UNIDAD 1. Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden.

I.I. Definiciones básicas y terminología.

Definición. Si una ecuación contiene las derivadas o diferenciales de una o más variables dependientes con respecto a una o más independientes, se dice que es una ecuación diferencial.

Las ecuaciones diferenciales se clasifican de acuerdo con las propiedades siguientes:

- Clasificación según el tipo.
- Clasificación según el orden.
- Clasificación según la linealidad.

Definición. Si una ecuación contiene solo derivadas ordinarias de una o más variables dependientes con respecto a una sola variable independiente, entonces se dice que es una ecuación diferencial ordinaria. Una ecuación que contiene las derivadas parciales de una o más variables dependientes de dos o más variables independientes se llama ecuación diferencial parcial.

Ejemplo: Son dos ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}-5y=1$$

$$(x+y)dx-4ydy=0$$

Son ecuaciones diferenciales parciales:

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=u$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-2\frac{\partial u}{\partial t}$$

Definición: El ordén de la más alta derivada de una ecuación diferencial se llama orden de la ecuación.

Ejemplo. Es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+5\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^3-2y=x$$

Puesto que la ecuación diferencial.

$$x^2dy+ydx=0$$

Puede llamarse de la forma:

$$x^2 \frac{dy}{dx} + y = 0$$

dividiendo entre dx, es un ejemplo de una ecuación diferencial ordinaria de primer orden. La ecuación:

$$a^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

es una ecuación diferencial parcial de cuarto orden.

Definición. Una ecuación diferencial ordinaria general de orden n se representa a menudo mediante la ecuación:

$$F(x, y, \frac{dy}{dx}, ..., y^{(n-1)})$$

o también

$$y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$$

Definición. Se dice que una ecuación diferencial es lineal si tiene la forma:

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + ... + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x) y = g(x)$$

Ejemplo. Las ecuaciones

$$xdy + ydx = 0$$
$$y'' + -2y' + y = 0$$
$$x^3 \frac{d^3 y}{dx^3} + x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 3x \frac{dy}{dx} + 5y = e^x$$

son ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de primero segundo y tercer orden, respectivamente. Por otra parte.

$$yy'' - 2y' = x$$
$$\frac{d^{3y}}{dx^3} + y^2 = 0$$

son ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales de segundo y tercer orden respectivamente.

Definicion. Se dice que una función f cualquiera, definida en algún intervalo I, es solución de una ecuación diferencial en el intervalo, si sustituida en dicha ecuación, la reduce a una pidentidad. Se distingue además entre soluciones explícitas.
$y = f(x)$ *o implicitas* $G(x, y) = 0$ *de ecuaciones diferenciales*

Ejemplo. Verificar que

$$x = t^2 + e^t$$
$$y = \frac{2}{3}t^3 + (t-1)e^t$$

Es una solución de la ecuación diferencial.

$$y'^2 + e^{y'} = x$$

Para este problema

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

como:

$$\frac{dy}{dt} = 2t^2 + e^t + (t-1)e^t = 2t^2 + te^t$$
$$\frac{dy}{dt} = 2t + e^t$$

entonces:

$$y' = \frac{2t^2 + te^t}{2t + e^t} = \frac{t\left[2t + e^t\right]}{2t + e^t} = t$$

Sustituyendo y' en la ecuación diferencial obtenemos:

$$y'^2 + e^{y'} = t^2 + e^t = x$$

<u>Ejemplo.</u> Verificar que:

$$arc\ tan\left(\frac{y}{x}\right) - \ln\left(c\sqrt{x^2 + y2}\right) = 0$$

cada C una constante es una solución implícita de la ecuación diferencial

$$(x+y)dx - (x-y)dy = 0$$

Derivando implícitamente obtenemos:

$$\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left[\frac{xy'-y}{x^2}\right] - \frac{c}{c\sqrt{x^2+y^2}}\left[\frac{2x-2yy'}{2\sqrt{x^2+y^2}}\right] = 0$$

Simplificando:

$$\frac{xy'-y}{x^2+y^2}-\frac{x+yy'}{x^2+y^2}=0$$
$$xy'-y-x-yy'=0$$
$$x\frac{dy}{dx}-y-x-y\frac{dy}{dx}=0$$

multiplicando por dx

$$xdy-ydx-xdx-ydy=0$$
$$-(y+x)dx+(x-y)dy=0$$
$$(x+y)dx-(x-y)dy=0$$

Definición. Al resolver una ecuación de n-ésimo orden $F(x,y,y', \ldots, y^{(n)})=0$, esperamos obtener una familia n-paramétrica de soluciones $G(x,y,c_1,\ldots,c_n)=0$

Ejemplo. Demostrar que la familia biparamétrica y = c1 cos (4x) + c2 sen (4x) es una solución de la ecuación.

$$y''+16y=0$$

Derivando obtenemos:

$$y'=-4c_1\operatorname{sen}(4x)+4c_2\cos(4x)$$
$$y''=-16c_1\cos(4x)-16c_2\operatorname{sen}(4x)$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial se tiene:

$$\begin{aligned} y''+16y = y' &= -16c_1\cos(4x)-4c_2\cos(4x)\\ &= \ 16c_1\cos(4x)-16c_2\operatorname{sen}(4x)\\ &= \ 0\end{aligned}$$

Definición. Una solución de una ecuación diferencial que no contiene parámetros arbitrarios se llama solución particular.

Una manera de obtener una solución particular es elegir valores específicos de parámetro o de los parámetros de una familia de soluciones.

Ejemplo. Para la ecuación diferencial

$$\frac{d^2x}{dt^2}+16x=0$$

una familia biparamétrica de soluciones es

$$x(t)=c_1\cos(4t)+c_2\operatorname{sen}(4t)$$

obtenga una solución particular que satisfaga

$$x(0)=10 \quad y \quad \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0}=0$$

como:

$$x = c_1\cos(4t)+ c_2\,\mathrm{sen}(4t)$$

$$\frac{dx}{dt}=-4c_1\,\mathrm{sen}(4t)+4c_2\cos(4t)$$

entonces

$$10 = c_1\cos(0)+ c_2\,\mathrm{sen}(0)$$

$$0 = -4c_1\,\mathrm{sen}(0)+4c_2\cos(0)$$

entonces

$$c_1=10 \quad y \quad 4c_2=0$$

Así la solución particular es

$$x(t)=10\ \cos(4t)$$

Definición. Si una ecuación diferencial tiene una solución que no puede obtenerse dando valores especificos a los parámetros en una familia de soluciones, a tal solución se le llama solución singular.

Ejemplo. Demostrar que

$$y=\left(\frac{x^2}{4}+c\right)^2$$

es una familia uniparamétrica de soluciones de

$$y'-xy^{\frac{1}{2}}=0$$

Demostrar que y = 0 es una solución singular de la ecuación.
como :

$$y'=2\left(\frac{x^2}{4}+c\right)\left(\frac{2x}{4}\right)=x\left(\frac{x^2}{4}+c\right)$$

Entonces sustituyendo en la ecuación diferencial obtenemos

$$x\left(\frac{x^2}{4}+c\right)-x\left(\frac{x^2}{4}+c\right)=0$$

Ahora observamos que y = 0 es solución de la ecuación diferencial, pues y' = 0 y

$$y' - xy^{\frac{1}{2}} = 0 - x(0) = 0$$

Por otro lado no existe un valor para C en la ecuación

$$y = \left(\frac{x^2}{4} + c\right)^2$$

tal que

$$y = \left(\frac{x^2}{4} + c\right)^2 = 0$$

<u>Definición</u>. Si todas las soluciones de $F(x,y,y',\ldots,y^{(u)})=0$en un intervalo I, pueden obtenerse de $G(x,y,c_1,\ldots,c_n)=0$mediante valores apropiados de las $C_1, \ldots, C_n$, entonces decimos que la familia n-paramétrica es la solución general o completa de la ecuación diferencial.

I.2. Problema de valor inicial y teorema de existencia y unicidad.

<u>Definición</u>. El problema.

Resuelva:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

Sujeta a:

$$y(x_o) = y_0$$

se llama problema de valor inicial. A la condición $y(x_0)=y_0$se le conoce como condición inicial.

<u>Ejemplo</u>. La figura 1 muestra que el problema de valor inicial.

$$\frac{dy}{dx} - xy^{\frac{1}{2}} = 0$$
$$y(0) = 0$$

tiene al menos 2 soluciones en el intervalo

$$-\infty < x < +\infty$$

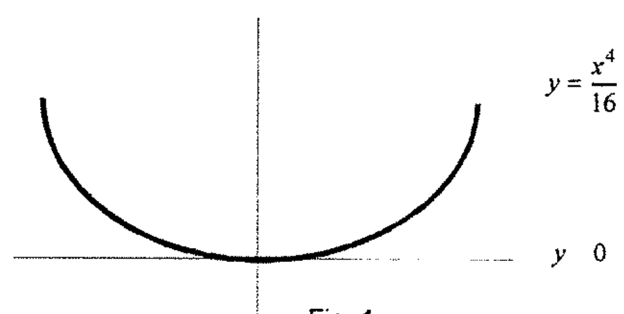


Fig. 1

Las gráficas de ambas funciones

$$y = 0 \quad y \quad y = \frac{x^2}{16}$$

pasan por (0,0)

Al considerar un problema de valor inicial surgen dos preguntas fundamentales:

(1) ¿Existe una solución del problema ?
(2) Si es que una solución existe, ¿Es la única?

Geométricamente, la segunda pregunta es: De todas las soluciones de una ecuación diferencial que existen en un intervalo I, ¿Hay alguna cuyo gráfico pasa por (x_0, y_0)?

A menudo es deseable saber antes de atacar un problema de valor inicial si es que existe una solución y, cuando existe, saber si es la única solución del problema. El siguiente teorema da condiciones suficientes para la existencia de una solución única.

Teorema. Sea dada una ecuación diferencial $y' = f(x,y)$, desde la función $f(x,y)$ está definida en una región D del plano que contiene el punto (x_0, y_0). Si la función $f(x,y)$ satisface a las condiciones:

a) $f(x,y)$ es una función continua en la región D.
b) $\partial f/\partial y$ es una función continua en la región D.

entonces, existe una, y solo una, solución de la ecuación diferencial que satisface a la condición $y(x_0)=y_0$.

Ejemplo. Aplicando el teorema de existencia y unicidad señalar en los problemas que siguen las regiones en las que las ecuaciones dadas admiten solución única.

(a)

$$y' = \frac{y+1}{x-y}$$

En este caso

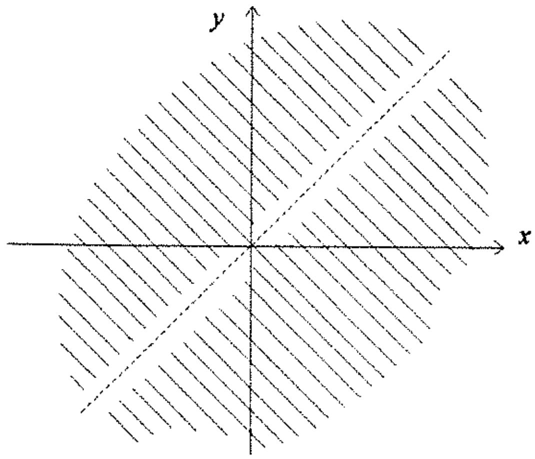
$$f(x,y) = \frac{y+1}{x-y}$$

y esta función es continua cuando $x-y \neq 0$. Por otra parte:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x-y-(y+1)(-1)}{(x-y)^2} = \frac{x-y+y+1)}{(x-y)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x+1}{(x-y)^2}$$

es continua cuando $x-y \neq 0$. Por lo tanto la región donde se cumple el teorema de existencia y unicidad es:



(b)

$$y' = \sqrt{x^2 - y} - x$$

En este caso

$$f(x, y) = y' = \sqrt{x^2 - y} - x,$$

y esta función es continua cuando $x^2 - y = 0$. Por otra parte

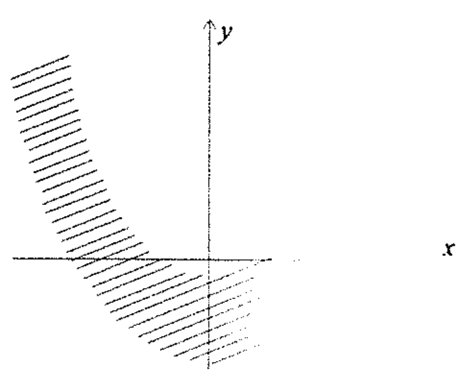
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-1}{2\sqrt{x^2 - y}}$$

es continua cuando $x^2 - y > 0$. Por lo tanto la región donde se cumple el teorema de existencia y unicidad es:

I.3. Campos de direcciones.

