t-t_0)\right\} = \mathcal{L}\left\{\lim\limits_{a\to 0}\delta_a(t-t_0)\right\} = \lim\limits_{a\to 0}\mathcal{L}\left\{\delta_a(t-t_0)\right\} = \lim\limits_{a\to 0} e^{-st_0}\underbrace{\left(\dfrac{e^{sa}-e^{-sa}}{2sa}\right)}_{L'H\hat{o}pital} = e^{-st_0}\lim\limits_{a\to 0}\dfrac{se^{sa}+se^{-sa}}{2s} = e^{-st_0}$

Observación: a partir de $\mathcal{L}\left\{\delta(t-t_0)\right\} = e^{-st_0}$ es razonable concluir que $\mathcal{L}\left\{\delta(t)\right\} = 1$. Esto reafirma el hecho de que $\delta(t)$ no es una función ordinaria, puesto que se espera que $\mathcal{L}\{f(t)\}$ cuando $s \to \infty$.

Ejemplo Calcule $\mathcal{L}\{\delta(t-2\pi)\}$

Solución Claramente

$\mathcal{L}\{\delta(t-2\pi)\} = e^{-2\pi s}$

Función escalón

En ingeniería es común encontrar funciones que corresponden a estados de sí o no, o bien activo o inactivo. Por ejemplo, una fuerza externa que actúa sobre un sistema mecánico o una tensión eléctrica aplicada a un circuito, puede tener que suspenderse después de cierto tiempo. Para tratar de forma efectiva con estas funciones discontinuas conviene introducir una función especial llamada función escalón unitario.

Definición [Función de Heaviside] La función escalón unitario o función de Heaviside1.2 $H : [0, +\infty[\to I\!R$ se define como

$$H(t-a) = \begin{cases} 0 & \text{Si } 0 \le t < a \\ 1 & \text{Si } t \ge a \end{cases}$$

Observación: la función de heaviside se definio sobre el intervalo $[0, +\infty[$, pues esto es suficiente para la transformada de Laplace. En un sentido más general $H(t-a) = 0$ para $t < a$.

Ejemplo Trazar la gráfica de la función $f(t) = H(t-1)$.

Solución La función $f(t)$ está dada por

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{Si } 0 \leq t < 1 \\ 1 & \text{Si } t \geq 1 \end{cases}$$

Cuando la función de Heaviside $H(t-a)$ se multilplica por una función $f(t)$, definida para $t \geq 0$, ésta función se desactiva en el intervalo $[0, a]$, como muestra en siguiente ejemplo.

Ejemplo Trazar la gráfica de la función $f(t) = Sen(t)H(t-2\pi)$.

Solución La función está dada por

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{Si } 0 \leq t < 2\pi \\ Sen(t) & \text{Si } t \geq 2\pi \end{cases}$$

La función de Heaviside puede utilizarse para expresar funciones continuas a trozos de una manera compacta.

Ejemplo Use la función de Heaviside para reescribir la función

$$f(t) = \begin{cases} g(t) & \text{Si } 0 \leq < a \\ h(t) & \text{Si } t \geq a \end{cases}$$

Solución Para reescribir la función basta usar la definición de la función Heaveside

$$\begin{aligned} f(t) &= \begin{cases} g(t) - g(t) \cdot 0 + h(t) \cdot 0 & \text{Si } 0 \leq t, a \\ g(t) - g(t) \cdot 1 + h(t) \cdot 1 & \text{Si } t \geq a \end{cases} \\ &= g(t) - g(t)H(t-a) + h(t)H(t-a) \end{aligned}$$

Observación: la función

$$f(t) = \begin{cases} p(t) & \text{Si } 0 \leq t < a \\ q(t) & \text{Si } 0 \leq a < b \\ r(t) & \text{Si } t \geq b \end{cases}$$

se escribe usando la función de Heaviside como $f(t) = p(t) + (q(t) - p(t))\, H(t-a) + (r(t) - q(t))\, H(t-b)$

Teorema [Transformada de la función Heaviside] La transformada de la función de Heaviside es

$\mathcal{L}\{H(t-a)\} = \dfrac{e^{-sa}}{s}$

Demostración Usando la definición de transformada

$\mathcal{L}\{H(t-a)\} = \displaystyle\int_0^\infty e^{-st} H(t-a)dt = \underbrace{\int_0^a e^{-st} \cdot 0dt}_{0} + \int_a^\infty e^{-st}dt = \int_a^\infty e^{-st}dt = -\frac{e^{-st}}{s}\Big|_a^\infty = \frac{e^{-as}}{s}$

En el primer teorema de traslación nos permitío calcular la transformada de una función $f(t)$ al ser multiplicada por una función exponencial e^{kt}, el segundo teorema de traslación nos permitirá calcular la trasformada de una función $f(t)$ que es multiplicada por una función escalón.

Teorema [Segundo teorema de traslación] Si $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ y $a > 0$, entonces

$\mathcal{L}\{f(t-a)H(t-a)\} = e^{-as}F(s)$

Forma inversa del segundo teorema de traslación:

$f(t-a)H(t-a) = \mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\}$

Demostración Usando la definición

$\mathcal{L}\{f(t-a)\}H(t-a) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-st} f(t-a0H(t-a)dtdt = \int_0^a e^{-st} f(t-a) \cdot 0dt + \int_a^\infty e^{-st} f(t-a)dt = \int_a^\infty e^{-st} f(\underbrace{t-a}_{u=t-a})dt = \int_0^\infty e^{-s(u+a)} f(u)du = e^{-sa}\int_0^\infty e^{-su} f(u)du$
$= e^{-sa}\mathcal{L}\{f(t)\} = e^{-sa}F(s)$

Observación: podemos usar el segundo teorema de traslación para calcular la transformada de Laplace de la función $H(t-a)$ haciendo $f(t) = 1$:

$\mathcal{L}\left\{H(t-a)\right\} = \mathcal{L}\left\{1 \cdot H(t-a)\right\} = e^{-as}\mathcal{L}\left\{1\right\} = \dfrac{e^{-as}}{s}$

Ejemplo Calcule

$\mathcal{L}\{tH(t-2)\}$

Solución Para poder usar el segundo teorema de traslación debemos completar t a $t-2$

$\mathcal{L}\{tH(t-a)\} = \mathcal{L}\{(t-2+2)H(t-2)\} = \mathcal{L}\{(t-2)H(t-2)\} + 2\mathcal{L}\{H(t-2)\} =$

$\dfrac{e^{-2s}}{s^2} + \dfrac{2e^{-2s}}{s}$

Ejemplo

Calcular $\mathcal{L}\{f(t)\}$, donde

$$f(t) = \begin{cases} -t+1 & \text{Si } 0 \leq t < 1 \\ 1 & \text{Si } 1 \leq t < 2 \\ t-2 & \text{Si } t \geq 2 \end{cases}$$

Solución:

Observe que la función $f(t)$ puede reescribirse como

$f(t) = 1-t+tH(t-1)+(t-3)\,H(t-2)$ $f(t) = 1-t+(t-1)\,H(t-1)+(t-2)\,H(t-2)$

con lo cual

$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{1\} + \mathcal{L}\left\{(t-1)\,H(t-1)\right\} + \mathcal{L}\left\{(t-2)\,H(t-2)\right\} = \dfrac{1}{s} + \dfrac{e^{-s}}{s^2} + \dfrac{e^{-2s}}{s^2}$

Ejemplo Calcule

$\mathcal{L}\{t^2 H(t-2)\}$

Solución Para poder usar el segundo teorema de traslación debemos completar de forma adecuada el término t^2

$\mathcal{L}\{t^2 H(t-2)\} = \mathcal{L}\left\{\left((t-2)^2 + 4t - 4\right) H(t-2)\right\} = \mathcal{L}\left\{(t-2)^2\, H(t-2)\right\} + 4\mathcal{L}\left\{(t-1)\,H(t-2)\right\}$
$= \mathcal{L}\left\{(t-2)^2\, H(t-2)\right\} + 4\mathcal{L}\left\{(t-2)\,H(t-2)\right\} + 4\mathcal{L}\{H(t-2)\} = \dfrac{2e^{-2s}}{s^3} + \dfrac{4e^{-2s}}{s^2} + \dfrac{4e^{-2s}}{s}$
$= 2e^{-2s}\left(\dfrac{1}{s^3} + \dfrac{2}{s^2} + \dfrac{2}{s}\right)$

Como lo muestran los ejemplos anteriores algunas veces es necesario sumar y restar algunos términos con la idea de poder usar el segundo teorema de traslación. Pero existe una forma alternativa que nos evita el tener que hacer esto.

Corolario [Forma alternativa al segundo teorema de traslación] Sea $f : [0, +\infty[\to I\!R$ una función continua a trozos y de orden exponencial en $[0, +\infty[$, entonces

$\mathcal{L}\{f(t)H(t-a)\} = e^{-as}\mathcal{L}\{f(t+a)\}$

Demostración

Usando la definición

$\mathcal{L}\{f(t)H(t-a)\} = \displaystyle\int_0^\infty e^{-st} f(t)H(t-a)dt = \int_a^\infty e^{-st} f(t)dt = \int_0^\infty e^{-s(u+a} f(u+a)du$
$= e^{-sa}\displaystyle\int_0^\infty e^{-su} f(\underbrace{u+a}_{t=u+a})du = e^{-sa}\mathcal{L}\{f(t+a\}$

Ejemplo Calcule

$\mathcal{L}\{\left(t^2+t\right)H(t-3)\}$

Solución Usando la forma alternativa del segundo teorema de traslación

$\mathcal{L}\{\left(t^2+t\right)H(t-3)\} = e^{-3s}\mathcal{L}\left\{(t+3)^2+t+3\right\} = e^{-3s}\mathcal{L}\left\{t^2+7t+12\right\} = e^{-3s}\left(\frac{2}{s^3}+\frac{7}{s^2}+\frac{12}{s}\right)$

Los siguientes ejemplos muestran el uso del segundo teorema de traslación en su forma inversa.

Ejemplo Calcule

$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{se^{-\pi s/2}}{s^2+9}\right\}$

Solución

En este caso $a=\frac{\pi}{2}$ y

$F(s)=\frac{s}{s^2+9} \Rightarrow f(t)=Cos(3t)$

con lo cual

$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{se^{-\pi s/2}}{s^2+9}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+9}\right\}_{t\to t-\frac{\pi}{2}} H\left(t-\frac{\pi}{2}\right) = Cos\left(3\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\right)H\left(t-\frac{\pi}{2}\right) =$
$-Sen(3t)H\left(t-\frac{\pi}{2}\right)$

Ejemplo Calcule

$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2se^{-\pi s/2}}{s^2-5s+6}\right\}$

Solución Primero hallemos la descomposición en fraciones parciales

$\frac{2s}{s^2-5s+6} = \frac{6}{s-3}-\frac{4}{s-2}$

con lo cual

$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2se^{-\pi s/2}}{s^2-5s+6}\right\} = \frac{6e^{-\pi s/2}}{s-3}-\frac{4e^{-\pi s/2}}{s-2} = 6\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\}_{t\to t-\frac{\pi}{2}} H\left(t-\frac{\pi}{2}\right) - 4\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\}_{t\to t-\frac{\pi}{2}} H\left(\right.$
$= 6e^{3\left(t-\frac{\pi}{2}\right)} - 4e^{2\left(t-\frac{\pi}{2}\right)}$

Ejemplo Calcule

$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{se^{-\pi s/2}}{s^2+4s+13}\right\}$

Solución Como el discriminante de $s^2+4s+13$ es negativo, no es factorizable debemos completar el cuadrado.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{se^{-\pi s/2}}{s^2+4s+13}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{se^{-\pi s/2}}{(s+2)^2+9}\right\} \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(s+2-2)\,e^{-\pi s/2}}{(s+2)^2+9}\right\} \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(s+2)\,e^{-\pi s/2}}{(s+2)^2+9}\right\} - 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-\pi s/2}}{(s+2)^2+9}\right\}
\end{aligned}$$