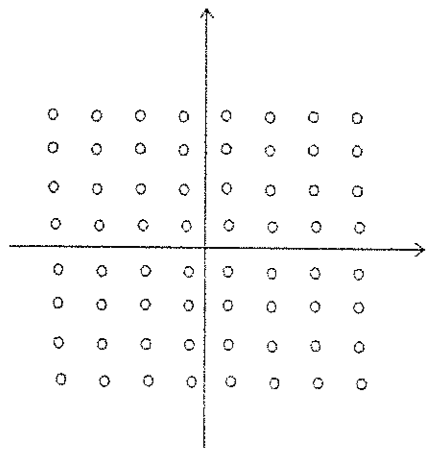
La ecuación

$$y' = f(x, y)$$



determina en cada punto (x,y) donde existe la función f(x,y), el valor de y', o sea, la pendiente de la tangente a la curva integral en ese punto.

La terna de números (x,y,y') determina la dirección de una recta que pasa por el punto (x,y). Si dibujamos un pequeño segmento de esas rectas en el punto (x,y), el conjunto de los segmentos de esas rectas en la representación geométrica del campo de direcciones.



El problema de integración de la ecuación diferencial.

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

se puede interpretar asi: hay que hallar uan curva cuya tangente en (x,y) tenga el valor f(x,y).

Frecuentemente, el problema de la construcción de las curvas integrales se resuelve introduciendo las isóclinas.

Definición. Se llama isoclina el lugar geométrico de puntos en los que las tangentes a la ecuaciones integrales consideradas tienen una misma dirección. La familia de las isoclinas de la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

se determina por la ecuación:

$$f(x, y) = k$$

Donde K es un parámetro. Dando al parámetro K valores númericos proximos dibujamos una red bastante compacta de isoclinas, de las cuales se pueden trazar aproximadamente las curvas integrales de la ecuación diferencial.

La isoclina nula f(x,y)=0 proporciona las líneas en las que pueden estar situados los puntos máximos y mínimos de las curvas integrales. Al trazar las curvas integrales, para mayor exactitud, se hallan también el lugar geométrico de los puntos de inflexión. Para esto se halla y" de la ecuación:

$$y' = f(x, y)$$

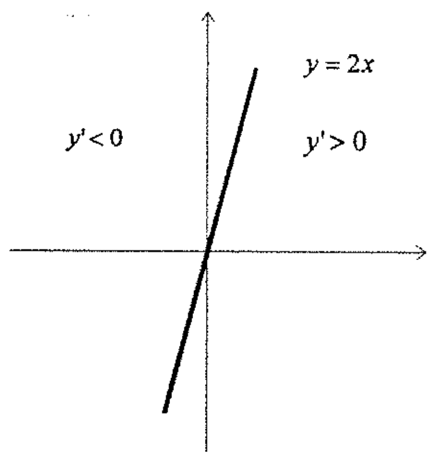
como:

$$y'' = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y'$$
$$y'' = \frac{\partial f}{\partial x} + f \frac{\partial f}{\partial y}$$

Ejemplo: Sirviéndose de las isoclinas, trazar aproximadamente las curvas integrales de las ecuaciones diferenciales dadas.

(a) y' = 2x - y

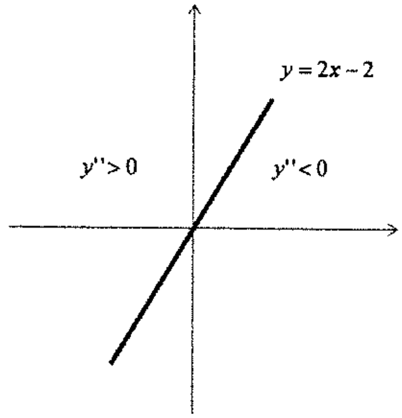
La isoclina en que y' = 0 es y = 2x. Las curvas integrales, cortándose con la recta y = 2x, pasan de la región de decrecimiento de la función a la región de creciemiento. Por lo tanto, en esta recta se frecuentan los puntos mínimos de las curvas integrales.



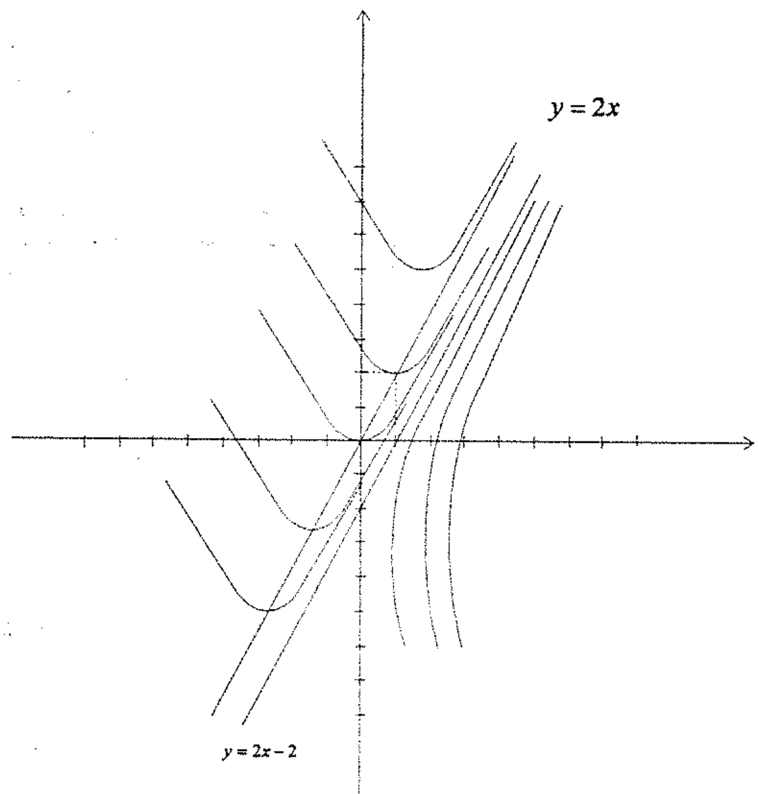
Hallaremos ahora la segunda derivada:

$$y'' = 2 - y' = 2 - 2x + y$$

La recta y = 2x - 2, en la que y" = 0 es una curva integral, de lo que puede uno convencerse sustituyendo en la ecuación diferencial. Como f (x,y) = 2x - y, satisface las condiciones del teorema de existencia y unicidad en todo el plano XY, las demás curvas integrales no se cortan con y = 2x - 2 (se pierde unicidad). La recta y = 2x - 2 divide el plano XY en dos partes, en una de las cuales y" > 0, y por lo tanto, las curvas integrales tienen dirigidos hacia arriba sus concavidades, y en la otra, y" < 0, y por consiguiente, las curvas integrales tienen sus concavidades dirigidas hacia abajo.



La investigación realizada nos permite trazar aproximadamente la familia de las curvas intergrales de la ecuación.



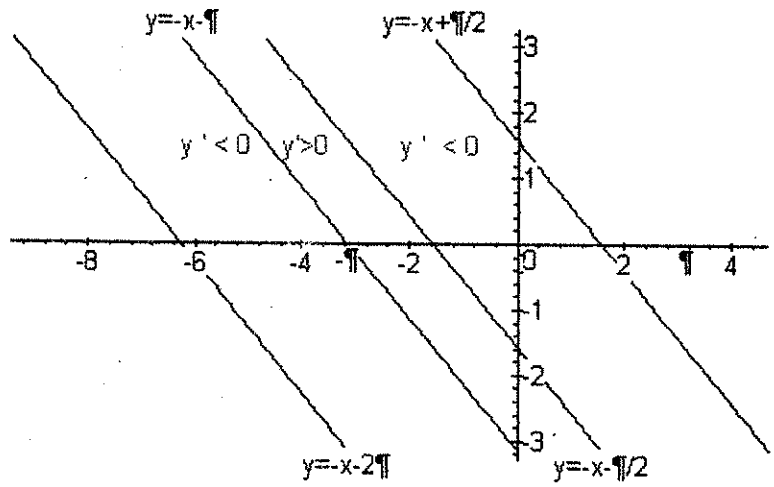
$$y' = \operatorname{sen}(x + y) \quad para \quad -\frac{\pi}{2} \leq x \leq 2\pi$$

(b)

Las isóclinas en que y' = 0 son:

$$x + y = 0, \quad x + y = \pi, \quad x + y = 2\pi$$

Tomando en cuenta el signo de sen (x+y) se obtiene el signo de y', y por lo tanto las regiones:



en las cuales las curvas integrales son crecientes o decrecientes. De esto se deduce que en y = -x - $\pi/2$ hay puntos mínimos, mientras que en y = -x - π hay puntos máximos.

Hallamos la derivada segunda:

$$y'' = (1 + y') \cos(x + y) = [1 + \operatorname{sen}(x + y)] \cos(x + y)$$

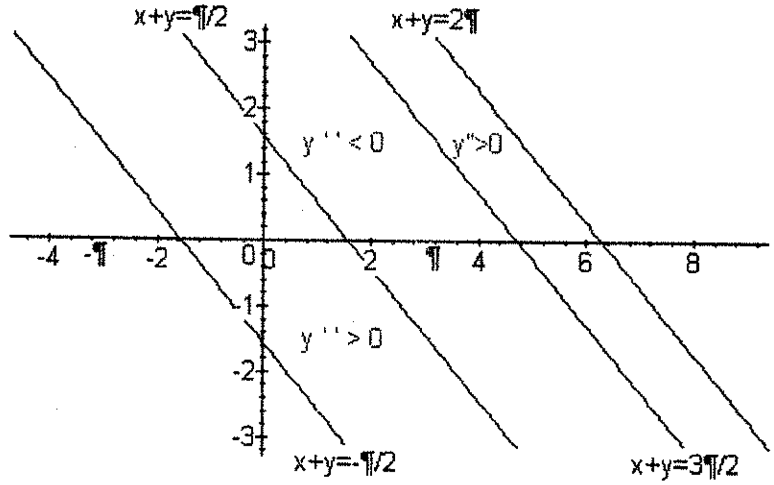
La derivada y'' se anula si $1 + \operatorname{sen}(x + y) = 0$, o sea cuando

$$x + y = -\frac{\pi}{2} \qquad \text{y} \qquad x + y = \frac{3\pi}{2}$$

También cuando $\cos(x + y) = 0$, o sea cuando

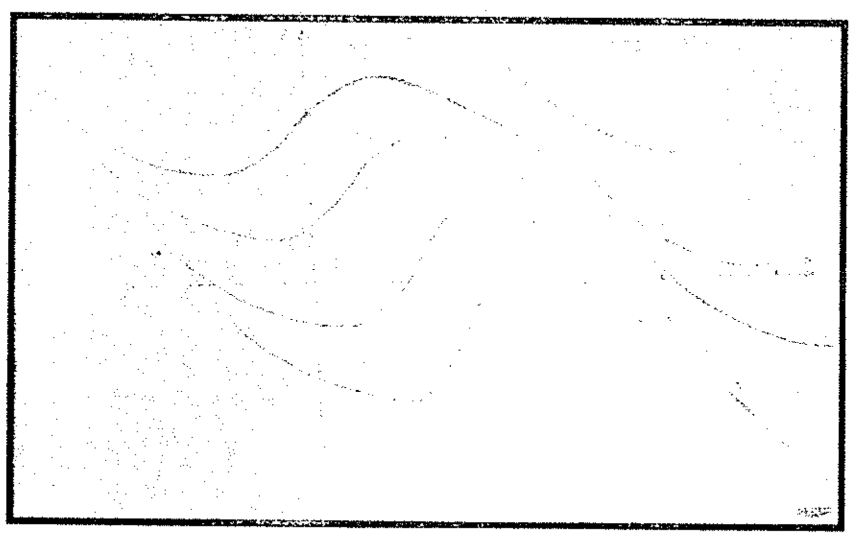
$$x + y = \frac{\pi}{2} \qquad \text{y} \qquad x + y = \frac{3\pi}{2}$$

Tomando en cuenta que el signo de y'' depende de cos(x + y), (pues $1 + \operatorname{sen}(x + y) \geq 0$) , se obtienen las siguientes regiones:



Es fácil comprobar que x + y = -π/2 y x + y = 3π/2 son soluciones de la ecuación diferencial y como $f(x, y)$ = sen (x + y) satisface las condiciones del teorema de existencia y unicidad, las soluciones no pueden tocar a tales rectas.

Los datos obtenidos permiten trazar aproximadamente la familia de las curvas integrales de la ecuación dada.



I.4. Ecuaciones con variables separables y ecuaciones reducibles a ellas.

Definición. Las ecuaciones de la forma

$$\Psi_1(x)\, \Psi_1(y)\, dx + \Psi_2(x)\, \Psi_2(y)\, dy = 0$$

en las que los coeficientes de las diferenciales se descomponen en factores que dependen solamente de x o solamente de y, se llaman ecuaciones con variables separables.