En este punto debemos usar el primer teorema de traslación para calcular cada una de las transformadas inversas de la siguiente forma: $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(s+2)}{(s+2)^2+9}\right\} \Rightarrow f(t) = e^{-2t}Cos(3t)$ y $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2+9}\right\} \Rightarrow f(t) = \frac{e^{-2t}}{3}Sen(3t)$ Y de aquí $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{se^{-\pi s/2}}{s^2+4s+13}\right\}$ $= e^{-2\left(t-\frac{\pi}{2}\right)}Cos\left(3\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\right)H\left(t-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{2}{3}e^{-2\left(t-\frac{\pi}{2}\right)}Sen\left(3\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\right)H\left(t-\frac{\pi}{2}\right) = -e^{-2t+\pi}Sen(3t) - \frac{2}{3}e^{-2t+\pi}Cos(3t)$ *Ejemplo* Calcule

$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(2s+3)\,e^{-\pi s/2}}{s^2+4s+13}\right\}$

Solución Este ejemplo combina los dos teoremas de traslación

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(2s+3)\,e^{-\pi s/2}}{s^2+4s+13}\right\} &= 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(s+2)\,e^{-\pi s/2}}{(s+2)^2+9}\right\} - \frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-\pi s/2}}{(s+2)^2+9}\right\} \\
&= -2e^{-2\left(t-\frac{\pi}{2}\right)}Cos\left(3\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\right)H\left(t-\frac{\pi}{2}\right) \\
&- \frac{1}{3}e^{-2\left(t-\frac{\pi}{2}\right)}Sen\left(3\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\right)H\left(t-\frac{\pi}{2}\right) \\
&= -2e^{-2t+\pi}Sen(3t)H\left(t-\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{3}e^{-2t+\pi}Cos(3t)H\left(t-\frac{\pi}{2}\right)
\end{aligned}$$

Teorema [Multiplicación por t^n.] Sea $f;[0,\infty[\to I\!R$ una función continua a trozos y de orden exponencial en $[0,+\infty[$, entonces

$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n F^n(s)$

Ejemplo Calcule

$\mathcal{L}\{t^2 Sen(2t)\}$

Solución Aplicando el teorema anterior para $n = 2$, tenemos que

$\mathcal{L}\{t^2 Sen(2t)\} = (-1)^2 \left(\mathcal{L}\left\{Sen(2t)\right\}\right)'' = \left(\dfrac{2}{s^2+4}\right)'' = \dfrac{12s^2-16}{\left(s^2+4\right)^3}$

El siguiente ejemplo muestra una combinación del primer teorema de traslación y el teorema anterior.

Ejemplo Calcule

$\mathcal{L}\{te^{-2t}Cos(3t)\}$

Solución Primero aplicamos el teorema de multiplicación por t y luego el de traslación

$\mathcal{L}\{te^{-2t}Cos(3t)\} = -\left(\mathcal{L}\{e^{-2t}Cos(3t)\}\right)' = -\left(\mathcal{L}\{Cos(3t)\}_{s\to s+2}\right)' = -\left(\dfrac{s+2}{(s+2)^2+9}\right)'$

$= \dfrac{s^2+4s-5}{\left(s^2+4s+13\right)^2}$

Ejemplo Calcule el valor de la siguiente integral

$\displaystyle\int_0^\infty te^{-2t}Cos(3t)dt$

Solución Por el teorema de multiplicación por t^n, tenemos que

$\mathcal{L}\{tCos(3t)\} = \displaystyle\int_0^\infty te^{-st}Cos(3t) = (-1)^1\left(\dfrac{s}{s^2+9}\right)' = \dfrac{s^2-9}{\left(s^2+9\right)^2}$

De donde obtenemos que

$\displaystyle\int_0^\infty te^{-st}Cost(3t)dt = \dfrac{s^2-9}{\left(s^2+9\right)^2}$

y tomando $s=2$

$\displaystyle\int_0^\infty te^{-2t}Cost(3t)dt = \dfrac{5}{169}$

Existe un caso especial del teorema anterior, cuando $n=1$, que es muy útil en el cálculo de transformadas inversas.

Corolario [Multiplicación por t.] Si $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, entonces

$f(t) = -\dfrac{1}{t}\mathcal{L}^{-1}\{F'(s)\}$

Ejemplo Calcule

$\mathcal{L}^{-1}\left\{ln\left(\dfrac{s+1}{s-1}\right)\right\}$

Solución Si

$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = ln\left(\dfrac{s+1}{s-1}\right)$

por el corolario tenemos que

$f(t) = -\dfrac{1}{t}\mathcal{L}^{-1}\left\{\left(ln\left(\dfrac{s+1}{s-1}\right)\right)'\right\} = -\dfrac{1}{t}\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{-2}{(s-1)(s+1)}\right\} = -\dfrac{1}{t}\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s+1}-\dfrac{1}{s-1}\right\}$

$= -\dfrac{e^{-t}-e^t}{t} = \dfrac{2Senh(t)}{t}$

Teorema [División por t.] Sea $f : [0, +\infty[\to I\!R$ una función continua a trozos y de orden exponencial en $[0, +\infty[$ tal que el límite

$\lim_{t \to 0^+} \frac{f(t)}{t}$

existe, entonces

$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty F(u)du$

Demostración

Sea

$g(t) = \frac{f(t)}{t} \Rightarrow f(t) = tg(t)$

entonces aplicando transformada de Laplace a ambos lados tenemos que

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{tg(t)\} = -\left(\mathcal{L}\{g(t)\}\right)' = -G'(s)$$

Integrando

$G(s) = -\int_\infty^s F(u)du = \int_s^\infty F(u)du$

es decir,

$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty$

Observación: la constante de integración debe escogerse de forma de tal que $\lim_{s\to\infty} G(s) = 0$.

El siguiente ejemplo muestra una aplicación de este teorema.

Ejemplo Calcule

$\mathcal{L}\left\{\frac{Sen(t)}{t}\right\}$

Solución

Tenemos que

$F(s) = \frac{1}{s^2+1}$

con lo cual

$\mathcal{L}\left\{\frac{Sen(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty \frac{1}{u^2+1}du = ArcTan(s)\Big|_s^\infty = \frac{\pi}{2} - ArcTan(s)$

Ejemplo Calcule el valor de la siguiente integral

$\int_0^\infty \frac{e^{-t} - e^{-3t}}{t}dt$

Solución Si

$f(t) = e^{-t} - e^{-3t}$

entonces

$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty \left\{\frac{1}{u+1} - \frac{1}{u+3}\right\} du = ln\left(\frac{u+1}{u+3}\right)\Big|_s^\infty = ln\left(\frac{s+3}{s+1}\right)$
De donde
$\int_0^\infty \left(\frac{e^{-t} - e^{-3t}}{t}\right) dt = ln\left(\frac{s+3}{s+1}\right)$
y tomando el límite cuando $s \to 0^+$, tenemos que
$\int_0^\infty \frac{e^{-t} - e^{-3t}}{t} dt = ln(3)$

4.2 Teorema de traslación y derivadas de una transformada

Ahora vamos a enunciar algunos propiedades de la transformada.

Teorema [Linealidad de la transformada] Si $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ y $\mathcal{L}\{g(t)\} = G(s)$ existen entonces

$$\mathcal{L}\{f(t) + cg(t)\} = \{f(t)\} + \mathcal{L}\{g(t)\} = F(s) + G(s)$$

para cualquier constante real c.

Demostración Es una consecuencia directa de la convergencia de la suma en integrales impropias.

$$\int_0^\infty (f(t) + cg(t))\, dt = \int_0^\infty f(t)dt + c\int_0^\infty g(t) = F(s) + G(s)$$

Ejemplo Calcule $\mathcal{L}\{Sen^2(t)\}$.
Solución Como
$Sen^2(t) = \frac{1 - Cos(2t)}{2}$,
por la propiedad de linealidad
$\mathcal{L}\{Sen^2(t)\} = \mathcal{L}\{\frac{1 - Cos(2t)}{2}\}$

$$= \frac{1}{2}\mathcal{L}\{1\} - \frac{1}{2}\mathcal{L}\{Cos(2t)\}$$

$$= \frac{1}{2s} - \frac{s}{2\left(s^2+4\right)}$$

$$= \frac{2}{s\left(s^2+4\right)}$$

Con la idea de aplicar la transformada de Laplace a la solución de ecuaciones diferenciales necesitamos calcular la transformada de una derivada.

Teorema [Transformada de una derivada] Si $y'(t)$ es continua a trozos y de orden exponencial en el intervalo $[0, +\infty[$, entonces

$\mathcal{L}\{y(t)\} = sY(s) - y(0)$

Demostración

Integrando por partes

$\mathcal{L}\{y'(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}y(t)dt$

$$= e^{-st}y(t)\Big|_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st}y(t)dt$$

$$= -y(0) + s\mathcal{L}\{y(t)\}$$

$$= sY(s) - y(0)$$

Con un argumento similar podemos demostrar que

$\mathcal{L}\{y''(t)\} = -y'(0) + s\{y'(t)\}$

$$= -y'(0) + s\left(sY(s) - y(0)\right)$$

$$= s^2Y(s) - y'(0) - sy(0)$$

Ejemplo Use el resultado anterior para calcular $\mathcal{L}\{t^2\}$

Solución Haciendo $f(t) = t^2$, tenemos que

$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)$

$$\mathcal{L}\{2t\} = s\mathcal{L}\{t^2\} - 0$$

$$2\mathcal{L}\{t\} = s\mathcal{L}\{t^2\}$$

$$\frac{2}{s^2} = s\mathcal{L}\{t^2\}$$

y de aquí concluimos que

$\mathcal{L}\{t^2\} = \dfrac{2}{s^3}$

El siguiente resultado generaliza la transformada de una derivada.

Definición [Transformada de una derivada] Si $y(t), y'(t), \cdots, y^n(t)$ son continuas a trozos y de orden exponencial en el intervalo $[0, +\infty[$, entonces

$$\mathcal{L}\{y^n(t)\} = s^n Y(s) - \sum_{j=0}^{n-1} s_j y^{n-1-j}(0)$$

$$= s^n Y(s) - y^{n-1}(0) - sy^{n-2}(0) - \cdots - s^{n-1}y(0)$$

El siguiente teorema trata sobre el efecto que tiene en una transformada la escalación de una función $f(t)$.

Teorema [Propiedad de escalación] Sea $f(t)$ una función continua a trozos y de orden exponencial en $[0, +\infty[$, si $c \neq 0$, entonces

$\mathcal{L}\{f(t)\} = \dfrac{1}{c}F\left(\dfrac{s}{c}\right)$

Demostración Para comprobar esta propiedad basta hacer un cambio de variable, $u = ct$

$$\mathcal{L}\{f(ct)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(ct)dt$$

$$= \frac{1}{c}\int_0^\infty e^{-\frac{su}{c}} f(u)du$$

$$= \frac{1}{c}F\left(\frac{s}{c}\right)$$

Ejemplo

Si

$\mathcal{L}\{Senh(t)\} = \dfrac{1}{s^2-1}$,

calcule $\mathcal{L}\{Senh(kt)\}$.

Solución

Usando la propiedad de escalamiento

$\mathcal{L}\{Senh(kt)\} = \dfrac{1}{k}\left(\dfrac{1}{\left(\frac{s}{k}\right)^2-1}\right)$

$$= \frac{1}{k}\frac{k^2}{s^2-k^2}$$

$$= \frac{k}{s^2-k^2}$$

Teoremas de traslación

No es adecuado utilizar la definición cada vez que se quiera calcular una transformada, por ejemplo, la integración por partes involucrada al calcular $\mathcal{L}\{e^{kt}Sen(t)\}$, es bastante tediosa. Por esta razón vamos a enunciar algunos teoremas que ahorran trabajo en el cálculo de este tipo de transformadas.

Si conocemos que $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, podemos calcular la transformada de $\mathcal{L}\{e^{kt}f(t)\}$ como una traslación, de $F(s)$ a $F(s-k)$, como lo enuncia el siguiente teorema.

Teorema [Primer teorema de traslación] Si k es un número real y $\mathcal{L}\{f(t)\}$ existe, entonces

$\mathcal{L}\{e^{kt}f(t)\} = F(s-k)$

donde $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$.

Forma inversa del primer teorema de traslación:

$e^{kt}f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s-k)\} = \mathcal{L}\left\{F(s)\big|_{x\to s-k}\right\}$

Demostración

La prueba es inmediata apartir de la definción

$\mathcal{L}\{e^{kt}f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}e^{kt}f(t)dt = \int_0^\infty e^{-(s-k)t}f(t)dt = F(s-k)$

Observación: si consideramos a s como una variable real, entonces la gráfica de $F(s-k)$ es la misma de $F(s)$ trasladada $|k|$ unidades sobre el eje s. Si $k > 0$, la gráfica de $F(s)$ se desplaza $|k|$ unidades a la derecha, miéntras que, si $k < 0$, la gráfica se traslada $|k|$ unidades a la izquierda. Para enfatizar en la traslación se acostumbra escribir

$\mathcal{L}\{e^{kt}f(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\}\big|_{s\to s-k}$

donde $s \to s-k$ significa que se sustituye s por $s-k$ en $F(s)$.

Ejemplo

Calcule

$\mathcal{L}\left\{e^{at}Cos(bt)\right\}$

Solución

Usando el primer teorema de traslación

$\mathcal{L}\left\{e^{at}Cos(bt)\right\} = \mathcal{L}\{Cos(bt)\}\Big|_{s\to s-a}$

$= \dfrac{s}{s^2+b^2}\Big|_{s\to s-a}$

$= \dfrac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$

Ejemplo

Use la forma inversa del primer teorema de traslación para calcular

$\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s-3)^3}\right\}$

Solución

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-3)^3}\right\} = \frac{1}{2!}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2!}{(s-3)^3}\right\}$$

$$= \frac{1}{2!}\mathcal{L}^{-1}\left\{\left.\frac{2!}{s^3}\right|_{s\to s-3}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}t^2e^{3t}$$

Ejemplo

Calcule

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4s+13}\right\}$$

Solución Para usar la forma inversa del primer teorema de traslación debemos completar el cuadrado en el denominador

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4s+13}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s+2)^2+9}\right\}$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+2-2}{(s+2)^2+9}\right\}$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+2}{(s+2)^2+9}\right\} - 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2+9}\right\}$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\left.\frac{s}{s^2+9}\right|_{s\to s+2}\right\} - \frac{2}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\left.\frac{3}{s^2+9}\right|_{s\to s+2}\right\}$$

$$= e^{-2t}Cos(3t) - \frac{2}{3}e^{-2t}Sen(3t)$$

4.3 Transformadas de derivads, integrales y funciones periódicas

Funciones periódicas

Es muy común, especialmente en aplicaciones ligadas a circuitos elécticos, la presencia de una fuerza externa periódica. Es usual tener voltajes en forma de ondas diente de sierra, ondas en escalón, etc. Por lo que es necesario calcular sus transformadas.

Teorema [Transformada de una función periódica] Sea $f : [0, +\infty[\to I\!R$ una función continua a trozos y de orden exponencial en el intervalo $[0, +\infty[$. Si $f(t)$ es periódica, con periódo T, entonces

$\mathcal{L}\{f(t)\} = \dfrac{1}{1-e^{-sT}} \displaystyle\int_0^T e^{-st} f(t)dt$

Demostración Usando la definición

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f(t)\} &= \int_0^T e^{-st} f(t)dt + \int_T^{2T} \underbrace{e^{-st} f(t)dt}_{t=2T+u} \\
&+ \int_{2T}^{3T} \underbrace{e^{-st} f(t)dt)}_{t=3T+u} + \ldots + \int_{(n-1)T}^{nT} \underbrace{e^{-st} f(t)dt)}_{t=nT+u} + \ldots \\
&= \int_0^T e^{-st} f(t)dt + \int_0^T e^{-s(u+T)} \underbrace{f(u+T)}_{f(u+T)=f(u)} dt \\
&+ \ldots + \int_0^T e^{-s(u+nT)} \underbrace{f(u+nT)}_{f(u+nT)=f(u)} dt + \ldots \\
&= \left(1 + e^{-sT} + e^{-2sT} + e^{-3sT} + \ldots\right) \int_0^T e^{-su} f(u)du \\
&= \frac{1}{1-e^{-sT}} \int_0^T e^{-su} f(u)du
\end{aligned}
$$

Ejemplo Calcule $\mathcal{L}\{f(t)\}$, donde $f(t)$ es la función periódica diente de sierra.

Solución El periódo de esta función es $T = 2$ y su transformada esta dada por

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f(t)\} &= \frac{1}{1-e^{2s}}\int_0^2 e^{-st}f(t)dt \\
&= \frac{1}{1-e^{-2s}}\left(\int_0^1 te^{-st}dy + \int_1^2 (2-t)e^{-st}dt\right) \\
&= \frac{1}{1-e^{-2s}}\left(\frac{1}{s^2} - \frac{e^{-s}}{s} - \frac{e^{-s}}{s^2} + \frac{e^{-s}}{s} - \frac{e^{-s}}{s^2} + \frac{e^{-2s}}{s^2}\right) \\
&= \frac{1}{1-e^{-2s}}\left(\frac{1}{s^2} + \frac{e^{-2s}}{s^2} - \frac{2e^{-s}}{s^2}\right)
\end{aligned}$$

Convolución y transformadas

Como hemos visto, la transformada de Laplace es lineal, es decir, la transformada de una suma es la suma de las transformadas, entonces cabe preguntarse si se tiene algo similar para el producto, la respuesta es no. En general la transformada no conmuta con la multiplicación ordinaria, o sea, la transformada de un producto no es el producto de las transformadas, pero podemos definir un nuevo producto generalizado bajo el cual esto es cierto.

Definición [Convolución] La función $h : \mathcal{C}(I) \times \mathcal{C}(I) \to \mathcal{C}(I)$, donde $\mathcal{C}$ es el conjunto de funciones continuas en el intervalo $I = [0, +\infty[$ dada por

$h(t) = (f \star g)(t) = \displaystyle\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau$

se conoce como la convolución de f y g.

La convolución tiene muchas de las propiedades de la multiplicación ordinaria, como veremos en el siguiente teorema.

Teorema [Propiedades de la convolución] Sean f y g funciones continuas en el intervalo $[0, +\infty[$, entonces

$f \star g = g \star f$ (ley conmutativa) $f \star (g + h) = f \star g + f \star h$ (ley distributiva) $(f \star g) \star h = f \star (g \star h)$ (ley asociativa) $f \star 0 = 0 \star f = 0$

Demostración

La demostración de estas propiedades es muy simple. Haremos la primera de ellas y dejamos las restantes al lector.

$$(f\star g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(\underbrace{t-\tau}_{u=t-\tau})d\tau = -\int_t^0 f(t-u)g(u)du = \int_0^t g(u)f(t-u)du = (g\star f)(t)$$

Observación: sin embargo, existen algunas propiedades de la multiplicación ordinaria que la convolución no tiene. Por ejemplo, no es cierto en general que $f \star 1 = f$; para ver esto, note que

$$Cos(t) \star 1 = \int_0^t Cos(\tau)d\tau = Sen(\tau)\Big|_0^t = Sen(t)$$

Ejemplo Calcule la convolución de $f(t) = e^t$ y $g(t) = Sen(t)$.

Solución Usando la definición e integración por partes, tenemos que

$$e^t \star Sen(t) = \int_0^t e^\tau Sen(t-\tau)d\tau = \frac{e\left(Cos(\tau - t) - Sen(\tau - t)\right)}{2}\Bigg|_0^t = \frac{e^t - Sen(t) - Cos(t)}{2}$$

Ejemplo Calcule la convolución de las funciones $f(t) = Sen(at)$ y $g(t) = Cos(bt)$.

Solución Usando la definición e integración por partes

$$\left(Sen(at) \star Cos(bt)\right)(t) = \int_0^t Sen\left(a(t-\tau)\right) Cos(b\tau)d\tau = \frac{1}{2}\int_0^t \left(Sen\left(at + (b-a)\tau\right) + Sen\left(at - (b -\right.\right.$$

$$= \frac{a\left(Cos(bt) - Cos(at)\right)}{(a+b)(a-b)}$$

Observación: para calcular la integral

$$\int_0^t Sen(t-\tau)Cos(b\tau)d\tau$$

del ejemplo anterior, hemos usado la identidad

$$Sen(\alpha)Cos(\beta) = \frac{Sen(\alpha+\beta) + Sen(\alpha-\beta)}{2}$$

Otras identidades que pueden ser útiles en el cálculo de integrales similares son

$$Cos(\alpha)Cos(\beta) = \frac{Cos(\alpha+\beta) + Cos(\alpha-\beta)}{2} \; Sen(\alpha)Sen(\beta) = \frac{Cos(\alpha-\beta) - Cos(\alpha+\beta)}{2}$$

El siguiente teorema establece un resultado de mucha importancia teórica y práctica, como veremos.

Teorema [Teorema de convolución] Si $\mathcal{L}\{f(t)\}$ y $\mathcal{L}\{g(t)\}$ existen para $s > a \geq 0$, entonces

$$\mathcal{L}\{(f \star g)(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\}\mathcal{L}\{g(t)\} = F(s)G(s)$$

Observación: La forma inversa del teorema de convolución

$$(f \star g)(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(F(s)G(s)\right)$$

es muy importante en la solución de ecuaciones diferenciales, pues nos puede evitar el cálculo de fraciones parciales complejas.

Ejemplo Calcule

$$\mathcal{L}\{e^t \star Sen(t)\}$$

Solución Usando el teorema de convolución tenemos que

$\mathcal{L}\{e^t \star Sen(t)\} = \mathcal{L}\{e^t\}\mathcal{L}\{Sen(t)\} = \dfrac{1}{s-1}\dfrac{1}{s^2+1} = \dfrac{1}{(s+1)(s^2+1)}$

Observación: como ya hemos calculado $e^t \star Sen(t)$ podemos corroborar el resultado obtenido anteriormente

$\mathcal{L}\{e^t \star Sen(t)\} = \mathcal{L}\left\{\dfrac{e^t - Sen(t) - Cos(t)}{2}\right\} = \dfrac{1}{2}\mathcal{L}\{e^t\} - \dfrac{1}{2}\mathcal{L}\{Sen(t)\} - \dfrac{1}{2}\mathcal{L}\{Cos(t)\}$
$= \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{s-1} - \dfrac{1}{s^2+1} - \dfrac{s}{s^2+1}\right) = \dfrac{1}{(s-1)(s^2+1)}$

como obtuvimos en el ejemplo anterior.

Los siguientes ejemplos muestran el uso de la forma inversa del teorema de convolución para el cálculo de transformadas inversas.

Ejemplo Calcule la siguiente transformada inversa

$\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s-2)(s-3)}\right\}$

Solución Usando el teorema de convolución

$\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s-2)(s-3)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s-2}\dfrac{1}{s-3}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s-2}\right\} \star \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s-3}\right\} = \mathcal{L}e^{2t} \star e^{3t} = \displaystyle\int_0^t e^{2\tau}e^{3(t-\tau)}d\tau = e^{3t} - e^{2t}$

Observación: en este ejemplo el uso de fraciones parciales resulta viable, pues

$\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s-2)(s-3)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s-3} - \dfrac{1}{s-2}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s-3}\right\} - \mathcal{L}\left\{\dfrac{1}{s-2}\right\} = e^{3t} - e^{2t}$

Los siguientes ejemplos muestran situaciones donde el uso de fraciones parciales puede ser realmente complejo, comparado con el uso del teorema de convolución.