Dividiendo por el producto $\Psi_1(y)\ \Psi_2(x)$ éstas se reducen a ecuaciones con variables separadas:

$$\frac{\Psi_1(x)}{\Psi_2(x)}dx + \frac{\Psi_2(y)}{\Psi_1(y)}dy = 0$$

La integral general de esta ecuación tiene la forma:

$$\int \frac{\Psi_1(x)}{\Psi_2(x)}dx + \int \frac{\Psi_2(y)}{\Psi_{1(y)}}dy = C$$

La ecuación diferencial de la forma

$$\frac{dy}{dx} = f(ax + by + c)$$

donde a, b y c son constantes, se reduce a una ecuación con variables separables haciendo la sustitución

$$z = ax + by + c$$

<u>Ejemplo</u>. Integrar las ecuaciones:

(a) $(xy^2 - y^2 + x - 1)\, dx + (x^2y - 2xy + x^2 + 2y - 2x + 2)\, dy = 0$

Factorizando y^2 en los términos de dx y ordenando los términos en dy obtenemos:

$$[y^2 (x - 1) + (x - 1)]\, dx + [x^2y + x^2 - 2xy -2x + 2y + 2]\, dy = 0$$

$$(x -1) (y^2 + 1)\, dx + [x^2 (y + 1) - 2x (y + 1) + 2 (y + 1)]\, dy =0$$

$$(x - 1) (y^2 + 1)\, dx + (y + 1) (x^2 - 2x + 2)\, dy = 0$$

Dividiendo por $(y^2 + 1) (x^2 - 2x + 2)$ obtenemos:

$$\frac{\Psi_1(x)}{\Psi_2(x)}dx + \frac{\Psi_2(y)}{\Psi_1(y)}dy = 0$$

Integrando:

$$\int \frac{(x-1)}{x^2 - 2x + 2}dx + \int \frac{(y+1)}{y^2+1}dy =$$

Haciendo $u = x^2 - 2x + 2$ y $du = 2 (x - 1)\, dx$ se tiene:

$$\frac{1}{2}\int \frac{du}{u} + \int \frac{y}{y^2+1}dy + \int \frac{dy}{y^2+1} = C$$

Haciendo $v = y^2 + 1$ y $dv = 2y\, dy$ obtenemos:

$$\frac{1}{2}\ln|u| + \frac{1}{2}\int \frac{dv}{v} + \arctan(y) = C$$

$$\frac{1}{2}\ln|u| + \frac{1}{2}\ln|v| + \arctan(y) = C$$

$$\ln|uv| + 2\arctan(y) = C$$

$$\ln\left|(x^2 - 2x + 2)(y^2 + 1)\right| + 2\arctan(y) = C$$

Exponenciando:

$$e^{\ln\left|(x^2 - 2x + 2)(y^2 + 1)\right| + 2\arctan(y)} = C$$

$$e^{\ln\left|(x^2 - 2x + 2)(y^2 + 1)\right|} \cdot e^{2\arctan(y)} = C$$

$$(x^2 - 2x + 2)(y^2 + 1) \cdot e^{2\arctan(y)} = C$$

(b) $(1 + x^2y^2)y + (xy - 1)^2 xy' = 0$. Hacer la sustitución $xy = t$.

De la ecuación $xy = t$ obtenemos $y = \dfrac{t}{x}$ y además

$$\frac{dt}{dx} = y + x\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}\left(\frac{dt}{dx} - \frac{t}{x}\right)$$

Sustituyendo y y dy/dx en la ecuación diferencial obtenemos:

$$\left(1 + t^2\right)\frac{t}{x} + \left(t - 1\right)^2 \cdot \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{dt}{dx} - \frac{t}{x}\right) = 0$$

Multiplicando por x

$$\left(1 + t^2\right)t + (t - 1)^2 \cdot (x\frac{dt}{dx} - t) = 0$$

$$t + t^3 + x\left(t - 1\right)^2 \frac{dt}{dx} - t(t - 1)^2 = 0$$

$$t + t^3 - t\left(t^2 - 2t + 1\right) + x(t - 1)^2 \frac{dt}{dx} = 0$$

$$t + t^3 - t^3 + 2t^2 - t + x\left(t + 1\right)^2 \frac{dt}{dx} = 0$$

$$2t^2 + x\left(t - 1\right)^2 \frac{dt}{dx} = 0$$

$$2t^2dx + x(t-1)^2 dt = 0$$

$$\frac{2dx}{x} + \frac{(t-1)^2}{t^2}dt = 0$$

$$2\int \frac{dx}{x} + \int \frac{t^2 - 2t + 1}{t^2}dt = +\ln C$$

$$2\ln|x| + \int dt - 2\int \frac{dt}{t} + \int \frac{dt}{t^2} = +\ln C$$

$$2\ln|x| + t - 2\ln|t| - \frac{1}{t} = +\ln C$$

Multiplicando por -1

$$\ln C + 2\ln \frac{t}{x} = t - \frac{1}{t}$$

$$\ln C + 2\ln y = xy - \frac{1}{xy}$$

$$\ln Cy^2 = xy - \frac{1}{xy}$$

$$Cy^2 = e^{xy - \frac{1}{xy}}$$

I.5. ecuaciones homogéneas y reducibles a ellas.

Definición. Una función f (x, y) es homogénea de grado n en sus argumentos si se cumple la identidad

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y)$$

Ejemplo, La función $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy$ es una función homogénea de segundo grado, puesto que

$$f(tx, ty) = (tx)^2 + (ty)^2 - (tx)(ty)$$

$$= t^2 (x^2 + y^2 - xy)$$

$$= t^2 f(x, y)$$

Ejemplo. Para $f(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ se tiene una función homogénea de grado cero, puesto que:

$$f(tx, ty) = \frac{(tx)^2 - (ty)^2}{(tx)^2 + (ty)^2} = \frac{t^2(x^2 - y^2)}{t^2(x^2 + y^2)}$$
$$= t^0 f(x, y)$$

<u>Definición</u>. Una ecuación diferencial de la forma $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ se llama homogénea si f (x, y) es una función homogénea de grado cero en sus argumentos.

Si la función viene expresada en la forma

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

será homogénea si P (x, y) y Q (x, y) son funciones homogéneas de un mismo grado.

La ecuación homogénea siempre se puede representar en la forma

$$\frac{dy}{dx} = \Psi\left(\frac{y}{x}\right)$$

Introduciendo una nueva variable y = ux y $\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$, la ecuación se reduce a la ecuación con variables separables:

$$x\frac{du}{dx} = \Psi(u) - u$$

Si $u = u_0$ es una raíz de la ecuación $\Psi(u) - u = 0$, la solución de la ecuación homogénea es, $u = u_0$, o bien $y = u_0 x$.

Las ecuaciones de la forma

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax + by + c}{\alpha x + \beta y + \gamma}\right)$$

se reducen a homogéneas trasladando el origen de coordenadas al punto (x_0, y_0) de intersección de las rectas

$$ax + by + c = 0$$
$$\alpha x + \beta y + \gamma = 0$$

Esto se consigue haciendo la sustitución de las variables $x = u + x_0$, $y = v + y_0$.

El método indicado no es aplicable cuando las rectas

$$ax + by + c = 0$$
$$\alpha x + \beta y + \gamma = 0$$

son paralelas. Pero en este caso,

$$\frac{a}{\alpha} = \frac{b}{\beta} = \lambda$$

y la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax + by + c}{\alpha x + \beta y + \gamma}\right)$$

se puede escribir de la forma:

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax + by + c}{\lambda(ax + by) + \gamma}\right) = F(ax + by)$$

Ejemplo. Resolver la ecuación

$$xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$$

Escribamos la ecuación en la forma

$$y' = \sqrt{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2} + \frac{y}{x}$$

Como la ecuación es homogénea, hacemos $u = \frac{y}{x}$ o bien, $y = ux$. Entonces, $y' = xu' + u$. Sustituyendo en la ecuación las expresiones para *y* e *y'*, obtenemos

$$x\frac{du}{dx} = \sqrt{1 - u^2}$$

Separamos las variables

$$\frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} = \frac{dx}{x}$$

Integrando hallamos:

$$\operatorname{arcsen}(u) = \ln|x| + \ln|c_1|$$

O bien

$$\operatorname{arcsen}(u) = \ln|c_1 x|$$

Sustituyendo *u* por $\frac{y}{x}$ obtenemos

$$\operatorname{arcsen}\left(\frac{y}{x}\right) = \ln|c_1 x|$$

Al separar las variables dividimos ambos miembros de la ecuación por el producto $x\sqrt{1-u^2}$, por lo cual, se podrian perder las soluciones que convierten en cero sus factores. Pongamos ahora x = 0 y $\sqrt{1-u^2} = 0$. Pero x = 0 no es solución de la ecuación, debido a lo cual resulta, $1-\dfrac{y^2}{x^2} = 0$, de donde y = ± x. Con una prueba directa nos convencemos de que las funciones y = - x e y = x son soluciones de la ecuación. Estas son soluciones singulares de la ecuación dada.

Ejemplo. Resolver la ecuación

$$(x+y-2)dx + (x-y+4)dy = 0$$

Examinamos el sistema de ecuaciones algebraicas lineales:

$$\begin{aligned} x+y-2 &= 0 \\ x-y+4 &= 0 \end{aligned}$$

El determinante de este sistema

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

El sistema tiene solución única; $x_0 = -1$, $y_0 = 3$. Hacemos la sustitución

$$\begin{aligned} x &= u-1 \\ y &= v+3 \end{aligned}$$

Entonces la ecuación diferencial tiene la forma:

$$(u+v)du + (u-v)dv = 0$$

Esta es una ecuación homogénea. Haciendo

$$v = wu$$

obtenemos

$$(u+wu)du + (u-wu)(udw + wdu) = 0$$

de donde

$$(1+2w-w^2)du + u(1-w)dw = 0$$

separamos las variables

$$\frac{du}{u} + \frac{1-w}{1+2w-w^2}dw = 0$$

Integrando hallamos:

$$\ln|u| + \frac{1}{2}\ln\left|1 + 2w - w^2\right| = \ln|c|$$
$$u^2\left(1 + 2w - w^2\right) = c$$

Volviendo a las variables x, y obtenemos:

$$(x+1)^2\left[1 + 2\frac{y-3}{x+1} - \frac{(y-3)^2}{(x+1)^2}\right] = c$$

O bien

$$x^2 + 2xy - y^2 + 4x + 8y = c$$

Ejemplo. Resolver la ecuación

$$(x + y + 1)dx + (2x + 2y - 1)dy = 0$$

El sistema de ecuaciones algebraicas lineales

$$\begin{aligned} x + y + 1 &= 0 \\ 2x + 2y - 1 &= 0 \end{aligned}$$

es incompatible. El determinante del sistema

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Para integrar la ecuación hacemos la sustitución

$$x + y = z, dy = dz - dx$$

La ecuación toma la forma

$$(2 - z)dx + (2z - 1)dz = 0$$

Separando las variables obtenemos

$$dx - \frac{2z-1}{z-2}dz = 0$$

De aquí que

$$x - 2z - 3\ln|z - 2| = c$$

Volviendo a las variables x, y , obtenemos la integral general de la ecuación dada:

$$x + 2y + 3\ln|x + y - 2| = c$$

Ejemplo. Resolver la ecuación

$$\left(x^2y^2 - 1\right)dy + 2xy^3dx = 0$$

haciendo la sustitución $y = z^\alpha$.

Hacemos la sustitución $y = z^\alpha$, $dy = \alpha z^{\alpha-1} dz$ donde por ahora α es un número arbitrario que se elegirá a continuación. Sustituyendo *y* y *dy* en la ecuación por sus expresiones, obtenemos:

$$\left(x^2z^{2\alpha} - 1\right)\alpha z^{\alpha-1}dz + 2xz^{3\alpha}dx = 0$$

o bien

$$\left(x^2z^{3\alpha-1} - z^{\alpha-1}\right)\alpha dz + 2xz^{3\alpha}dx = 0$$

Obsérvese que el grado de $x^2 z^{3\alpha-1}$ es $2 + 3\alpha - 1 = 3\alpha + 1$, el grado de $z^{\alpha-1}$ es $\alpha - 1$ y el grado de $xz^{3\alpha}$ es $1 + 3\alpha$. La ecuación obtenida será homogénea si los grados de todos los términos resultan iguales, es decir, si se cumple la condición $3\alpha + 1 = \alpha - 1$. De aquí que $\alpha = -1$.

Por consiguiente, tenemos $y = \dfrac{1}{z}$ y la ecuación inicial toma la forma:

$$\left(\frac{1}{z^2} - \frac{x^2}{z^4}\right)dz + 2\frac{x}{z^3}dx = 0$$

o bien,

$$\left(z^2 - x^2\right)dz + 2zxdx = 0$$

Pongamos ahora $z = ux$, $dz = udx + xdu$. Entonces, esta ecuación toma la forma

$$\left(u^2 - 1\right)\left(udx + xdu\right) + 2udx = 0$$

De donde

$$u\left(u^2 + 1\right)dx + x\left(u^2 - 1\right)du = 0$$

Separando las variables en esta ecuación, obtenemos:

$$\frac{dx}{x}+\frac{u^2-1}{u_3+u}du=0$$

Integrando, hallamos

$$\ln|x|+\ln|u^2+1|-\ln|u|=\ln|C|$$

o bien

$$\frac{x(u^2+1)}{u}=C$$

Sustituyendo u por $\frac{1}{xy}$, obtenemos la integral general de la ecuación considerada:

$$1+x^2y^2=Cy$$

La ecuación tiene además la solución trivial $y = 0$, que se obtiene de la integral escribiendola en la forma $y=\frac{1+x^2y^2}{C}$ y pasando después al límite para $C\to\infty$.

I.6. ecuaciones diferenciales exactas. Factor integrante.

Definición. La ecuación diferencial de la forma

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$$

se llama ecuación diferencial exacta si su primer miembro es la diferencial total de una función $U(x, y)$:

$$Mdx+Ndy\equiv du\equiv\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy$$

Teorema. Sean $M(x, y)$ y $N(x, y)$ continuas y con derivadas parciales de primer orden continuas en una región R del plano XY. Entonces una condición necesaria y suficiente para que

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$$

sea una ecuación diferencial exacta es que

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$$

Demostración.(=>) Supóngase que M (x, y), N (x, y) tienen derivadas parciales de primer orden continuas y que $M(x,y)+N(x,y)dy$ es exacta. Entonces existe una función f para la cual

$$M(x,y)+N(x,y)dy=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy$$

Por lo tanto

$$M(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x},N(x,y)=\frac{\partial f}{\partial y}$$

y

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial N}{\partial x}$$

La igualdad de las derivadas parciales mixtas es consecuencia de la continuidad de las derivadas parciales de primer orden de M (x, y) y N (x, y).

(<=) Supongamos que $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$. Queremos encontrar f tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x}=M(x,y) \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y}=N(x,y)$$

De $\frac{\partial f}{\partial x}=M(x,y)$ integramos con respecto a *x* mientras se mantiene a *y* constante, se escribe:

$$f(x,y)=\int M(x,y)dx+g(y)$$

en donde la función arbitraria g (y) es la constante de integración. Derivando la ecuación anterior con respecto a *y* y suponga que $\frac{\partial f}{\partial y}=N(x,y)$:

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx+g'(y)$$

$$N(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx+g'(y)$$

De esto resulta

$$g'(y)=N(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx$$

Es importante observar que la expresión anterior es independiente de *x* puesto que

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[N(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx\right]=\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\int M(x,y)dx\right)$$
$$=\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}=0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{y^{-2}}\frac{dz}{dx}$$

Sustituyendo la ecuación diferencial obtenemos:

$$-\frac{x}{y^{-2}}\frac{dz}{dx} + y = y^2 \ln x$$

multiplicando por y^{-2} tenemos:

$$-x\frac{dz}{dx} + y^{-1} = \ln x$$

$$-x\frac{dz}{dx} + z = \ln x$$

Ahora resolvemos la ecuación lineal:

$$\frac{dz}{dx} - \frac{z}{x} = -\frac{\ln x}{x}$$

Multiplicando por el factor integrante $e^{-\int \frac{dx}{x}} = e^{-\ln x} = \frac{1}{x}$ obtenemos:

$$\frac{1}{x}\frac{dz}{dx} - \frac{z}{x^2} = -\frac{\ln x}{x^2}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{z}{x}\right) = -\frac{\ln x}{x^2}$$

Entonces

$$\frac{z}{x} = -\int \frac{\ln x}{x^2}dx + c$$

Calculando por partes con $\alpha = \ln x$ y $d\beta = \frac{dx}{x^2}$ obtenemos

$$\frac{z}{x} = \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} + c$$

Por lo tanto

$$z = \ln x + 1 + cx$$

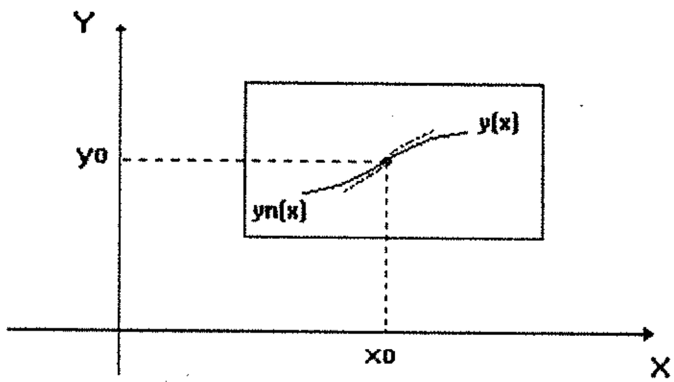
Como $z = \dfrac{1}{y}$, obtenemos:

$$\frac{1}{y} = \ln x + 1 + cx$$

$$y = \frac{1}{\ln x + 1 + cx}$$

I.8 Método de aproximaciones sucesivas.

Teorema (Método de Picard). Supongamos que en cierto rectángulo
D={(x,y) | |x-xo| < a y |y-yo| < b}



con centro en el punto (xo,yo), el problema del valor inicial:

Y´ = f(x,y)

y(xo) = yo

satisface las condiciones del teorema de existencia y unicidad. Entonces la solución del problema de valor inicial se puede hallar por el método de aproximaciones que consiste en lo siguiente:

Se toma una sucesión de funciones {Yn(x)}, determinadas por las relaciones reiteradas

$$y(x_0) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1}(t))dt, n = 1,2,...$$

Por aproximación nula y0(x) se puede tomar cualquier función que sea continua en un entorno del punto x=x0; en particular y0(x)=y0. Las aproximaciones sucesivas {yn(x)}convergen hacia la solución exacta en cierto intervalo xo-h<x<xo+h, donde

$$h = min(a, \frac{b}{M})$$
$$M = max|f(x,y)|$$
$$(x,y) \in D$$

La cota del error cometido al sustituir la solución exacta y(x) por la aproximación n-ésima yn(x) es:

$$|y(x) - y_u(x)| \leq \frac{M \cdot N^{n-1} h^n}{n!}$$

donde

$$N = max\left|\frac{\partial}{\partial y}\right|$$
$$(x,y) \in D$$

<u>Ejemplo.</u> Empleando el método de las aproximaciones sucesivas, hallar la solución aproximada de la ecuación

$$y' = x^2 + y^2$$

que satisface la condición inicial y(0)=0 en el rectángulo:

$$- \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1$$

Se tiene $|f(x,y)| = x^2 + y^2 \leq 2$, o sea M=2. Tomamos por h el menor de los números a=1, $\frac{b}{M} = \frac{1}{2}$ o sea $h = \frac{1}{2}$. Las aproximaciones sucesivas convergen en el intervalo $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$. Estas son:

$$y_0(x) = 0$$
$$y_1(x) = \int_0^x (t^2 + y_0^2)dt = \frac{x^3}{3}$$
$$y_2(x) = \int_0^x \left[t^2 + y_1^2(t)\right]dt = \int_0^x (t^2 + \frac{t^6}{9})dt = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63}$$
$$y_3(x) = \int_0^x \left[t^2 + y_2^2(t)\right]dt = \int_0^x (t^2 + \frac{t^6}{9} + \frac{2t^{10}}{3 \cdot 63} + \frac{t^{14}}{63^2})dt = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63} + \frac{2x^{11}}{2079} + \frac{x^{15}}{59535}$$

El error absoluto de la tercera aproximación no supera a la magnitud

$$|y_3(x) - y(x)| \leq \frac{2}{3!}\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot 2^2 = \frac{1}{6}$$

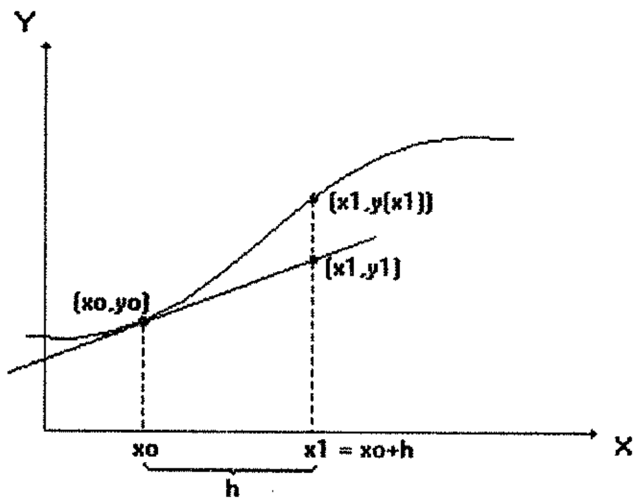
En este caso

$$N = \max_{D}\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| = \max_{D}|2y| = 2$$

I.9 Método de Euler y Euler modificado.

Una de las técnicas más simples para aproximar soluciones de ecuaciones diferenciales es conocida como método de Euler o método de las tangentes. Supongamos que queremos aproximar la solución del problema valores iniciales

y´=f(x,y)
y(x0)=y0



Si h es un incremento positivo sobre el eje X, entonces podemos encontrar un punto (x1,y1)=(x0+h,y1) sobre la tangente en (x0,y0) a la curva solución desconocida

De la ecuación de una recta, tenemos:

$$\frac{y_1 - y_0}{(x_0 + h) - x_0} = y'(0) \text{ó} \qquad y_1 = y_0 + hy'(x_0)$$

en donde y´(x0)=f(x0,y0). Si denotamos x0+h por x1, entonces el punto (x1,y1) sobre la tangente es una aproximación del punto (x1,y(x1)) sobre la curva solución Esto es . Por supuesto, la exactitud de la aproximación depende mucho del tamaño del incremento. Usualmente debemos elegir el tamaño de esta medida de modo que sea << razonablemente pequeña >>.

Suponiendo que h tiene un valor uniforme (constante), podemos obtener una sucesión de puntos

(x1,y1), (x2,y2), ..., (xn,yn)

que sean aproximaciones de los puntos

(x1, y(x1)), (x2,y(x2)), ...(xn,y(xn))

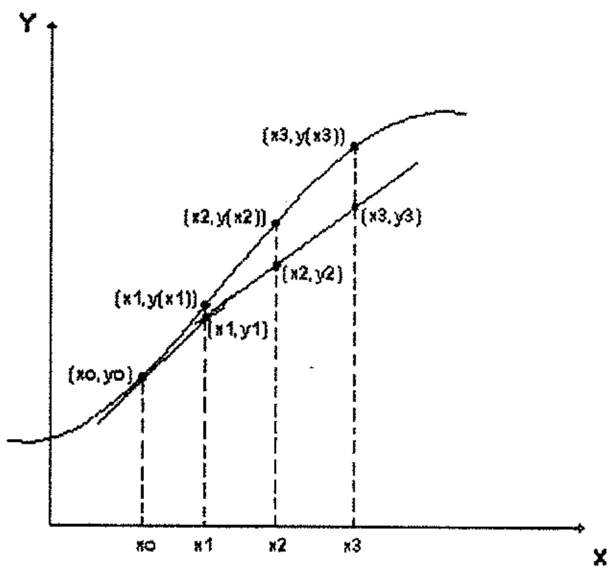
Ahora bien, usando (x1,y1) podemos obtener el valor de y2 que es la ordenada de un punto sobre una nueva tangente. Tenemos:

$$\frac{y_2 - y_1}{h} = y'(x_1) \qquad \text{o bien} \qquad \begin{aligned} y_2 &= y_1 + hy'(x_1) \\ y_2 &= y_1 + hf(x_1, y_1) \end{aligned}$$

En general se obtiene que

$$y_{n+1} = y_n + hy'(x_n) = y_n + hf(x_n, y_n)$$

en donde $x_n = x_0 + nh$



Ejemplo. Considerar el problema de valor inicial

y´=2xy
y(1)=1

Úsese el método de Euler para obtener una aproximación de y(1.5) empleando h=0.1.

Primero identificamos f(x,y) = 2xy de modo que

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

se transforma en:

$$y_{n+1} = y_n + h(2x_n y_n)$$

Entonces, para h=0.1 obtenemos

y1= y0 + (0.1)(2x0y0)
=1 + (0.1)(2)(1)(1)
=1.2

lo cual es una estimación del valor de y(1.1). Sin embargo, si usamos h=0.05 se necesitan dos iteraciones para llegar a x=1.1. Tenemos, así

y1=1+(0.005)(2)(1)(1)=1.1
y2=1.1+(0.05)(2)(1.05)(1.1)=1.2155

Método de Euler con h=0.1

xn	yn	valor real	error	error relativo
1.00	1.0000	1.0000	0.0000	0.00
1.10	1.2000	1.2337	0.0337	2.73
1.20	1.4640	1.5527	0.0887	5.71
1.30	1.8154	1.9937	0.1784	8.95
1.40	2.2874	2.6117	0.3244	12.42
1.50	2.9278	3.4904	0.5625	16.12

Los valores verdaderos se calcularon a partir de la solución $y = e^{x^2-1}$. Además, el error relativo porcentual se define como

$$\frac{|Valorverdadero - Aproximación|}{valorverdadero} \times 100$$

Definición. La fórmula

$$y_{n+1} = y_n + h\frac{f(x_n, y_{n)} + f(x_{n+1}, y_{n+1}{*})}{2}$$

en donde $y_{n+1}{*} = y_n + hf(x_n, y_n)$ se conoce como fórmula de Euler mejorada o fórmula de Heun.