Ejemplo Calcule la siguiente transformada inversa

$\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{(s^2+4)(s^2+9)}\right\}$

Solución Usando el teorema de convolución, tenemos

$\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{(s^2+4)(s^2+9)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2+4}\dfrac{1}{s^2+9}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2+4}\right\} \star \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2+9}\right\} = Cos(2t) \star Sen(3t) = \displaystyle\int_0^t Cos(2\tau)Sen\left(3\left(t-\tau\right)\right)d\tau = \dfrac{3Cos(2t) - 3Cos(3t)}{5}$

Observación: en este ejemplo la expansión en fraciones parciales no es tan simple

$\dfrac{1}{(s^2+4)(s^2+9)} = \dfrac{1}{5}\left(\dfrac{s}{s^2+4} - \dfrac{s}{s^2+9}\right)$

Ejemplo Calcule la siguiente transformada inversa

$\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{(s-2)(s^2-4s+13)}\right\}$

Solución Usando convolución

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s-1)(s^2-4s+13)}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-2+2}{\left((s-2)^2+4\right)(s-1)}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-2}{\left((s-2)^2+4\right)(s-1)}\right\}$$
$$+\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{\left((s-2)^2+4\right)(s-1)}\right\}=e^{2t}Cos(3t)\star e^t+e^{2t}Sen(3t)\star e^t=\frac{e^t\left(1-e^tCos(3t)+2e^tSen(3t)\right)}{5}$$

El siguiente corolario es útil en el cálculo de la transformada de una integral.

Corolario Tomando $g(t)=1$ en el teorema de convolución tenemos que
$\frac{F(s)}{s}=\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\}$
donde $F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}$

Demostración
$\mathcal{L}\{f\star 1\}=\mathcal{L}\{f(t)\}\mathcal{L}\{1\}$ $\mathcal{L}\{\int_0^t f(\tau)d\tau\}=\frac{F(s)}{s}$

Ejemplo Calcule la siguiente transformada
$\mathcal{L}\left\{\int_0^t \tau Sen(\tau)d\tau\right\}$

Solución Usando el corolario anterior y el teorema de multiplicación por t^n, tenemos que
$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t \tau Sen(\tau)d\tau\right\}=\frac{\mathcal{L}\left\{tSen(t)\right\}}{s}=-\frac{\left(\mathcal{L}\{Sen(t)\}\right)'}{s}=-\frac{1}{s}\left(\frac{s}{s^2+1}\right)'=\frac{s^2-1}{s\left(s^2+1\right)^2}$$

Convolución y transformadas

Como hemos visto, la transformada de Laplace es lineal, es decir, la transformada de una suma es la suma de las transformadas, entonces cabe preguntarse si se tiene algo similar para el producto, la respuesta es no. En general la transformada no conmuta con la multiplicación ordinaria, o sea, la transformada de un producto no es el producto de las transformadas, pero podemos definir un nuevo producto generalizado bajo el cual esto es cierto.

Definición [Convolución] La función $h:\mathcal{C}(I)\times\mathcal{C}(I)\to\mathcal{C}(I)$, donde $\mathcal{C}$ es el conjunto de funciones continuas en el intervalo $I=[0,+\infty[$ dada por
$h(t)=(f\star g)(t)=\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau$
se conoce como la convolución de f y g.

La convolución tiene muchas de las propiedades de la multiplicación ordinaria, como veremos en el siguiente teorema.

Teorema [Propiedades de la convolución] Sean f y g funciones continuas en el intervalo $[0,+\infty[$, entonces

$f \star g = g \star f$ (ley conmutativa) $f \star (g+h) = f \star g + f \star h$ (ley distributiva) $(f \star g) \star h = f \star (g \star h)$ (ley asociativa) $f \star 0 = 0 \star f = 0$

Demostración

La demostración de estas propiedades es muy simple. Haremos la primera de ellas y dejamos las restantes al lector.

$$(f \star g)(t) = \int_0^t f(\tau) g(\underbrace{t-\tau}_{u=t-\tau}) d\tau = -\int_t^0 f(t-u) g(u) du = \int_0^t g(u) f(t-u) du = (g \star f)(t)$$

Observación: sin embargo, existen algunas propiedades de la multiplicación ordinaria que la convolución no tiene. Por ejemplo, no es cierto en general que $f \star 1 = f$; para ver esto, note que

$$Cos(t) \star 1 = \int_0^t Cos(\tau) d\tau = Sen(\tau)\Big|_0^t = Sen(t)$$

Ejemplo Calcule la convolución de $f(t) = e^t$ y $g(t) = Sen(t)$.

Solución Usando la definición e integración por partes, tenemos que

$$e^t \star Sen(t) = \int_0^t e^\tau Sen(t-\tau) d\tau = \frac{e\left(Cos(\tau - t) - Sen(\tau - t)\right)}{2}\Bigg|_0^t = \frac{e^t - Sen(t) - Cos(t)}{2}$$

Ejemplo Calcule la convolución de las funciones $f(t) = Sen(at)$ y $g(t) = Cos(bt)$.

Solución Usando la definición e integración por partes

$$\left(Sen(at) \star Cos(bt)\right)(t) = \int_0^t Sen\left(a(t-\tau)\right) Cos(b\tau) d\tau = \frac{1}{2}\int_0^t \left(Sen\left(at + (b-a)\tau\right) + Sen\left(at - (b-\right.\right.$$

$$= \frac{a\left(Cos(bt) - Cos(at)\right)}{(a+b)(a-b)}$$

Observación: para calcular la integral

$$\int_0^t Sen(t-\tau) Cos(b\tau) d\tau$$

del ejemplo anterior, hemos usado la identidad

$$Sen(\alpha) Cos(\beta) = \frac{Sen(\alpha+\beta) + Sen(\alpha-\beta)}{2}$$

Otras identidades que pueden ser útiles en el cálculo de integrales similares son

$$Cos(\alpha) Cos(\beta) = \frac{Cos(\alpha+\beta) + Cos(\alpha-\beta)}{2} \; Sen(\alpha) Sen(\beta) = \frac{Cos(\alpha-\beta) - Cos(\alpha+\beta)}{2}$$

El siguiente teorema establece un resultado de mucha importancia teórica y práctica, como veremos.

Teorema [Teorema de convolución] Si $\mathcal{L}\{f(t)\}$ y $\mathcal{L}\{g(t)\}$ existen para $s > a \geq 0$, entonces

$$\mathcal{L}\{(f \star g)(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\}\mathcal{L}\{g(t)\} = F(s)G(s)$$

Observación: La forma inversa del teorema de convolución

$(f \star g)(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(F(s)G(s)\right)$

es muy importante en la solución de ecuaciones diferenciales, pues nos puede evitar el cálculo de fraciones parciales complejas.

Ejemplo Calcule

$\mathcal{L}\{e^t \star Sen(t)\}$

Solución Usando el teorema de convolución tenemos que

$\mathcal{L}\{e^t \star Sen(t)\} = \mathcal{L}\{e^t\}\mathcal{L}\{Sen(t)\} = \dfrac{1}{s-1}\dfrac{1}{s^2+1} = \dfrac{1}{(s+1)(s^2+1)}$

Observación: como ya hemos calculado $e^t \star Sen(t)$ podemos corroborar el resultado obtenido anteriormente

$\mathcal{L}\{e^t \star Sen(t)\} = \mathcal{L}\left\{\dfrac{e^t - Sen(t) - Cos(t)}{2}\right\} = \dfrac{1}{2}\mathcal{L}\{e^t\} - \dfrac{1}{2}\mathcal{L}\{Sen(t)\} - \dfrac{1}{2}\mathcal{L}\{Cos(t)\}$
$= \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{s-1} - \dfrac{1}{s^2+1} - \dfrac{s}{s^2+1}\right) = \dfrac{1}{(s-1)(s^2+1)}$

como obtuvimos en el ejemplo anterior.

Los siguientes ejemplos muestran el uso de la forma inversa del teorema de convolución para el cálculo de transformadas inversas.

Ejemplo Calcule la siguiente transformada inversa

$\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s-2)(s-3)}\right\}$

Solución Usando el teorema de convolución

$\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s-2)(s-3)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s-2}\dfrac{1}{s-3}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s-2}\right\} \star \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s-3}\right\} = \mathcal{L}e^{2t} \star$
$e^{3t} = \displaystyle\int_0^t e^{2\tau}e^{3(t-\tau)}d\tau = e^{3t} - e^{2t}$

Observación: en este ejemplo el uso de fraciones parciales resulta viable, pues

$\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s-2)(s-3)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s-3} - \dfrac{1}{s-2}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s-3}\right\} - \mathcal{L}\left\{\dfrac{1}{s-2}\right\} = e^{3t} -$
e^{2t}

Los siguientes ejemplos muestran situaciones donde el uso de fraciones parciales puede ser realmente complejo, comparado con el uso del teorema de convolución.

Ejemplo Calcule la siguiente transformada inversa

$\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{(s^2+4)(s^2+9)}\right\}$

Solución Usando el teorema de convolución, tenemos

$\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{(s^2+4)(s^2+9)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2+4}\dfrac{1}{s^2+9}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2+4}\right\} \star \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2+9}\right\} =$

$$Cos(2t) \star Sen(3t) = \int_0^t Cos(2\tau)Sen\left(3\left(t-\tau\right)\right)d\tau = \frac{3Cos(2t) - 3Cos(3t)}{5}$$

Observación: en este ejemplo la expansión en fraciones parciales no es tan simple

$$\frac{1}{(s^2+4)(s^2+9)} = \frac{1}{5}\left(\frac{s}{s^2+4} - \frac{s}{s^2+9}\right)$$

Ejemplo Calcule la siguiente transformada inversa

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s-2)(s^2-4s+13)}\right\}$$

Solución Usando convolución

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s-1)(s^2-4s+13)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-2+2}{\left((s-2)^2+4\right)(s-1)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-2}{\left((s-2)^2+4\right)(s-1)}\right\}$$

$$+\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{\left((s-2)^2+4\right)(s-1)}\right\} = e^{2t}Cos(3t)\star e^t + e^{2t}Sen(3t)\star e^t = \frac{e^t\left(1 - e^tCos(3t) + 2e^tSen(3t)\right)}{5}$$

El siguiente corolario es útil en el cálculo de la transformada de una integral.

Corolario Tomando $g(t) = 1$ en el teorema de convolución tenemos que

$$\frac{F(s)}{s} = \mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\}$$

donde $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$

Demostración

$$\mathcal{L}\{f \star 1\} = \mathcal{L}\{f(t)\}\mathcal{L}\{1\}\ \mathcal{L}\{\int_0^t f(\tau)d\tau\} = \frac{F(s)}{s}$$

Ejemplo Calcule la siguiente transformada

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t \tau Sen(\tau)d\tau\right\}$$

Solución Usando el corolario anterior y el teorema de multiplicación por t^n, tenemos que

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t \tau Sen(\tau)d\tau\right\} = \frac{\mathcal{L}\left\{tSen(t)\right\}}{s} = -\frac{\left(\mathcal{L}\{Sen(t)\}\right)'}{s} = -\frac{1}{s}\left(\frac{s}{s^2+1}\right)' = \frac{s^2-1}{s\left(s^2+1\right)^2}$$

4.4 Transformada inversa

La transformada inversa de Laplace

Al aplicar la transformada de Laplace a una ecuación diferencial la convertimos en una ecuación algebraica, la cual podemos resolver para $Y(s)$, es decir, $Y(s) = G(S)$. Ahora, como $\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s)$ si pudiéramos devolvernos obtendríamos la solución $y(t)$ que buscamos. Es decir, necesitamos de la transformada inversa $\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$, para hallar la función $y(t)$

$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$

Entonces definamos la transformada inversa.