Los valores f(xn,yn) y f(xn,yn*) son aproximaciones de la pendiente de la curva en (xn,y(n)) y (xn+1,y(xn+1) y en consecuencia el cociente

$$\frac{f(x_u, y_u) + f(x_{n+1}, y_{n+1}{*})}{2}$$

puede ser interpretado como una pendiente promedio.

Observe que f(xn+1,yn+1*) y f(xn,yn) son las pendientes de las rectas indicadas que pasan por los puntos (xn,yn) y (xn+1,yn+1*). Tomando un promedio de estas pendientes obtenemos la pendiente de las rectas oblicuas de trazo punteado. En lugar de requerir la recta de pendiente m=f(xn,yn) hasta el punto de ordenada yn+1* obtenida mediante el método de Euler usual, seguimos la recta por (xn,yn) con pendiente mprom hasta llegar a xn+1. Examinando la figura, parece plausible admitir que yn+1 es una mejora de yn+1*.

Además podríamos decir que el valor de

$$y_{n+1}{*} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

predice un valor de y(xn+1), en tanto que

$$y_{n+1} = y_n + h\frac{f(x_n, y_{n)} + f(x_{n+1}, y_{n+1}{*})}{2}$$

corrige esta estimación.

Ejemplo. Usar la fórmula de Euler mejorada, para obtener el valor aproximado de y(1.5) para la solución del problema de valor inicial

y'=2xy

y(1)=1

Comparar los resultados para h=0.1 y 0.05.

Para n=0 y h=0.1primero se calcula

$$y_1{*} = y_0 + (0.1)(2x_0 y_0) = 1.2$$

luego

$$y_1 = y_0 + (0.1)\frac{2x_0y_0 + 2x_1y_1*}{2} = 1.232$$

Los valores comparativos de los calculos para h=0.1 y h=0.05 se dan en las siguientes tablas:

Método de Euler mejorado con h = 0.1

xn	yn	valor real	error	error relativo
1.00	1.0000	1.0000	0.0000	0.00
1.10	1.2320	1.2337	0.0017	0.14
1.20	1.5479	1.5527	0.0048	0.31
1.30	1.9832	1.9937	0.0106	0.53
1.40	2.5908	2.6117	0.0209	0.80
1.50	3.4509	3.4904	0.0394	1.13

Método de Euler mejorado con h =0.05

xn	yn	valor real	error	error relativo
1.00	1.0000	1.0000	0.0000	0.00
1.05	1.1077	1.1079	0.0002	0.02
1.10	1.2332	1.2337	0.0004	0.04
1.15	1.3798	1.3806	0.0008	0.06
1.20	1.5514	1.5527	0.0008	0.08
1.25	1.7531	1.7551	0.0020	0.11
1.30	1.9909	1.9937	0.0029	0.14
1.35	2.2721	2.2762	0.0041	0.18
1.40	2.6060	2.6117	0.0057	0.22
1.45	3.0038	3.0117	0.0079	0.26
1.50	3.4795	3.4904	0.0108	0.31

I.10 Ecuaciones diferenciales con MAPLE.

El comando **dsolve** calcula las soluciones de una ecuación o de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias.

La notación que deberá emplearse es:

dsolve (ecua, var)

donde **ecua** corresponde a la ecuación o sistema de ecuaciones que desea resolver y a los valores iniciales, en caso de ser conocidos, y **var** es la variable o conjunto de variables con respecto a la que se resolverá.

Para introducir la expresión correspondiente a la primera derivada y´en la que y es función de x, escribiremos:

diff(y(x),x)

y para representar las funciones derivadas de orden superior utilizaremos el operador **$**; así, y´´ se representara por

diff(y(x),x$2)

y"", mediante la expresión:

diff(y(x),x$3)

y así sucesivamente.

Al resolver una ecuación diferencial, apareceran distintas constantes, representadas por -c1,-c2, etc. Que corresponden a las infinitas soluciones cuando no se establecen valores iniciales.

Ejemplo. Resolver la ecuación diferencial:

$$3yy' + 16x = 12xy^2$$

Introducimos el comando **dsolve** con la notación siguiente:

>dsolve(3*y*diff(y(x),x)+16*x=12*x*y^2,y(x));

Al pulsar la tecla **enter**, obtendremos la solución de esta ecuación:

$$y(x)^2 = \frac{4}{3} + e^{(4x^2)} - c_1$$

Para obtener la solución de forma explicita deberá incluirse la opción **explicit** como argumento del comando **dsolve**:

dsolve(ecua,var, explicit)

En el ejemplo anterior:

>dsolve(3*y*diff(y(x),x)+16*x=12*x*y^2,y(x),explicit);

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)\, y(x) = \frac{1}{3}\sqrt{12 + 9e^{(4x^2)} + c_1}$$

Cuando se conozca una condición inicial, la ecuación se resolvera introduciendo, junto a la expresión de la ecuación y a las variables, las condiciones iniciales, tal y como se realiza en el ejemplo siguiente:

Ejemplo. Resolver:

$$y' = e^{x+y} + e^{x-y}$$
$$y(0) = 0$$

Para resolver esta ecuación diferencial, introducimos el comando dsolve con la notación siguiente:

>dsolve({diff(y(x),x)= exp(x+y) + exp(x-y), y(0)=0};

obteniendo como solución:

$$y(x) = \ln(\tan(e^x + \frac{1}{4}\pi - 1))$$

De manera análoga, se resuelven ecuaciones diferenciales de orden superior.

Ejemplo. Resolver las ecuaciones diferenciales:

$a) y''' Senx = Sen2x$

$b) y'' - \frac{y'}{x-1} = x(x-1), y(\alpha) = 1, y'(\alpha) = -1$

Para resolver la primera de las ecuaciones, introducimos la expresión:
>dsolve(diff(y(x),x+3)*sin(x)=sin(2*x),y(x));

obteniendo como solución:

$$y(x) = -2sin(x) + \_c1 + \_c2x + \_c3x^2$$

Para resolver la segunda ecuación, definimos las variables ec y cond para representar a la ecuación diferencial y a las condiciones iniciales, respectivamente.

Al introducir las condiciones iniciales, la segunda condición:

y´(2)=-1

se expresará utilizando el operador diferenciación **D**:

Dy(2)=-1

Escribimos:

>ec := diff(y(x),x$2) - diff(y(x),x) / (x-1) = x*(x-1);
>cond := y(2)=1, Dy(2)=-1;
>dsolve({ec,cond},(y(x));

$$y(x) = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{3} - \frac{3}{2}x^2 + 3x$$

que corresponde al polinomio solución de la ecuación diferencial.

MAPLE tiene también unas funciones muy eficaces para el tratamiento numérico de las ecuaciones diferenciales. Se hace añadiendo a **dsolve** la opción **type=numeric**. Un ejemplo es el siguiente:

>ec6 := Cos(x)*diff(y(x),x)+y(x)*sin(x)=(cos(x))^2;

$$ec6 := Cos(x)\left(-\frac{d}{dx}y(x)\right) + y(x)sin(x) = Cos(x)^2$$

ec6 := Cos(x) *diff(y(x),x)+y(x)*sin(x)=(cos(x))^2;
>dsolve(ec6,(y(x));
y(x)=Cos(x)x+Cos(x)-C1

>P1 := dsolve({ec6,y(0)=1},y(x),type=numeric);
P1 := proc(rKf45-x)...end

En las líneas anteriores hemos tomado una ecuación, la hemos integrado de forma exacta, y luego númericamente. La entrada de la integración númerica debe definir unívocamente una curva integral, introduciendo las apropiadas condiciones iniciales. Las salidas de la integración númerica es un procedimiento llamado Runge - Kutta de cuarto - quinto orden **(rkf45_x)**. Hay más procedimientos númericos disponibles. Una vez que se ha creado un procedimiento númerico de integración, se puede usar para calcular valores numéricos:

>evalf(p1(2));

[x=2. ,y(x)=-1.248665825]

También se puede usar la resolución numérica para dibujar gráficos de las curvas integrales.

El paquete plots contiene una función, odeplot, que sirve para representar una curva integral de una ecuación diferencial, habiéndola calculado numéricamente con anterioridad. Damos un ejemplo con la **ec6** anterior

Las órdenes

>whit(plots):
>odeplot(p1,[x,y(x)], -2. .2, -5. .5);

producen el resultado siguiente:

Se pueden representar distintas curvas integrales en el mismo gráfico:

que está producido por las ordenes

>with (plots):
>P1 := dsolve({ec6, y(0)=1}, y(x), type = numeric):
>P2 := dsolve({ec6, y(0)=2}, y(x), type = numeric):
>P3 := dsolve({ec6, y(0)=3}, y(x), type = numeric):
>q1 := odeplot(p1,[x,y(x)], -2. .2, -5. .5):
>q2 := odeplot(p2,[x,y(x)], -2. .2, -5. .5):
>q3 := odeplot(p3,[x,y(x)], -2. .2, -5. .5):
>display ([q1, q2,q3]);

Vamos a estudiar ahora otra función de gráficos en el plano: **fieldplot**. Esta función dibuja un campo vectorial, y su sintaxis básica es

fieldplot ([f(x,y), g(x,y)], x=xmin. .xmax, y=ymin. .ymax);

El campo viene representado por el vector (f(x,y), g(x,y)) y lo restante son los límitesdel cuadro en el que se dibuja el campo.

EJERCICIOS

1.- Demostrar en los siguientes ejercicios que las funciones dadas son soluciones de las ecuaciones indicadas:

a) $y = c_1 X + c_2 X \int_{1}^{x} \frac{e^t}{t} dt$

$x^2 y'' - (x^2 + x) y' + (x + 1) y = 0$

b) $x = t(2 \ln t - 1) + c_1$

$y = t^2 \ln t + c_2$

$y'(1 + 2 \ln y') = 1.$

c) $x + c_2 = \ln \operatorname{sen}(y + c_1)$

$y'' = y'(1 + y'^2)$

d) $y \ln y = x + \int_0^x e^{t^2} dt$

$y(1 + \ln y) y'' + y'^2 = 2xy\, e^{x^2}$

e) $y = \int_0^{\infty} e^{-xt} \frac{\operatorname{sen} t}{t} dt$

$y' = -\frac{1}{1 + x^2}$

2.- Trazar las curvas integrales por el método de las isoclinas de las ecuaciones diferenciales siguientes:

a) $y' = x^2 + 2x - y$

b) $y' = \cos(x - y)$

c) $y' = \frac{x + y}{x - y}$

3.- Hallar tres aproximaciones sucesivas:

a) $y' = x + y^2$, $y(0) = 0$

b) $y' = x + y$, $y(0) = 1$

c) $y' = 2y - 2x^2 - 3$, $y(0) = 2$

4.- Integrar las ecuaciones: (seperables)

a) $y' = \text{sen}(x - y)$; $x + c = \text{ctg}\left(\frac{y-x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$

b) $(x^6 - 2x^5 + 2x^4 - y^3 - 4x^2y)dx + (xy^2 - 4x^3)dy = 0$

Hacer $y = tx$; $\frac{x^3}{3} - x^2 + 2x + (2x\ln y + 1)^2 = c$

c) $(xy + 2xy\ln^2 y + \ln y)dx + (2x^2 \ln y + x)dy = 0$

Hacer $x \ln y = t$; $2x^2 + (2x\ln y + 1)^2 = c$

d) $y' + \text{sen}\frac{x+y}{2} = \text{sen}\frac{x-y}{2}$; $\ln\left|\text{Tan}\frac{y}{4}\right| = c - 2\,\text{sen}\frac{x}{2}$

5.- Integrar las ecuaciones : (homogeneas)

a) $(x - y\cos\frac{y}{x})dx + x\cos\frac{y}{x}dy = 0$; $x = ce^{-\text{sen}\frac{y}{x}}$

b) $xy' = \sqrt{y^2 - x^2}$; $y + \sqrt{y^2 + x^2} = cx^3 e^{\frac{x(y-\sqrt{y^2+x^2})}{x^2}}$

c) $4x^2 + xy - 3y^2 + y'(-5x^2 + 2xy + y^2) = 0$; $(x + y)(x^3 + y^2) = c$

d) $2x + 2y - 1 + y'(x + y - 2) = 0$; $x + y + 1 = ce^{\frac{2x+y}{3}}$

e) $\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{x+y} + \sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y} - \sqrt{x-y}}$; $x + \sqrt{x^2 - y^2} = c$

6.- Integrar las ecuaciones : (exactas)

a) $\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)dx + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{1}{y} - \frac{x}{y^2}\right)dy = 0;$

$\sqrt{x^2+y^2} + \ln|xy| + \frac{x}{y} = c$

b) $\frac{y + \text{sen}\,x\cos^2 xy}{\cos^2 xy}dx + \left(\frac{x}{\cos^2 xy} + \text{sen}\,y\right)dy = 0;$

Tan xy - cos x - cos y =c

c) [n cos(nx+my)-m sen(mx+ny)]dx + [m cos(nx+my)- n sen(mx+ny)]dy = 0

sen (nx + my)+cos (mx + ny)] = c

d) $\left(\frac{1}{y}\operatorname{sen}\frac{x}{y}-\frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x}+1\right)dx+\left(\frac{1}{x}\cos\frac{y}{x}-\frac{x}{y^2}\operatorname{sen}\frac{x}{y}+\frac{1}{y^2}\right)dy=0;$

$\operatorname{sen}\frac{y}{x}-\cos\frac{x}{y}+x-\frac{1}{y}=c.$

7.- Muestre que yf(x)dx + xg(xy)dy = 0 no es exacta en general pero llega a ser exacta al multiplicarla por el factor integrante $\left[xy\left(f(xy)-g(xy)\right)\right]^{-1}$

8.- Si $\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial y}$ y $\frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{\partial Q}{\partial x}$ muestre que la ecuación Pdx + Qdy = 0 no es exacta en general pero llega a ser exacta al multiplicarla por $\frac{1}{(P^2+Q^2)}$

9.- Muestre que si la ecuación Mdx +Ndy = 0 es tal que

$$\frac{1}{xM-yN}\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)=f(xy)$$

entonces un factor integrante es $e^{\int f(u)du}$ donde u = x y.