Definición [Transformada inversa de Laplace] Si $F(s)$ es la transformada de Laplace de una función continua $f(t)$, es decir, $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, entonces la transformada inversa de Laplace de $F(s)$, escrita $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ es $f(t)$, es decir, $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$

Ejemplo Calcule

$\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2+4}\right\}$

Solución Puesto que

$\mathcal{L}\{Cos(2t)\} = \dfrac{s}{s^2+4}$

tenemos que

$\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2+4}\right\} = Cos(2t)$

Observación existe un problema potencial al trabajar con la transformada inversa, puede no ser única. En efecto, es posible que $\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{g(t)\}$, siendo $f(t) \neq g(t)$. Para nuestro propósito esto no es tan malo como parece, pues, si f y g son continuas y de orden exponencial en $[0, +\infty[$ y $\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{g(t)\}$, entonces $f(t) = g(t)$; pero, si f y g son continuas y de orden exponencial en $[0, +\infty[$ y $\mathcal{L}\{f(t)\} = \{g(t)\}$, entonces se puede demostrar que las funciones f y g son casi iguales; esto quiere decir, que pueden diferir sólo en puntos de discontinuidad.

Ejemplo Calcule $\mathcal{L}\{f(t)\}$, donde $f(t)$ esta dada por

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{Si } t \geq 0,\ t \neq 1,\ t \neq 2 \\ 3 & \text{Si } t = 1 \\ 4 & \text{Si } t = 2 \end{cases}$$

¿Qué se puede concluir ?

Solución

Usando la definición de transformada

$\mathcal{L}\{g(t)\} = \displaystyle\int_0^\infty e^{-st} g(t)dt$

$= \displaystyle\int_0^\infty e^{-st}dt$

$= -\dfrac{e^{-st}}{s}\Big|_0^\infty$

$= \dfrac{1}{s}$

Pero, anteriormente hemos comprobado que

$\mathcal{L}\{1\} = \dfrac{1}{s}$

con lo cual las funciones $f(t)$ y $g(t)$ tienen la misma transformada, de este modo, la transformada inversa de

$F(s) = \dfrac{1}{s}$

no es única.

El siguiente resultado establece el comportamiento de $F(s)$ en infinito. Teorema [Comportamiento de $F(s)$ en infinito] Sea $f : [0, +\infty[\to I\!R$ una función continua a trozos y de orden exponencial en $[0, +\infty[$, entonces

$\lim\limits_{s\to\infty} \mathcal{L}\{f(t)\} = \lim\limits_{s\to\infty} F(s) = 0$

Demostración

Puesto que $f(t)$ es continua a trozos en $[0, +\infty[$ necesariamente es acotada en este intervalo; o sea, $\|f(t)\| < M$ para todo $t \in [0, \infty[$. De donde

$$\left|\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}\right| \leq \int_{.} ..... \mid e^{-st} dt = -M \frac{e^{-st}}{s}\Big|_0^{\infty} = \frac{M}{s}$$

y así $\mid \mathcal{L}\left\{f(t)\right\} \mid \to 0$ cuando $s \to \infty$, de modo que $\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} \to 0$ cuando $s \to \infty$.

Observación: el resultado anterior es válido independientemente de que $f(t)$ sea continua a trozos o de orden exponencial, basta con que $F(s)$ existe.

Ejemplo ¿ Porqué no existe una función $f(t)$ tal que $\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{s}{s+1}$?

Solución Suponga que existe, entonces por el teorema anterior

$\lim\limits_{s\to\infty} \dfrac{s}{s+1} = 0$

lo cual es falso; por lo tanto no existe tal función.

Observación: con un argumento similar podemos concluir que no existen una función $f(t)$ tal que $F(s) = 1$, $F(s) = s^2$, $F(s) = Sen(s)$, $F(s) = Ln(s)$, es decir, estas funciones

no tienen transformada inversa. Por otro lado, una función racional $F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$ es la transformada de alguna función $f(t)$ si el grado del numerador $P(s)$ es menor que la del denominador $Q(s)$.

Los siguientes resultados son útiles en análisis de sistemas de control automático, especialmente cuando se trazan gráficas.

Teorema [Del valor inicial] Si $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ y $\lim_{t\to 0^+} f(t)$ existe y es igual a $f(0)$,

entonces

$\lim\limits_{t\to 0} f(t) = \lim\limits_{s\to +\infty} sF(s) = f(0)$

Demostración: Como

$\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0)$

y

$\lim\limits_{s\to +\infty} \mathcal{L}\{f'(t)\} = 0$

siempre y cuando $f'(t)$ sea continua a trozos y de orden exponencial. Tenemos que

$\lim\limits_{s\to +\infty} sF(s) = f(0) = \lim\limits_{t\to 0^+} f(t)$

siempre y cuando $f(t)$ sea continua por la derecha en $t = 0$.

Ejemplo Si $f(t) = Cos(t)$, calcule $\lim_{s\to\infty} sF(s)$.

Solución Usando el teorema del valor inicial

$\lim\limits_{s\to\infty} sF(s) = f(0) = 1$

Note que no fue necesario calcular $F(s)$.

Teorema [Del valor final] Si $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ y el límite $\lim_{t\to\infty} f(t)$ existe, entonces

$\lim\limits_{t\to +\infty} f(t) = \lim\limits_{s\to 0} sF(s)$

Demostración: Análoga a la anterior.

El siguiente teorema establece la linealidad de la transformada inversa.

Teorema [Linealidad de la transformada inversa] Sean f y g funciones continuas a trozos y de orden exponencial en el intervalo $[0, +\infty[$ tales que $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ y $\mathcal{L}\{g(t)\} = G(s)$, entonces

$\mathcal{L}^{-1}\{\alpha F(s) + G(s)\} = \alpha\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} + \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$

$= \alpha f(t) + g(t)$

Ejemplo Calcule

$\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{4s}{(s-2)(s^2+4)}\right\}$

Solución

Para usar la propiedad de linealidad de la transformada inversa de Laplace primero debemos expandir

$\dfrac{4s}{(s-2)(s^2+4)}$

en fraciones parciales

$\dfrac{1}{s-2} - \dfrac{s}{s^2+4} + \dfrac{2}{s^2+4}$

ahora sí

$\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{4s}{(s-2)(s^2+4)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s-2}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2+4}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{2}{s^2+4}\right\}$

$= e^{2t} - Cos(2t) + Sen(2t)$

El siguiente ejemplo ilustra el proceso que vamos a usar en la solución de ecuaciones diferenciales mediante Laplace. Es un ejemplo que puede ser resuelto de manera más eficiente con las técnicas ya estudiadas, pero el objetivo es aplicar algunas de las propiedades enunciadas hasta ahora e introducir la técnica de solución de ecuaciones diferenciales.

Ejemplo Use la transformada de Laplace para resolver el problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' - 3y &= e^{2t} \\ y(0) &= 1 \end{cases}$$

Solución

Aplicando transformada de Laplace a ambos lados de la ecuación diferencial

$\mathcal{L}\{y' - 3y\} = \mathcal{L}\{e^{2t}\}$

$\mathcal{L}\{y'\} - 3\mathcal{L}\{y\} = \dfrac{1}{s-2}$

$sY(s) - y(0) - 3Y(s) = \dfrac{1}{s-2}$

$sY(s) - 1 - 3Y(s) = \dfrac{1}{s-2}$

$Y(s) = \dfrac{s-1}{(s-2)(s-3)}$

$Y(s) = -\dfrac{1}{s-2} + \dfrac{2}{s-3}$

Ahora debemos de aplicar transformada inversa para hallar $y(t)$

$\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = -\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s-2}\right\} + 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s-3}\right\}$

$y(t) = -e^{2t} + e^{3t}$

Observación: está ecuación diferencial puede resolverse como una ecuación lineal con factor integrante $\mu(t) = e^{-3t}$.

4.5 Fracciones parciales y linealidad

La transformada de Laplace $F(s)$ de la función $f(t)$ está dada por la ecuación (4.1).

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\partial t \tag{4.1}$$

Mientras que la anti-transformada está dada por la ecuación (4.2).

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t) = \int_0^\infty e^{st} F(s)\partial t \tag{4.2}$$

Linealidad

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{Af_1(t) + Bf_2(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st}(Af_1(t) + Bf_2(t)\partial t & (4.3)\\ &= AF_1(s) + BF_2(s) & (4.4) \end{aligned}$$

Desplazamiento en el tiempo

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(t-a)\} &= \int_0^\infty e^{-st} f(t-a)\partial t & (4.5)\\ &= e^{-as}F(s) & (4.6) \end{aligned}$$

Desplazamiento en frecuencia

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{e^{at}f(t)\right\} &= \int_0^\infty e^{-(s-a)t} f(t)\partial t & (4.7)\\ &= F(s-a) & (4.8) \end{aligned}$$

Escalamiento

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(at)\} &= \int_0^\infty e^{-st} f(at)\partial t & (4.9)\\ &= \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right) & (4.10) \end{aligned}$$

Derivación

La transformada de Laplace nos permite trabajar con derivadas de forma alegebraica. A continuación la deducción para la transformada de la primera derivada.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{f'(t)\right\} &= \int_0^\infty e^{-st} f'(t)\partial t && (4.11)\\
&= e^{-st} f(t)\big|_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st} f(t)\partial t && (4.12)\\
&= sF(s) - f(0) && (4.13)
\end{aligned}$$

La deducción para la segunda derivada es equivalente.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{f''(t)\right\} &= \int_0^\infty e^{-st} f''(t)\partial t && (4.14)\\
&= s^2F(s) - sf(0) - f'(0) && (4.15)
\end{aligned}$$

Integración

Al igual que con las derivadas, la transformada de Laplace nos permite trabajar con las integrales de manera algebraica.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)\partial\tau\right\} &= \int_0^\infty e^{-st}\left(\int_0^t f(\tau)d\tau\right)dt && (4.16)\\
&= \frac{1}{s}F(s) && (4.17)
\end{aligned}$$

Teorema del valor inicial

$$\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s) \tag{4.18}$$

Teorema del valor final

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s) \tag{4.19}$$

Transformada de la convolución

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)\partial\tau\right\} = F_1(s)F_2(s) \tag{4.20}$$

4.6 Algunas transformadas comunes

Escalón unitario

$$\mathcal{L}\left\{u(t)\right\} = \int_0^\infty e^{-st}u(t)\partial t = -\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_0^\infty = \frac{1}{s} \tag{4.21}$$

Impulso unitario

$$\mathcal{L}\left\{\delta(t)\right\} = s\mathcal{L}\left\{u(t)\right\} - u(0^-) = \frac{s}{s} - 0 = 1 \tag{4.22}$$

Exponencial

$$\mathcal{L}\left\{e^{at}u(t)\right\} = \int_0^\infty e^{-(s-a)t}u(t)dt = \frac{1}{s-a} \tag{4.23}$$

Donde a puede ser cualquier número complejo de la forma $a = k + j\omega$. O directamente $a = j\omega$.

De hecho, la transformada de $e^{-j\omega t}u(t)$ $(\frac{1}{s+j\omega})$ y la transformada de $e^{j\omega t}u(t)$ $(\frac{1}{s-j\omega})$, pueden resultar muy útiles para resolver circuitos de primer y segundo orden.