10.- Muestre que $\sqrt{x^2+y^2}\left(x\,dx+y\,dy\right)=\frac{1}{3}d\left[\left(x^2+y^2\right)^{3/2}\right]$ Ahora , resuelva

$$\left(y-x\sqrt{x^2+y^2}\right)dx+\left(x-y\sqrt{x^2+y^2}\right)dy=0$$

11.- Muestre que $\frac{x\,dy+y\,dx}{(xy)^4}=-\frac{1}{3}d\left[(xy)^{-3}\right]$ Ahora , resuelva

$$\left(y-x^5y^4\right)dx+\left(x-x^4y^5\right)dy=0$$

12.- Integrar las ecuaciones : (lineales)

a) $x\ln x\, y' - (1+\ln x)y + \frac{1}{2}\sqrt{x}(2+\ln x) = 0$;

$y = cx\ln x + \sqrt{x}$.

b) $y' - y = 2xe^{x+x^2}$; $y = e^{x+x^2} + ce^{x}$.

c) $y' + y\dfrac{x+\frac{1}{2}}{x^2+x+1} = \dfrac{(1-x^2)y^2}{(x^2+x+1)^{\frac{3}{2}}}$;

$\dfrac{1}{y} = c\sqrt{x^2+x+1} - \dfrac{x}{\sqrt{x^2+x+1}}$

d) $2\sqrt{x}\, y' - y = -\operatorname{sen}\sqrt{x} - \cos\sqrt{x}$ y es acotada cuando $x \to +\infty$

$y = \cos\sqrt{x}$

13.- Integrar las ecuaciones si tienen un factor integrante de la forma indicada:

a) $(x^2+y^2+1)\,dx - 2xy\,dy = 0$, $\mu = \vartheta(x+y^2)$;

$1+y^2-x^2 = cx$, $\mu = \dfrac{1}{(1+y^2-x^2)^2}$

b) $(3y^2-x)\,dx - (2y^3-6xy)\,dy = 0$, $\mu = \vartheta(x+y^2)$;

$(x+y^2)^2 c = x - y^2$, $\mu = \dfrac{1}{(x+y^2)}$

c) $(x^4\ln x - 2xy^3)\,dx + 3x^2y^2\,dy = 0$, $\mu = \vartheta(x)$;

$y^3 + x^3(\ln x - 1) = cx^3$.

14.- Dados los problemas de valor inicial, use la fórmula de Euler y Euler mejorada para obtener una aproximación de los valores indicados con h = 0.05

a) $y' = 2x - 3y + 1$, $y(1) = 5$; $y(1.5)$.

b) $y' = x + y^2$, $y(0) = 0$; $y(0.5)$.

c) $y' = xy^2 - \dfrac{y}{x}$, $y(1) = 1$; $y(1.5)$.

15.- Aplicando el teorema de existencia y unicidad señalar en los problemas que siguen las regiones en las que las ecuaciones dadas admiten solución única.

a) $y' = \sqrt{x-y}$.

b) $y' = 1 - \cot(y)$.

c) $y' = x / y$.

RESPUESTAS

UNIDAD I

1.a. $y = c_1 X + c_2 X \int_x^2 \frac{e^t}{t} dt$

$x^2 y' - (x^2 + x) y' + (x + 1) y = 0$

Calculemos la derivada utilizando el teorema funda,ental del cálculo:

$$Dx \int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

y tomando en cuenta que $\int_x^2 \frac{e^t}{t} dt = -\int_2^x \frac{e^t}{t} dt$.

$$y = c_1 x - c_2 x \int_2^x \frac{e^t}{t} dt$$

$$y' = c_1 - c_2 \int_2^x \frac{e^t}{t} dt - c_2 x \frac{e^x}{x}$$

$$y' = c_1 - c_2 \int_2^x \frac{e^t}{t} dt - c_2 e^x$$

$$y'' = -\frac{c_2 2e^x}{x} - c_2 e^x$$

sustituyendo en la e.d.

$$x^2 y'' = x^2 \left[-\frac{c_2 2e^x}{x} - c_2 e^x \right]$$

$$-(x^2 + x) y'' = -(x^2 + x) \left[c_1 - c_2 \int_2^x \frac{e^t}{t} dt - c_2 e^x \right]$$

$$(x + 1) y = (x + 1) \left[c_1 x - c_2 x \int_2^x \frac{e^t}{t} dt \right]$$

Entonces

$$x^2y'' = -c_2xe^x - c_2x^2e^x$$

$$-(x^2+1)y' = -xc_1 + c_2x^2\int_2^x \frac{e^t}{t}dt + c_2x^2e^x - xc_1 + c_2x\int_2^x \frac{e^t}{t}dt + c_2x$$

$$(x+1)y = c_1x^2 - c_2x^2\int_2^x \frac{e^t}{t}dt + c_1x - c_2x\int_2^x \frac{e^t}{t}dt$$

Sumando los renglones obtenemos :

$$x^2y'' - (x^2+x)\,y' + (x+1)\,y = 0$$

1.b. $x = t\,(2\ln t - 1) + C1$

$y = t^2 \ln t + C2$

$y''\,(1 + 2\ln y') = 1.$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dx}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2t\ln t + t^2\left(\frac{1}{t}\right)}{2\ln(t-1) + t\left(\frac{2}{t}\right)} = \frac{2t\ln t + t}{2\ln(t-1) + 2}$$

$$y' = \frac{t(2\ln t + 1)}{2\ln t + 1} = t$$

$$y'' = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{1}{2\ln t + 1}$$

Entonces

$$y''(1 + 2\ln y') = \left(\frac{1}{2\ln t + 1}\right)(1 + 2\ln t) = 1$$

1.c. $x + c_2 = \ln \operatorname{sen}(y + c_1)$

$y'' = y'(1 + y'^2)$

Derivando implicitamente

$$1 = \frac{1}{\operatorname{sen}(y+c_1)} \cdot \cos(y+c_1)\, y'$$

$$y' = \frac{\operatorname{sen}(y+c_1)}{\cos(y+c_1)} = \operatorname{Tan}(y+c_1)$$

$$y'' = \operatorname{sen}^2(y+c_1) \cdot y'$$

Sustituyendo en la e.d.

$$y'(1+y'^2) = y'\left(1+\operatorname{Tan}^2(y+c_1)\right)$$

$$= y'\sec^2(y+c_1) \quad (1+\operatorname{Tan}\theta = \sec^2\theta)$$

$$= y''$$

1.d. $y \ln y = x + \int_0^x e^{t^2}\,dt$

$y(1 + \ln y)\,y'' + y'^2 = 2xy\, e^{x^2}$.

Derivando implicitamente

$$y' \ln y + y \cdot \frac{1}{y} y' = 1 + e^{x^2}$$

$$y' \ln y + y' = 1 + e^{x^2}$$

Volviendo a derivar

$$y'' \ln y + \frac{y'}{y} \cdot y' + y'' = 2x e^{x^2}$$

$$y''[\ln y + 1] + \frac{y'^2}{y} = 2x e^{x^2}$$

Multiplicando por y

$$y(\ln y + 1)\, y'' + y'^2 = 2xy e^{x^2}$$

1.e. $y = \int_0^{\infty} e^{-xt} \frac{\text{sen}\, t}{t} dt$

$y' = -\frac{1}{1+x^2}$

Utilizamos la siguiente formula para derivar : Si

$$y = \int_0^{+\infty} H(x,t)\, dt$$

entonces

$$y' = \int_0^{+\infty} \frac{\partial H(x,t)}{\partial x} dt$$

aplicando la formula a nuestro problema

$$y' = -\int_0^{+\infty} e^{-xt}\, \text{sen}\, t\, dt$$

Integrando por partes dos veces la integral $\int_0^{+\infty} e^{-xt}\, \text{sen}\, t\, dt$ se obtiene :

$$\int_0^{+\infty} e^{-xt}\, \text{sen}\, t\, dt = -e^{-xt} \cos t\Big|_0^{+\infty} - x e^{-xt}\, \text{sen}\, t\Big|_0^{+\infty} - x^2 \int_0^{+\infty} e^{-xt}\, \text{sen}\, t\, dt$$

Entonces

$$(1+x^2)\int_0^{+\infty} e^{-xt}\, \text{sen}\, t\, dt = 1$$

$$\therefore \int_0^{+\infty} e^{-xt}\, \text{sen}\, t\, dt = \frac{1}{(1+x^2)}$$

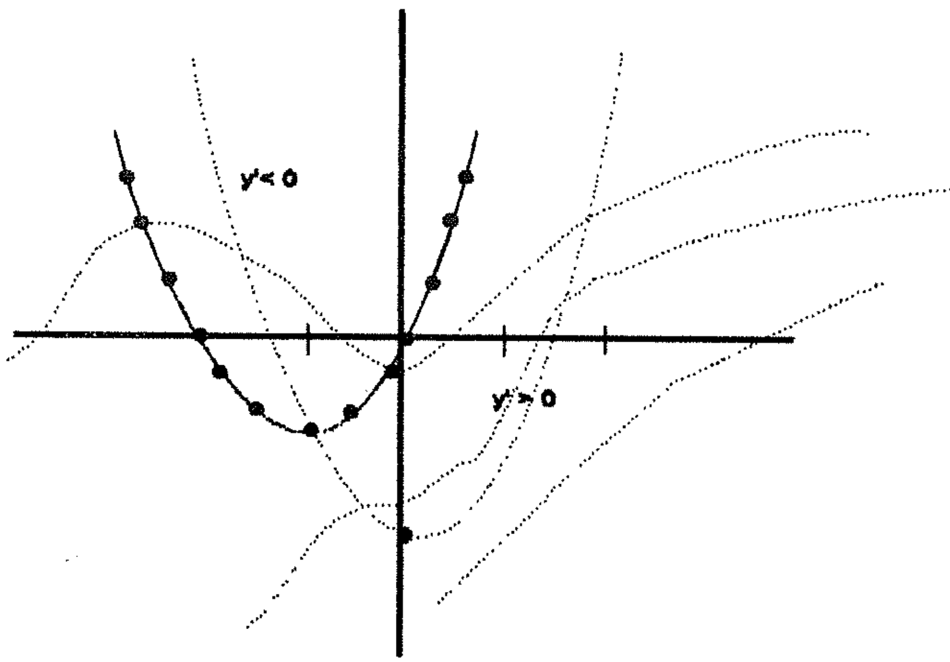
Por lo tanto $y' = -\frac{1}{(1+x^2)}$

2.a. $y' = x^2 + 2x - y$

$y' = 0 \Rightarrow x^2 + 2x - y = 0 \Rightarrow y = x^2 + 2x$

$y' > 0 \Rightarrow x^2 + \partial x - y > 0 \Rightarrow y < x^2 + 2x$

$y' < 0 \Rightarrow x^2 + \partial x - y < 0 \Rightarrow y > x^2 + 2x$



$y'' = 2x + 2 - y' = 2x + x - (x^2+2x-y) = - x^2 + 2 + y$

$y'' = 0 \Rightarrow -x^2 + 2 + y = 0 \Rightarrow y = x^2 - 2$

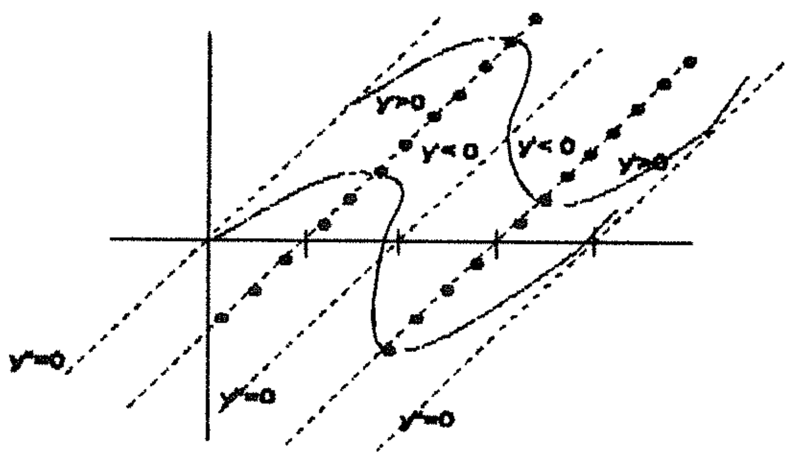
$y'' > 0 \Rightarrow -x^2 + 2 + y = 0 \Rightarrow y > x^2 - 2$

$y'' < 0 \Rightarrow -x^2 + 2 + y = 0 \Rightarrow y < x^2 - 2$

2.b. $y' = \cos(x-y)$, $0 \le x-y \le 2\pi$

$y' = 0 \Rightarrow \cos(x-y) = 0 \Rightarrow x-y = \pi/2 \Rightarrow y = -\pi/2 + x$

$x-y = 3\pi/2 \Rightarrow y = -3\pi/2 + x$



$y' > 0 \Rightarrow \cos(x-y) > 0 \Rightarrow 0 = < x-y < \pi/2$

$3\pi/2 < x-y < 2\pi$

$y'' = -\text{sen}(x-y)[1-y'] = -\text{sen}(x-y)[1-\cos(x-y)]$

$y'' = 0 \Rightarrow -\text{sen}(x-y)[1-\cos(x-y)] = 0 \Rightarrow$

$x-y=0$ ó $x-y=\pi$ ó $x-y=2\pi$

También $1-\cos(x-y) = 0 \Rightarrow \cos(x-y) = 1 \Rightarrow$

$x-y=0$ ó $x-y=2\pi$

¿ Quién es solución de la e.d. ?
Para las tres rectas $y' = 1$ mientras que

$$\cos(x-y) = \begin{cases} 1 \text{ si } x-y=0 \\ -1 \text{ si } x-y=\pi \\ 1 \text{ si } x-y=2\pi \end{cases}$$

Por lo tanto $x-y=0$ y $x-y=2\pi$ son solución

2.c. $y' = \dfrac{x+y}{x-y}$

$y' = 0 \quad => \quad \dfrac{x+y}{x-y} = 0 \qquad x+y = 0 \quad y = -x$

$y' > 0 \quad => \quad \dfrac{x+y}{x-y} > 0 \quad => \quad x+y > o \quad y \quad x-y > 0$

$y > -x \quad y \quad y < x$

$x+y < 0 \quad y \quad x-y < 0$

$y < -x \quad y \quad y > x$

$y' = +\infty \quad => \quad x-y = 0 \quad => \quad y = x$

$4.a.\quad y' = \text{sen}\ (x-y)$

$$u = x-y \;\Rightarrow\; \frac{du}{dx} = 1-\frac{dy}{dx} \;\Rightarrow\; \frac{dy}{dx} = 1-\frac{du}{dx}$$

Sustituyendo en la e.d.

$$1-\frac{du}{dx} = \text{sen}\ u \;\Rightarrow\; 1-\text{sen}\ u = \frac{du}{dx} \;\Rightarrow$$

$$dx = \frac{du}{1-\text{sen}\ u} \;\Rightarrow\; \int dx = \int \frac{du}{1-\text{sen}\ u} \;\Rightarrow$$

$$x+c = \int \frac{(1+\text{sen}\ u)\ du}{(1-\text{sen}\ u)\ (1+\text{sen}\ u)} \;\Rightarrow\; x+c = \int \frac{(1+\text{sen}\ u)\ du}{1-\text{sen}^2\ u}$$

$$x+c = \int \frac{(!+\text{sen}\ u)}{\cos^2 u} du \;\Rightarrow\; x+c = \int \sec^2 u\ du + \int \frac{\text{sen}\ u}{\cos^2 u} du$$

$$x+c = \tan u + \sec u \;\Rightarrow\; \frac{\text{sen}\ u}{\cos u} + \frac{1}{\cos u} = x+c$$

$$\frac{1+\text{sen}\ u}{\cos u} = x+c \;\Rightarrow\; \frac{1+\text{sen}\ (x-y)}{\cos\ (x-y)} = x+c$$

$$\frac{1+\text{sen}\ (x-y)}{\sqrt{1-\text{sen}^2\ (x-y)}} = x+c \;\Rightarrow\; \sqrt{\frac{(1+\text{sen}\ (x-y))(1+\text{sen}(x-y))}{(1-\text{sen}\ (x-y))(1+\text{sen}(x-y))}} = x+c$$

$$\sqrt{\frac{1+\text{sen}\ (x-y)}{1-\text{sen}\ (x-y)}} = x+c \;\Rightarrow\; \sqrt{\frac{1-\text{sen}\ (y-x)}{1+\text{sen}(y-x)}} = x+c$$

$$\sqrt{\frac{1+\cos\,(y-x)\,\cos\dfrac{\Pi}{2}-\operatorname{sen}\,(y-x)\,\operatorname{sen}\,\dfrac{\Pi}{2}}{1-\cos\,(y-x)\,\cos\dfrac{\Pi}{2}+\operatorname{sen}\,(y-x)\,\operatorname{sen}\,\dfrac{\Pi}{2}}} = x+c$$

$$\sqrt{\frac{1+\cos\,(y-x+\dfrac{\Pi}{2})}{1-\cos\,(y-x+\dfrac{\Pi}{2})}} = x+c$$

$$\frac{\sqrt{\dfrac{1+\cos\,(y-x+\dfrac{\Pi}{2})}{2}}}{\sqrt{\dfrac{1-\cos\,(y-x+\dfrac{\Pi}{2})}{2}}} = x+c$$

$$\frac{\cos(\dfrac{y-x+\dfrac{\Pi}{2}}{2})}{\operatorname{sen}(\dfrac{y-x+\dfrac{\Pi}{2}}{2})} = x+c \quad => \quad \cot\ (\frac{y-x+\dfrac{\Pi}{2}}{2}) = x+c$$

$$\cot(\frac{y-x}{2}+\frac{\Pi}{4}) = x+c$$

4.b $(x^6 - 2x^5 + 2x^4 - y^3 + 4x^2y)\,dx + (xy^2 - 4x^3)\,dy = 0$

$y = tx$

$dy = x\,dt + t\,dx$

$$(x^6 - 2x^5 + 2x^4 - t^3x^3 + 4x^3t)\,dx + (x^3t^2 - 4x^3)\,(x\,dt + t\,dx) = 0$$

$$(x^6 - 2x^5 + 2x^4 - t^3x^3 + 4x^3t + x^3t^3 - 4x^3t)\,dx + x\,(t^2 - 4)\,dt$$

$$(x^6 - 2x^5 + 2x^4)\,dx + x^4\,(t^2 - 4)\,dt = 0$$

$$\frac{(x^6 - 2x^5 + 2x^4)\,dx}{x^4} + (t^2 - 4)\,dt = 0$$

$$\int x^2dx - 2\int x\,dx + 2\int dx + \int t^2dt - 4\int dt = c$$

$$\frac{x^3}{3} - x^2 + 2x + \frac{t^3}{3} - 4t = c$$

$$\frac{x^3}{3} - x^2 + 2x + \frac{y^3}{3x^3} - 4\frac{y}{x} = c$$

4.c. $(xy+2xy\ln^2 y + y\ln y)\,dx + (2x^2\ln y + x)\,dy = 0$

$x\ln y = t$

$$\frac{dt}{dx} = \ln y + \frac{x}{y}\cdot\frac{dy}{dx} \Rightarrow dt = \ln y\,dx + \frac{x}{y}\,dy$$

$$dy = \frac{y}{x}(dt - \ln y\,dx)$$

$$(xy+2xy\ln^2 y+y\ln y)\,dx + (2x^2\ln y+x)\left(\frac{y}{x}(dt-\ln y\,dx)\right) = 0$$

$$\left(xy+2xy\ln^2 y+y\ln y-\frac{2x^2\ln y.y.\ln y}{x}-y\ln y\right)dx\;(2xy\ln y+y)dt = 0$$

$$(xy+2xy\ln^2 y+y\ln y-2xy\ln^2 y-y\ln y)\,dx+(2xy\ln y+y)\,dt = 0$$

$$xy\,dx + y\,(2x\ln y+1)\,dt = 0$$

$$xdx + (2x\ln y+1)\,dt = 0$$

$$xdx + (2t+1)\,dt = 0$$

$$\int xdx + \int (2t+1)\,dt = c$$

$$\frac{x^2}{2} + t^2 + t = c$$

$$\frac{x^2}{2} + x^2\ln^2 y + x\ln y = c \Rightarrow 2x^2 + 4x^2\ln^2 y + 4x\ln y = c$$

$$2x^2 + (2x\ln y + 1)^2 = c + 1$$

$$4.d.\quad y' + \operatorname{sen}\frac{x+y}{2} = \operatorname{sen}\frac{x-y}{2}$$

$$y' + \operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2} + \operatorname{sen}\frac{y}{2}\cos\frac{x}{2} = \operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2} - \operatorname{sen}\frac{y}{2}\cos\frac{x}{2}$$

$$y' = -2\operatorname{sen}\frac{y}{2}\cos\frac{x}{2}$$

$$\frac{dy}{\operatorname{sen}\frac{y}{2}} = -2\cos\frac{x}{2}\,dx$$

$$\int \frac{dy}{2\operatorname{sen}\frac{y}{2}} = -\int \cos\frac{x}{2}\,dx + c$$

$$\int \frac{dy}{2 * 2\operatorname{sen}\frac{y}{4}\cos\frac{y}{4}} = c - 2\operatorname{sen}\frac{x}{2}$$

$$\frac{1}{4}\int \frac{\cos\frac{y}{4}x}{\operatorname{sen}\frac{y}{4}\cos^2\frac{y}{4}}\,dy = c - 2\operatorname{sen}\frac{x}{2}$$

$$\frac{1}{4}\int \frac{\sec^2\frac{y}{4}}{\tan\frac{y}{4}}\,dy = c - 2\operatorname{sen}\frac{x}{2}$$

$$\ln\left|\tan\frac{y}{4}\right| = c - 2\operatorname{sen}\frac{x}{2}$$

5.a. $(x - y\cos\frac{y}{x})\ dx \ + \ x\cos\frac{y}{x}\, dy \ = \ 0$

$y = ux \qquad dy = xdu + udx$

$(x - ux\cos\frac{ux}{x})\ dx \ + \ x\cos\frac{ux}{x}\ (xdu + udx) = 0$

$x\ (1 - u\cos u)\ dx \ + x\cos u \ \ (xdu + udx) = 0$

$(1 - u\cos u)\ dx \ + \ \cos u\ (xdu + udx) = 0$

$(1 - u\cos u \ + \ u\cos u)\ dx \ + \ x\cos u du = 0$

$dx \ + \ x\cos u\ du = 0$

$\frac{dx}{x} + \cos u\ du = 0$

$\int \frac{dx}{x} + \int \cos u\ du = c \quad => \quad \ln x \ + \operatorname{sen} u = c$

$\ln x = -\operatorname{sen} u + c \quad => \quad x = e^{-\operatorname{sen} u + c}$

$x = e^{c}(e^{-\operatorname{sen} u}\ ) \quad => \quad x = k\ e^{-\operatorname{sen}\frac{y}{x}}$