Funciones senoidales

Las transformadas del seno y el coseno pueden obtenerse a partir de la transformada de la exponencial, utilizando la fórmula de Euler.

$$\mathcal{L}\left\{\cos(\omega t)u(t)\right\} = \mathcal{L}\left\{\frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}u(t)\right\} \tag{4.24}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s - j\omega t} + \frac{1}{s + j\omega t}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{s + j\omega + s - j\omega}{s^2 - \omega^2}\right) \tag{4.25}$$

$$\mathcal{L}\left\{\cos(\omega t)u(t)\right\} = \frac{s}{s^2 - \omega^2} \tag{4.26}$$

$$\mathcal{L}\left\{\sin(\omega t)u(t)\right\} = \mathcal{L}\left\{\frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}u(t)\right\} \tag{4.27}$$

$$= \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{s - j\omega t} - \frac{1}{s + j\omega t}\right) = \frac{1}{2j}\left(\frac{s + j\omega - s + j\omega}{s^2 - \omega^2}\right) \tag{4.28}$$

$$\mathcal{L}\left\{\sin(\omega t)u(t)\right\} = \frac{\omega}{s^2 - \omega^2} \tag{4.29}$$

4.7 Aplicaciones de la transformada de Laplace

Solución de ecuaciones diferenciales

La transformada de Laplace es útil para resolver ecuaciones diferenciales que involucran funciones $f(t)$, periódicas, funciones discontinuas a trozos o deltas de Dirac, como lo muestran los siguientes ejemplos.

Ejemplo Resuelva el siguiente problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 2y &= \delta(t-\pi) \\ y(0) &= 0 \\ y'(0) &= 0 \end{cases}$$

Solución Tomando la transformada a ambos lados, tenemos que

$\left(s^2 + 2s + 2\right) Y(s) = e^{-\pi s}$

$$Y(s) = \frac{e^{-\pi s}}{s^2 + 2s + 2}$$

$$Y(s) = \frac{e^{-\pi s}}{(s+1)^2 + 1}$$

Y al aplicar la transformada inversa

$y(t) = e^{-(t-\pi)} Sen(t-\pi) H(t-\pi)$

Ejemplo Resuelva el siguiente problema de valor inicial

donde $f(t)$ está dada por

$$\begin{cases} Cos(4t) & \text{Si } 0 \leq t < \pi \\ 0 & \text{Si } t \geq \pi \end{cases}$$

Solución

La función $f(t)$ puede interpretarse como una fuerza externa que actúa en un sistema mecánico sólo por un tiempo corto, siendo desactivada posteriormente. Aunque este problema puede resolverse de la forma convencional no es conveniente.

Primero usemos la función de Heaviside para reescribir $f(t)$:

$f(t) = Cos(4t) - Cos(4t)H(t-\pi) = Cos(4t) - Cos\left(4\left((t-\pi)\right)\right) H(t-\pi)$

Aplicando transformada tenemos que

$$s^2X(s) - sx(0) - x'x(0) + 16X(s) = \frac{s}{s^2+16} - \frac{se^{-\pi s}}{s^2+16}$$

$$\left(s^2+16\right)X(s) = 1 + \frac{s}{s^2+16} - \frac{se^{-\pi s}}{s^2+16}$$

$$X(s) = \frac{1}{s^2+16} + \frac{s}{(s^2+16)^2} - \frac{se^{-\pi s}}{(s^2+16)^2}$$

Al aplicar la transformada inversa obtenemos

$$x(t) = \frac{1}{4}Sen(4t) + \frac{t}{8}Sen(4t) - \frac{t-\pi}{8}Sen\left(4\left((t-\pi)\right)H(t-\pi)\right.$$

Ejemplo Resolver el siguiente problema de valor inicial

$$\begin{cases} ty'' + y' + 4ty &= 0 \\ y(0) &= 3 \\ y'(0) &= 0 \end{cases}$$

Solución En este caso la ecuación diferencial tiene coeficientes variables, por lo que la transformada de Laplace resulta muy útil.

$$\mathcal{L}\left\{ty''\right\} + \mathcal{L}\left\{y'\right\} + 4\mathcal{L}\left\{ty\right\} = 0$$

$$-\left(s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)\right)' + sY(s) - y(0) - 4Y'(s) = 0$$

$$\frac{dY(s)}{ds} + \frac{sY(s)}{s^2+4} = 0$$

Integrando obtenemos que

$$Ln\left(Y(s)\right) + \frac{1}{2}Ln\left(s^2+4\right) = c \Rightarrow Y(s) = \frac{c}{\sqrt{s^2+4}}$$

De donde obtenemos que

$$y(t) = cJ_0(2t)$$

Para determinar el valor de c obsérvese que $y(0) = cJ_0(0) = c = 3$. Con lo cual la solución al problema está dada por $y(t) = 3J_0(2t)$.

Sistemas mecánicos

Ejemplo Un peso de 16 libras suspendido de un resorte lo estira 2 pies. En el instante $t = 0$ el peso se hala 3 pies por debajo de la posición de equilibrio y se suelta. Asuma una fuerza amortiguadora de 4 veces la velocidad instantánea. En el instánte $t = 2$ el peso recibe un golpe seco, desde abajo, que transmite 2 unidades de momentum a la masa; además, en el instante $t = 4$ se activa una fuerza externa con una magnitud de 4 unidades. Entonces

Determine la ecuación diferencial y condiciones iniciales que describen el movimiento.

Encuentre la posición del peso en cualquier instante t.

¿Cuál es la posición del peso en $t = 5$?

Solución Para hallar la constante del resorte

$F = ks \Rightarrow 16 = 2k \Rightarrow k = 8$

Con lo cual el modelo matemático es

$$\begin{cases} x'' + 8x' + 16x &= 2\left(-2\delta(t-2) + 4H(t-4)\right) \\ x(0) &= 3 \\ x'(0) &= 0 \end{cases}$$

Aplicando transformada

$s^2X(s) - sx(0) - x'(0) + 8sX(s) - 8x(0) + 16X(s) = -4e^{-2s} + 8\dfrac{e^{-4s}}{s}$

$(s+4)^2 X(s) = 3s + 3$

$- 4e^{-2s} + 8\dfrac{e^{-4s}}{s} X(s) = \dfrac{3s+3}{(s+4)^2} - \dfrac{4e^{-2s}}{(s+4)^2}$

$+ \dfrac{8e^{-4s}}{s(s+4)^2}$

El -2 que acompaña a la función delta se debe a que el golpe es desde abajo con una intensidad de 2 unidades, además recuerde que $x(0) = 3$, pues el peso esta por debajo de la posición de equilibrio. Aplicando fracciones parciales

$X(s) = \dfrac{3}{s+4} - \dfrac{9}{(s+4)^2} - \dfrac{4e^{-2s}}{(s+4)^2}$

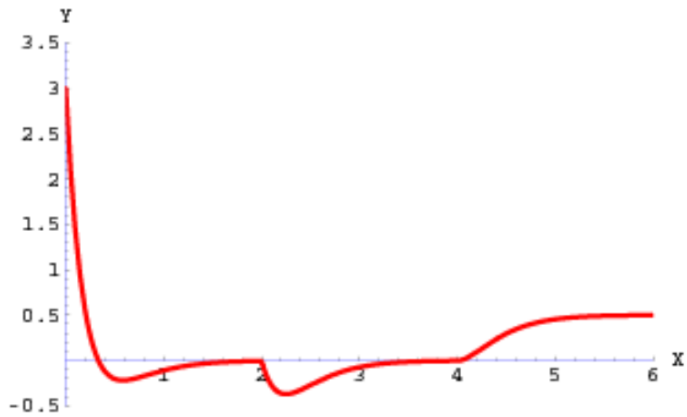
$$+\frac{8e^{-4s}}{s+4}-\frac{32e^{-4s}}{s\left(s+4\right)^{2}}$$

De donde obtenemos que

$$x(t)=3e^{-4t}-9te^{-4t}-4(t-2)e^{-4(t-2)}H(t-2)+8e^{-4(t-2)}H(t-4)$$

$$-\ 32(t-4)e^{-4(t-4)}H(t-4)-32$$

Y así $x(5)=0.454137$. La gráfica de $x(t)$ se muestra en la figura



Ecuaciones Integrales

El teorema de convolución es útil en la solución de otros tipos de ecuaciones en las cuales aparecen integrales de una funciones desconocida.

Definición [Ecuaciones integrales de Volterra] La ecuación

$$f(t)=\phi(t)+\alpha\int_a^t K(t,\tau)f(\tau)d\tau$$

donde $f(t)$, $K(t,\tau)$ son funciones conocidas, $f(t)$ es una función incógnita y α, un parámetro numérico, se llama ecuación integral lineal de Volterra de segunda especie. La función $K(t,\tau)$ se denomina núcleo de la ecuación de Volterra. Si $\phi(t)=0$ la ecuación integral toma la forma

$$f(t)=\alpha\int_a^t K(t,\tau)f(t)dt$$

y se llama ecuación integral homogénea de Volterra de segunda especie.

Ejemplo Resuelva la siguiente ecuación integral

$f(t) = 4t - 3\int_0^t f(\tau)Sen(t-\tau)d\tau$

Solución

Aplicando la transformada a ambos lados de la ecuación integral tenemos

$\mathcal{L}\{f(t)\} = 4\mathcal{L}\{t\} - 3\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)Sen(t-\tau)d\tau\right\}$

$$F(s) = \frac{4}{s^2} - \frac{3F(s)}{s^2+1}$$

$$\left(1 + \frac{3}{s^2+1}\right)F(s) = \frac{4}{s^2}$$

$$F(s) = \frac{4(s^2+1)}{s^2(s^2+4)}$$

$$F(s) = \frac{1}{s^2} + \frac{3}{s^2+4}$$

Luego

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2} + \frac{3}{s^2+4}\right\}$

$$= \mathcal{L}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} + 3\mathcal{L}\left\{\frac{1}{s^2+4}\right\}$$

$$= t + \frac{3}{2}Sen(2t)$$

Circuitos L-R-C

En un circuito L-R-C en serie la segunda ley de Kirchhoff establece que la suma de las caídas de tensión a través de un inductor, una resistencia y un capacitor es igual a la tensión aplicada $E(t)$. Sabemos que

La caída de tensión a través de un inductor es $L\frac{di}{dt}$.

La caída de tensión a través de la resistencia es Ri.

La caída de tensión a través de un capacitor es $\frac{q}{c}$, pero como

$\frac{dq}{dt} = i(t) \Rightarrow q = \int_0^t i(\tau)d\tau$

con lo cual la caída de tensión a través de un capacitor esta dada por

$\frac{1}{c}\int_0^t i(\tau)d\tau$

donde $i(t)$ es la corriente y L, R y C son constantes conocidas como: la inductancia, la resistencia y la capacitancia, respectivamente.

De lo anterior obtenemos que la corriente $i(t)$ en un circuito satisface la ecuación integrodiferencial

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{c}\int_0^t i(\tau)d\tau$$

la cual podemos resolver aplicando transformada de Laplace.

Ejemplo Determine la corriente $i(t)$ en un circuito L-R-C en serie para el cual L=0.1H (Henrios), R=20 Ω (Ohms), C=10^{-3} F (Faradios) y $i(0) = 0$. La tensión $E(t)$ aplicada al circuito.

Solución

Puesto que la función se anula para $t \geq 1$, se puede escribir como

$$E(t) = 120t - 120tH(t-1)$$

con lo cual la ecuación diferencial que modela este circuito es

$$\frac{1}{10}\frac{di}{dt} + 20i + 1000\int_0^t i(\tau)d\tau = 120t - 120tH(t-1)$$

Y al aplicar la transformada a ambos lados de la ecuación anterior, obtenemos que

$$\frac{1}{10}sI(s) - i(0) + 20I(s) + 1000\frac{I(s)}{s} = 120\left(\frac{1}{s^2} - \frac{e^{-s}}{s^2} - \frac{e^{-s}}{s}\right)$$

$$s^2I(s) + 200sI(s) + 10000I(s) = 1200s\left(\frac{1}{s^2} - \frac{e^{-s}}{s^2} - \frac{e^{-s}}{s}\right)$$

$$(s+100)^2 I(s) = 1200\left(\frac{1}{s} - \frac{e^{-s}}{s} - e^{-s}\right)$$

de donde obtenemos que

$$I(s) = 1200\left(\frac{1}{s(s+100)^2} - \frac{e^{-s}}{s(s+100)^2} + \frac{e^{-s}}{(s+100)^2}\right)$$

Usando fraciones parciales tenemos que

$$I(s) = \frac{3}{25}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+100} - \frac{100}{s(s+100)^2}\right.$$

$$\left. - \frac{e^{-s}}{s} + \frac{e^{-s}}{s+100} + \frac{100e^{-s}}{(s+100)^2} - \frac{10000e^{-s}}{(s+100)^2}\right)$$

y al aplicar la transformada inversa $i(t) = \frac{3}{25}\left(1 - H(t-1) - e^{-100t} + e^{-100t}H(t-1)\right)$ $- 12e^{-100t} - 1188(t-1)e^{-100(t-1)}H(t-1)$

Sistemas de ecuaciones diferenciales

El siguiente ejemplo muestra el uso de la transformada de Laplace en la solución de sistemas de ecuaciones diferenciales.

Ejemplo Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dx}{dt} = 2x - 3y$$

$$\frac{dy}{dt} = y - 2x$$

con las condiciones $x(0) = 8$, $y(0) = 3$.

Solución Si $\mathcal{L}\{x(t)\} = X(s)$ y $\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s)$, entonces

$$sX(s) - 8 = 2X(s) - 3Y(s)$$

$$sY(s) - 3 = Y(s) - 2X(s)$$

o agrupando

$$(s-2)\,X(s) + 3Y(s) = 8$$

$$2X(s) + (s-1)\,Y(s) = 3$$

Ahora usemos la regla de Cramer para resolver el sistema anterior

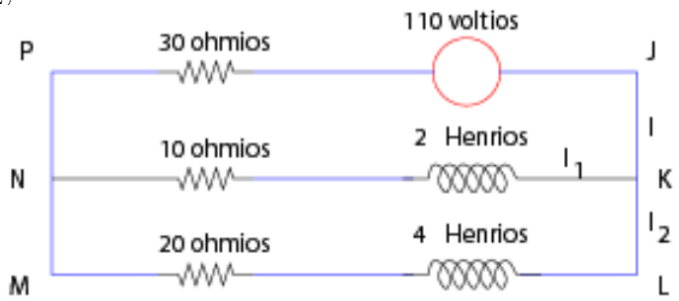
$$X(s) = \frac{\begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 3 & s-1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 3 & s-1 \end{vmatrix}} = \frac{8s-17}{s^2-3s-4} = \frac{8s-17}{(s+1)(s-4)} = \frac{5}{s+1} + \frac{3}{s-4}$$

$$Y(s) = \frac{\begin{vmatrix} s-2 & 8 \\ 2 & 31 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s-2 & 3 \\ 2 & s-1 \end{vmatrix}} = \frac{3s-22}{s^2-3s-4} = \frac{3s-22}{(s+1)(s-4)} = \frac{5}{s+1} - \frac{2}{s-4}$$

De donde obtenemos que
$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = 5e^{-t} + 3e^{4t}$

$y(t) = \mathcal{L}\{Y(s)\} = 5e^{-t} - 2e^{4t}$

Ejemplo Dada la malla eléctrica de la figura, determine el valor de las corrientes i_1 y i_2, si inicialmente valen cero.



Solución Puesto que la segunda ley de Kirchhoff establece que la suma algebraica de las caídas de voltaje alrededor de cualquier malla cerrada es cero, tenemos que:

Para la malla KLMNK
$-10i_1 - 2\frac{dti_1}{dt} + 4\frac{di_2}{dt} + 20i_2 = 0$

Y para la malla JKNPJ:
$30i - 110 + 2\frac{di_1}{dt} + 10i_1 = 0$

De donde obtenemos el siguiente sistema:

$$-5i_1 - \frac{di_1}{dt} + 2\frac{di_2}{dt} + 10i_2 = 0$$

$$\frac{di_1}{dt} + 20i_1 + 15i_2 = 55$$

Tomando transformada de Laplace y usando las condiciones iniciales, $i_1(0) = i_2(0) = 0$, obtenemos que

$$(s+5)\, i_1 - (2s+10)\, i_2 = 0$$

$$(s+20)\, i_1 + 15i_2 = \frac{55}{s}$$

Observe que de la primera ecuación $i_1 = 2i_2$, de modo que la segunda ecuación se transforma en

$$i_2 = \frac{55}{s\,(2s+55)} = \frac{1}{s} - \frac{2}{2s+55}$$

Entonces

$$i_2(t) = 1 - e^{-\frac{55t}{2}}$$

$$i_1(t) = 2i_2 = 2 - 2e^{-\frac{55t}{2}}$$

y

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) = 3\left(1 - e^{-\frac{55t}{2}}\right)$$

La transformada de Laplace resulta de suma utilidad cuando se tienen expresiones

de la forma:

$$F(s) = \frac{a_0 s^N + a_1 s^{N-1} + \ldots + a_n}{b_0 s^M + b_1 s^{M-1} + \ldots + b_m} \tag{4.30}$$

Es decir, un cociente de dos polinomios en s.

En principio, una vez que se obtiene una función de esta forma, se necesita que el orden del numerador sea menor que el orden del denominador, porque de esa manera se puede anti-transformar utilizando las propiedades.

Si $N \geq M$, será necesario reducir el orden del polinomio, efectuando una división de polinomios, de tal manera que:

$$F(s) = K_1 s^{N-M} + K_2 s^{N-M-1} + \ldots + K_{N-M} + \frac{K}{b_0 s^M + \ldots + b_m} \tag{4.31}$$

Donde K_1 es el resultado del primer cociente, K_2 el resultado del segundo, y K es el resto.

De esta forma, la anti-transformada de $F(s)$ será:

$$f(t) = C_{N-M}\delta(t) + C_{N-M+1}\delta'(t) + \ldots + C_1\delta^{N-M}(t) + \mathcal{L}\left\{\frac{K}{b_0 s^M + \ldots + b_m}\right\} \tag{4.32}$$

En el caso en que $N = M$, también es necesario dividir los polinomios, pero en el resultado habrá una única $\delta(t)$.

Ejemplo

$$F(s) = \frac{2s^3 + 3s^2 + 5s + 2}{s^2 + 3s + 1} \tag{4.33}$$

Dividiendo el númerador por el denominador se obtiene un cociente de $2s - 3$ y un resto de $12s + 5$. De manera que $F(s)$ será:

$$F(s) = 2s - 3 + \frac{12s + 5}{s^2 + 3s + 1} \tag{4.34}$$

Finalmente, cuando $N < M$, es necesario buscar las raíces del denominador, que serán los polos de la transferencia. La función tendrá la forma:

$$F(s) = \frac{N(s)}{s_0(s - s_1)\ldots(s - s_M)} \tag{4.35}$$

Donde $N(s)$ es un numerador, un polinomio de orden N.

4.7.1 Raíces reales y diferentes

En el caso en que las raíces $s_0 \dots s_M$ sean todas reales y diferentes, se puede separar la función por el método de fracciones simples, de tal manera que:

$$F(s) = \frac{A}{s - s_1} + \frac{B}{s - s_2} + \dots \frac{M}{s - s_M} \tag{4.36}$$

Los coeficientes, para tres raíces, se pueden encontrar de la siguiente manera:

$$A = \frac{N(s_1)}{(s_1 - s_2)(s_1 - s_3)} \quad B = \frac{N(s_2)}{(s_2 - s_1)(s_2 - s_3)} \quad C = \frac{N(s_3)}{(s_3 - s_1)(s_3 - s_2)} \tag{4.37}$$

Donde $N(s)$ es el numerador y A, B y C son números que no dependen de s.

***Ejemplo* numérico**

$$\begin{aligned}
F(s) &= \frac{3}{s^2 + 8s + 15} = \frac{3}{(s+3)(s+5)} && (4.38)\\
&= \frac{A}{s+3} + \frac{B}{s+5} && (4.39)\\
A &= \frac{3}{-3+5} = \frac{3}{2} && (4.40)\\
B &= \frac{5}{-5+3} = -\frac{3}{2} && (4.41)\\
F(s) &= \frac{3}{2}\left(\frac{1}{s+3} + \frac{1}{s+5}\right) && (4.42)\\
f(t) &= \frac{3}{2}\left(e^{-3t} + e^{-5t}\right) u(t) && (4.43)
\end{aligned}$$

***Ejemplo* en un circuito**

Un circuito capacitivo estará caracterizado por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}
V(t) &= i(t)R_1 + V_A(t) + \frac{1}{C_2}\int_0^t i(\tau)d\tau + i(t)R_3 && (4.44)\\
i(t) &= i_{C1} + i_{R2} = C_1\frac{dV_A(t)}{dt} + \frac{V_A}{R_2} && (4.45)
\end{aligned}$$

Donde V_A es la tensión entre los bornes del capacitor C_1.

Haciendo la transformada de Laplace en ambas ecuaciones, y operando para obtener un cociente de polinomios:

$$
\begin{aligned}
V(s) &= I(s)R_1 + V_A(s) + \frac{1}{sC_2}I(s) + I(s)R_3 && (4.46)\\
&= I(s)\left(R_1 + \frac{1}{sC_2} + R_3\right) + V_A(s) && (4.47)\\
I(s) &= sC_1V_A(s) + \frac{V_A}{R_2} && (4.48)\\
V_A(s) &= \frac{I(s)}{sC_1 + \frac{1}{R_2}} && (4.49)\\
V(s) &= I(s)\left(R_1 + \frac{1}{sC_2} + R_3\right) + \frac{I(s)}{sC_1 + \frac{1}{R_2}} && (4.50)\\
V(s) &= I(s)\left(R_1 + \frac{1}{sC_2} + R_3 + \frac{1}{sC_1 + \frac{1}{R_2}}\right) && (4.51)\\
V(s) &= I(s)\left(\frac{sC_2R_1 + 1 + sC_2R_3}{sC_2} + \frac{R_2}{sC_1R_2 + 1}\right) && (4.52)\\
V(s) &= I(s)\left(\frac{(sC_2R_1 + 1 + sC_2R_3)(sC_1R_2 + 1) + sC_2R_2}{sC_2(sC_1R_2 + 1)}\right) && (4.53)
\end{aligned}
$$

4.7.2 Raíces reales dobles

Si una o más raíces se repiten, se trata de raíces dobles, en lugar de simples. Para hacer la separación en fracciones será necesario tener en cuenta esta situación.

Por ejemplo, para un caso con una raíz doble s_1 y una raíz simple s_2:

$$F(s) = \frac{A}{(s - s_1)^2} + \frac{B}{s - s_1} + \frac{C}{s - s_2} \tag{4.54}$$

En este caso, los coeficientes, se pueden encontrar de la siguiente manera:

$$A = \frac{N(s_1)}{(s_1 - s_2)} \quad B = \frac{\partial}{\partial s}\left.\frac{N(s)}{(s - s_2)}\right|_{s_1} \quad C = \frac{N(s_2)}{(s_2 - s_1)^2} \tag{4.55}$$

Donde $N(s)$ es el numerador y A, B y C son números que no dependen de s. Para el coeficiente B es necesario hacer la derivada de la función, ya que de ese modo se reduce el orden del polinomio.

En el caso en que hubiera una raíz triple, el procedimiento sería similar, teniendo una fracción con denominador $(s - s_1)^3$, otra con denominador $(s - s_1)^2$ y otra con denominador $(s - s_1)$.

CAPITULO 5

Solución de Ecuaciones Diferenciales Lineales Usando Series de Potencias

5.1 Introducción al uso de la series

Hasta ahora hemos resuelto, principalmente, ecuaciones diferenciales lineales de orden dos o superior, con coeficientes constantes, a excepción de la ecuación de Cauchy-Euler. Las aplicaciones en las que aparecen ecuaciones diferenciales con coeficientes variables surgen con mucha frecuencia en diversas áreas de la ciencia.

Una ecuación diferencial lineal de segundo orden con coeficientes variables, tan sencilla como

$$y'' + xy = 0,$$

no tiene soluciones elementales; podemos encontrar dos soluciones linealmente independientes representadas por series infinitas.

Como hemos enfatizado pocas ecuaciones diferenciales tienen soluciones que pueden expresarse explícita o implícitamente en términos de funciones elementales. Aún, cuando las soluciones no puedan expresarse de esta forma, el problema de hallarlas

no es del todo desesperanzado, existen algunas otras alternativas como los métodos: gráficos, numéricos y de series de potencias del cual hablaremos en breve.

Una solución implícita expresada en términos de funciones elementales es de menos utilidad que una serie de potencias o una solución numérica, esto, por ser expresiones más complicadas para las cuales resulta muy difícil expresar una variable en términos de la otra. Vamos a limitar nuestro estudio al enunciado y manejo del método, sin entrar en los detalles teóricos del mismo. Recuerde que una serie de potencias representa a una función f en un intervalo de convergencia I y que podemos derivarla sucesivamente, para obtener series para f', f'', f''', etc.

Por ejemplo,

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$f(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \ldots = \sum_{i=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$f(x) = 2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2 + 20a_5x^3 + \ldots = \sum_{i=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

5.2 Empleo de una serie de potencias centradas en el origen para resolver una ecuación diferencial lineal

Los siguientes ejemplos muestran como aplicar el método de las series de potencias a la solución de ecuaciones diferenciales. Iniciamos con un ejemplo muy simple, pero que nos hará entender la mecánica del método.

Ejemplo Usando series de potencias halle la solución de la ecuación $y' - 2y = 0$.

Solución

Supongamos que la solución se puede expresar como

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Entonces, y' esta dada por

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial, obtenemos que

$$\begin{aligned} y' - 2y &= 0 \\ \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} - 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= 0 \\ \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} &= 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \end{aligned}$$

Ahora debemos ajustar los índices de las sumas de forma que aparezca x^n en cada serie.

$$\sum_{n=-1}^{\infty} (n+1)\, a_{n+1} x^n = 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Igualando los coeficientes correspondientes

$$(n+1)\, a_{n+1} = 2a_n \Rightarrow a_{n+1} = \frac{2a_n}{n+1}$$

para $n \geq 0$.

Esta fórmula genera los siguientes coeficientes

$$\begin{aligned}
a_1 &= 2a_0 \\
a_2 &= \frac{2a_1}{2} = \frac{2^2 a_0}{2} \\
a_3 &= \frac{2a_2}{3} = \frac{2^3 a_0}{2\cdot 3} = \frac{2^3 a_0}{3!} \\
a_4 &= \frac{2a_3}{4} = \frac{2^4 a_0}{2\cdot 3\cdot 4} = \frac{2^4 a_0}{4!} \\
&\vdots \\
a_n &= \frac{2^n a_0}{n!}
\end{aligned}$$

De donde obtenemos que la solución esta dada por

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n a_0}{n!} x^n = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n!} = a_0 e^{2x}$$

Aquí hemos usado la expansión en series de potencias para la función exponencial

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Observación: esta ecuación diferencial puede ser resuelta de manera más simple por medio de separación de variables.

$$y' - 2y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{y} = 2dx \Rightarrow Ln(y) = 2x + c \Rightarrow y = ce^{2x},$$

pero como digimos, la idea es ilustrar el método.

El siguiente ejemplo no puede ser resuelto por las técnicas estudiadas hasta el momento, a pesar de ser muy simple en apariencia.

Ejemplo Usando series de potencias resuelva la ecuación diferencial $y'' + xy' + y = 0$

Solución

Suponga que

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

es una solución de la ecuación diferencial. Entonces

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} \Rightarrow xy' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n$$

y

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} n\,(n-1)\,a_n x^{n-2}$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} n\,(n-1)\,a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= 0 \\ \sum_{n=0}^{\infty} n\,(n-1)\,a_n x^{n-2} &= -\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_n x^n \end{aligned}$$

Ajustando los índices

$$\sum_{n=-2}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n = -\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\,a_n x^n$$

Igualando los coeficientes

$$a_{n+2} = -\frac{n+1}{(n+2)\,(n+1)} a_n = -\frac{a_n}{n+2}$$

para $n \geq 0$.

De esta forma los coeficientes de la serie solución están dados por:

Coeficientes pares:

$$
\begin{aligned}
a_2 &= -\frac{a_0}{2} \\
a_4 &= -\frac{a_2}{4} = \frac{a_0}{2\cdot 4} \\
a_5 &= -\frac{a_4}{6} = -\frac{a_0}{2\cdot 4\cdot 6} \\
&\vdots \\
a_{2n} &= \frac{(-1)^n a_0}{2\cdot 4\cdot 6\ldots(2n)} = \frac{(-1)^n a_0}{2^n n!}
\end{aligned}
$$

Coeficientes impares:

$$
\begin{aligned}
a_3 &= -\frac{a_1}{3} \\
a_5 &= -\frac{a_3}{5} = \frac{a_1}{3\cdot 5} \\
a_7 &= -\frac{a_5}{7} = -\frac{a_1}{3\cdot 5\cdot 7} \\
&\vdots \\
a_{2n+1} &= \frac{(-1)^n a_1}{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n+1)}
\end{aligned}
$$

De esta forma la serie solución se puede representar como la suma de dos series, una para las potencias pares con coeficientes en términos de a_0 y otra para las potencias impares con coeficientes en términos de a_1.

$$
y = a_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{2^n n!} + a_1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-)^n x^{2n+1}}{3\cdot 5\cdot 7\ldots(2n+1)}
$$

Observación: la solución tiene dos constantes arbitrarias a_0 y a_1 tal como era de esperar para una ecuación diferencial de segundo orden.

El siguiente ejemplo ilustra el procedimiento cuando la ecuación diferencial tiene condiciones iniciales.

Ejemplo

Use el teorema de Taylor para hallar la solución en serie de potencias del problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' &= y^2 - x \\ y(0) &= 1 \end{cases}$$

A continuación, use los primeros seis términos de la solución para aproximar los valores de y en el intervalo $[0, 1]$ con un paso de avance de 0.1.

Solución

La solución y del problema de valor inicial puede expresarse por medio del teorema de Taylor como

$$y = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y''(0)}{3!}x^3 + \dots$$

con $c = 0$. Como $y(0) = 1$ y $y' = y^2 - x$, tenemos que

$$\begin{aligned} y' = y^2 - x &\Rightarrow y'(0) = 1 \\ y'' = 2yy' - 1 &\Rightarrow y''(0) = 2 - 1 = 1 \\ y''' = 2yy'' + 2(y')^2 &\Rightarrow y'''(0) = 2 + 2 = 4 \\ y^{(4)} = 2yy''' + 6y'y'' &\Rightarrow y^{(4)}(0) = 8 + 6 = 14 \\ y^{(5)} = 2yy^{(4)} + 8y'y''' + 6(y'')^2 &\Rightarrow y^{(5)}(0) = 28 + +32 + 6 = 66 \end{aligned}$$

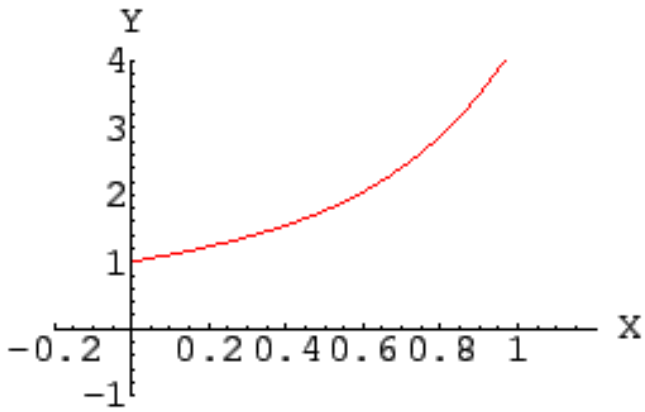
De donde obtenemos que

$$y = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{4}{3!}x^3 + \frac{14}{4!}x^4 + \frac{66}{5!}x^5 + \dots$$

Usando los seis primeros términos de esta serie, calculamos los valores de y que se muestran en la siguiente tabla, además en la figura se muestra la gráfica de este polinomio.

x	y	x	y
0	1	0.6	2.0424
0.1	1.1057	0.7	2.4062
0.2	1.2264	0.8	2.8805
0.3	1.3691	0.9	34985
0.4	1.5432	1	4.3
0.5	1.7620	1.1	528999

Observación: para una serie de Taylor entre más lejos estemos del centro de convergencia (en este caso $c = 0$), menor es la precisión de nuestra estimación. Es importante tener claro que si las condiciones iniciales están dadas en $x = a$, debemos usar el desarrollo en series de potencias para la solución y alrededor de $c = a$.



Ejemplo

Encuentre una series de potencias para la solución general de la ecuación diferencial

$$y'' + Sen(x)y' + e^x y = 0$$

Solución

Como todos los coeficientes admiten desarrollo alrededor de $x = 0$, podemos suponer que la solución y es de la forma

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Además, recuerde que

$$Sen(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)}x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

y

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n$$

para toda $x \in I\!R$.

Sustituyendo en la ecuación diferencial obtenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} n\,(n-1)\,a_n x^{n-2} + \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}\right) &+ \\ \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) &= 0 \end{aligned}$$

Multiplicando las series y simplificando tenemos que

$$\begin{aligned} (2a_2 + a_0) + (6a_3 + 2a_1 + a_0)\,x + \left(12a_4 + 3a_2 + a_1 + \frac{a_0}{2}\right)x^2 &+ \\ \left(20a_5 + 4a_3 + a_2 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_0}{6}\right)x^3 + \ldots &= 0 \end{aligned}$$

Igualando cada uno de los coeficientes a cero

$$\begin{aligned} a_2 &= -\frac{a_0}{2} \\ a_3 &= -\frac{2a_1 + a_0}{1} = -\frac{a_1}{3} - \frac{a_0}{6} \\ a_4 &= -\frac{a_2}{4} - \frac{a_1}{12} - \frac{a_0}{24} = \frac{a_0}{12} - \frac{a_1}{12} \\ a_5 &= -\frac{a_3}{5} - \frac{a_2}{20} - \frac{a_0}{120} = \frac{a_0}{20} + \frac{a_1}{20} \end{aligned}$$

Sustituyendo estos valores en la serie tenemos que

$$y = a_0\left(1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{20}x^5 + \ldots\right) + a_1\left(x - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{20}x^5 + \ldots\right)$$

para $x \in I\!R$.

Observación: algunas veces cuando necesitamos multiplicar dos series es útil la siguiente fórmula

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) x^n$$

SERIES DE POTENCIAS PARA FUNCIONES ELEMENTALES

$$\text{sen}x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \cdots \qquad -\infty < x < \infty$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + \cdots \qquad -\infty < x < \infty$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \qquad -\infty < x < \infty$$

$$\text{sh } x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \cdots \qquad -\infty < x < \infty$$

$$\text{ch } x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{1}{(2n)!}x^{2n} + \cdots \qquad -\infty < x < \infty$$

$$\text{arcsen } x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)} + \cdots \qquad -1 < x < 1$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + \cdots \qquad -1 < x < 1$$

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \cdots \qquad -1 < x < 1$$

$$\text{arctg } x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots \qquad -1 < x < 1$$

5.3 Bibliografía

- Spiegel, M. Ecuaciones Diferenciales. México. 3 ed. Prentice-Hall. 1983.
- Spiegel, M. Transformada de Laplace. México. Prentice-Hall. 1991.
- Zill, D. Ecuaciones diferenciales con aplicaciones. México. 3 ed. Grupo Editorial Iberoamericano. 1997.
- Edwards. Ecuaciones Diferenciales Elementales con aplicaciones, ed Prentice-Hall.