5.b. $xy' = \sqrt{y^2 - x^2}$

$y = ux \qquad y' = xu' + u$

$x(xu' + u) = \sqrt{u^2x^2 - x^2} \quad => \quad x(xu' + u) = \sqrt{x^2(u^2 - 1)}$

$$x(xu' + u) = x\sqrt{u^2-1} \quad => \quad xu' + u = \sqrt{u^2-1}$$

$$xu' = \sqrt{u^2-1} - u \quad => \quad x\frac{du}{dx} = \sqrt{u^2-1} - u$$

$$\frac{du}{\sqrt{u^2-1}-u} = \frac{dx}{x} \quad => \quad \int \frac{du}{\sqrt{u^2-1}-u} \; 0 \int \frac{dx}{x} + c$$

$$\int \left(\frac{\sqrt{u^2-1} + u}{u^2-1-u^2}\right) du = \ln IxI + c \quad => \quad -\int \left(\sqrt{u^2-1} + u\right) du = \ln IxI + c$$

$$\int \left(\frac{\sqrt{u^2-1} + u}{u^2-1-u^2}\right) du = \ln IxI + c \quad => \quad -\int \left(\sqrt{u^2-1} + u\right) du = \ln IxI + c$$

$$-\int \sqrt{u^2-1}\, du - \int u\, du = \ln IxI + c$$

$$-\frac{1}{2}u\sqrt{u^2-1} + \frac{1}{2}\ln I\, u + \sqrt{u^2-1}\; I - \frac{u^2}{2} = \ln I\, x\, I + c$$

$$\ln\; I\, u + \sqrt{u^2-1}\; I - 2\ln I\, x\, I - \ln c = u\sqrt{u^2-1} + u^2$$

$$\ln I\, \frac{u + \sqrt{u^2-1}}{cx^2}\, I = u\sqrt{u^2-1} + u^2$$

$$\ln I\, \frac{\frac{y}{x} + \sqrt{\frac{y^2}{x^2} - 1}}{cx^2}\, I = \frac{y}{x}\sqrt{\frac{y^2}{x^2} - 1} + \frac{y^2}{x^2}$$

$$\ln \frac{\frac{y}{x} + \frac{\sqrt{y^2 - x^2}}{x}}{cx^2} = \frac{y\sqrt{y^2 - x^2}}{x^2} + \frac{y^2}{x^2}$$

$$\ln \frac{y + \sqrt{y^2 - x^2}}{cx^3} = \frac{y\sqrt{y^2 - x^2} + y}{x^2}$$

$$\frac{y + \sqrt{y^2 - x^2}}{cx^3} = e^{\frac{y(y+\sqrt{y^2-x^2})}{x^2}}$$

$$y + \sqrt{y^2 - x^2} = cx^3 e^{\frac{y(y+\sqrt{y^2-x^2})}{x^2}}$$

5.c. $4x^2 + xy - 3y^2 + y'(-5x^2 + 2xy + y^2) = 0$

$$y = ux \qquad \frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$$

$$4x^2 + x(ux) - 3(ux)^2 + (u + x\frac{du}{dx})(-5x^2 + 2x(ux) + (ux)^2) = 0$$

$$4x^2 + ux^2 - 3u^2x^2 + (u + x\frac{du}{dx})(-5x^2 + 2ux^2 + u^2x^2) = 0$$

$$x^2(4 + u - 3u^2) + (u + x\frac{du}{dx})(x^2)(-5 + 2u + u^2) = 0$$

$$(4 + u - 3u^2) + (u + \frac{du}{dx})(-5 + 2u + u^2) = 0$$

$$4 + u - 3u^2 - 5u + 2u^2 + u^3 + x(-5 + 2u + u^2)\frac{du}{dx} = 0$$

$$4 - 4u - u^2 + u^3 + x(-5 + 2u + u^2)\frac{du}{dx} = 0$$

$$\frac{dx}{x} + \frac{(-5 + 2u + u^2)}{u^3 - u^2 - 4u + 4}du = 0$$

$$\int \frac{dx}{x} + \int \frac{(u^2 + 2u - 5)\, du}{u^3 - u^2 - 4u + 4} = c$$

$$u^3 - u^2 - 4u + 4 = (u-1)(u^2-4)$$

$$= (u - 1)(u - 2)(u + 2)$$

$$\frac{u^2 + 2u - 5}{u^3 - u^2 - 4u + 4} = \frac{A}{u-1} + \frac{B}{u-2} + \frac{c}{u+2}$$

$$u^2 + 2u - 5 = A(u-2)(u+2) + B(u-1)(u+2) + c\,(u-1)(u-2)$$

Si $u = 1$ *entonces*

$$-2 = -3A \quad => \quad A\ \frac{2}{3}$$

Si $u = 2$ *entonces*

$$3 = 4B \quad => \quad B = \frac{3}{4}$$

Si $u = -2$ *entonces*

$$-5 = 12c \quad => \quad c = -\frac{5}{12}$$

Por lo tanto

$$\int \frac{u^2 + 2u - 5}{u^3 - u^2 - 4u + 4}\,du = \frac{2}{3}\int \frac{du}{u-1} + \frac{3}{4}\int \frac{du}{u-2} - \frac{5}{12}\int \frac{du}{u+2}$$

$$= \frac{2}{3}\ln(u-1) + \frac{3}{4}\ln(u-2) - \frac{5}{12}\ln(u+2)$$

Asi la solucion general de la e.d. es

$$\ln IxI + \frac{2}{3}\ln(u-1) + \frac{3}{4}\ln(4-2) - \frac{5}{12}\ln(u+2) = luc$$

$$12\ln IxI + 8\ln(u-1) + 9\ln(u-2) - 5\ln(u+2) = \ln c$$

$$\ln I\frac{x_{12}(u-1)^8(u-2)^9}{(u+2)^5}I = \ln c$$

como $u = \dfrac{y}{x}$ *entonces*

$$\ln\frac{x^{12}(\frac{y}{x}-1)^8(\frac{y}{x}-2)^9}{(\frac{y}{x}+2)^5} = \ln c$$

$$\ln\frac{x^{12}(\frac{y-x}{x})^8(\frac{y-2x}{x})^9}{(\frac{y+2x}{x})^5} = \ln c$$

$$\ln\frac{\frac{x^{12}(y-x)^8(y-2x)^9}{x^{17}}}{\frac{(y+2x)^5}{x^5}} = \ln c$$

$$\frac{(y-x)^8(y-2x)^9}{(y+2x)^9} = c$$

$5.d \qquad 2x+2y-1+y'(x+y-2) = 0$

$$z = x+y \qquad \frac{dz}{dx} = 1+\frac{dy}{dx} \quad => \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}-1$$

$$2z-1 + (\frac{dz}{dx}-1)(z-2) = 0$$

$$2z-1-z + 2 + (z-2)\frac{dz}{dx} = 0$$

$$z+1 + (z-2)\frac{dz}{dx} = 0$$

$$dx + \frac{(z-2)}{z+1}dz = 0$$

$$dx + (1-\frac{3}{z+1})dz = 0$$

$$\int dx + \int (1-\frac{3}{z+1})dz = c \quad => \quad x+z-3\ln(z+1) = c$$

$$x+x+y-3\ln(x+y+1) = c \quad => \quad 2x+y-3\ln(x+y+1) = c$$

$$\ln(x+y+1) = \frac{c+2x+y}{3} \quad => \quad x+y+1 = e^{\frac{c+2x+y}{3}}$$

$$x+y+1 = k e^{\frac{2x+y}{3}}$$

$5.e. \qquad \dfrac{\sqrt{x+y} + \sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{1+\frac{y}{x}} + \sqrt{1-\frac{y}{x}})}{\sqrt{x}(\sqrt{1+\frac{y}{x}} - \sqrt{1-\frac{y}{x}})} = \frac{\sqrt{1+\frac{y}{x}} + \sqrt{1-\frac{y}{x}}}{\sqrt{1+\frac{y}{x}} - \sqrt{1-\frac{y}{x}}}$$

$$y = ux \qquad \frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$$

$$u + x\frac{du}{dx} = \frac{\sqrt{1+u} + \sqrt{1-u}}{\sqrt{1+u} - \sqrt{1-u}}$$

$$x\frac{du}{dx} = \frac{\sqrt{1+u} + \sqrt{1-u}}{\sqrt{1+u} - \sqrt{1-u}} - u = \frac{\sqrt{1+u} + \sqrt{1-u} - u(\sqrt{1+u} - \sqrt{1-u})}{\sqrt{1+u} - \sqrt{1-u}}$$

$$\frac{(\sqrt{1+u} - \sqrt{1-u})\ du}{\sqrt{1+u} + \sqrt{1-u} - u\sqrt{1+u} + u\sqrt{1-u}} = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{(\sqrt{1+u} - \sqrt{1-u})}{(1-u)\sqrt{1+u} + (1+u)\sqrt{1-u}} = \int \frac{dx}{x} + c$$

$$\int \frac{(\sqrt{1+u} - \sqrt{1-u})\{(1-u)\sqrt{1+u} - (1+u)\sqrt{1-u}\}}{(1-u)^2(1+u) - (1+u)^2(1-u)}du = \ln x + c$$

$$\int \frac{(1-u)(1+u) - (1+u)\sqrt{1-u}\sqrt{1+u} - (1-u)\sqrt{1-u}\sqrt{1+u} + (1+u)(1-u)}{(1-2u+u^2)(1+u) - (1+2u+u^2)(1-u)}$$

$$= \ln x + c$$

$$\int \frac{1-u^2 - \sqrt{1-u}\sqrt{1+u} - u\sqrt{1-u}\sqrt{1+u} - \sqrt{1-u}\sqrt{1+u} + u\sqrt{1-u}\sqrt{1+u} + 1 - u^2}{1-2u-u^2+u-2u^2+u^3-(1+2u+u^2-u-2u^2-u^3)}$$

$$= \ln x + c$$

$$\int \frac{2-2u^2-2\sqrt{1-u^2}}{1-u-u^2+u^3-(1+u-u^2-u^3)}du = \ln x + c$$

$$\int \frac{2-2u^2-2\sqrt{1-u^2}}{1-u-u^2+u^3-1-u+u^2+u^3} = \ln x + c$$

$$\int \frac{2-2u^2-2\sqrt{1-u^2}}{-2u+2u^3}du = \ln x + c$$

$$\int \frac{1-u^2-\sqrt{1-u^2}}{-u+u^3}du = \ln x + c$$

$$\int \frac{1-u^2-\sqrt{1-u^2}}{-u(1-u^2)}du = \ln x + c$$

$$-\int \frac{du}{u} + \int \frac{\sqrt{1-u^2}}{u(1-u^2)}du = \ln x + c$$

$$-\ln x - \ln\frac{1+\sqrt{1-u^2}}{u} - \ln x$$

$$\ln(x(1+\sqrt{1-u^2})) = \ln c \quad => \quad x(1+\sqrt{1-\frac{y^2}{x^2}}) = c$$

$$x(\frac{x+\sqrt{x^2-y^2}}{x}) = c \quad => \quad x+\sqrt{x^2-y^2} = c$$

$$\int \frac{\sqrt{1-u^2}}{u(1-u^2)}du = \int \frac{\cos\theta\cos\theta\ d\theta}{\text{sen}(1-\text{sen}^2\theta)} = \int \frac{\cos^2\theta}{\text{sen}\,\theta\cos^2\theta}d\theta$$

$u = \text{sen}\,\theta$

$du = \cos\theta d\theta$

$$\int \frac{d\theta}{\text{sen}\,\theta} = \int \csc\theta d = -\ln(\csc\theta + \cot\theta)$$

$$= -\ln(\frac{1}{u}+\frac{\sqrt{1-u^2}}{u}) = -\ln(\frac{1+\sqrt{1-u^2}}{u})$$

6.- Integrar las ecuaciones:

a)

$$\underbrace{\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}_{M}dx+\underbrace{\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{1}{y}-\frac{x}{y^2}\right)}_{N}dy=0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=x\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{3}{2}}\left(-\frac{1}{2}\right)(2y)-\frac{1}{y^2}=-\frac{xy}{\left[x^2+y^2\right]^{\frac{3}{2}}}-\frac{1}{y^2}$$

$$\frac{\partial N}{\partial x}=y\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{3}{2}}\left(-\frac{1}{2}\right)(2x)-\frac{1}{y^2}=-\frac{xy}{\left[x^2+y^2\right]^{\frac{3}{2}}}-\frac{1}{y^2}$$

$\therefore$ la e.d. es exacta

Como

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$$

entonces

$$u=\int\frac{xdx}{\sqrt{x^2+y^2}}+\int\frac{dx}{x}+\int\frac{dx}{y}+c(y)$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\frac{1}{2}}+\ln|x|+\frac{x}{y}+c(y)$$

$$=\sqrt{x^2+y^2}+\ln|x|+\frac{x}{y}+c(y)$$

Para encontrar c(y) usamos el hecho de que u debe cumplir

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{1}{y}-\frac{x}{y^2}$$

entonces

$$\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{x}{y^2}+c'(y)=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{1}{y}-\frac{x}{y^2}$$

•

entonces

$$c'(y)=\frac{1}{y}$$

$$c'(y)=\frac{1}{y}$$

$$c(y)=\int\frac{dy}{y}$$

$$\therefore c(y)=\ln|y|$$

Así

$$u=\sqrt{x^2+y^2}+\ln|x|+\frac{x}{y}+\ln|y|$$

$$u=\sqrt{x^2+y^2}+\ln|xy|+\frac{x}{y}$$

Por lo tanto la solución general es:

$$\sqrt{x^2+y^2}+\ln|xy|+\frac{x}{y}=c$$

b)

$$\frac{y+SenxCos^2xy}{Cos^2xy}dx+\left(\frac{x}{Cos^2xy}+Seny\right)dy=0$$

$$M=\frac{y+SenxCos^2xy}{Cos^2xy}=ySec^2xy+Senx$$

$$N=xSec^2xy+Seny$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=Sec^2xy+2ySecxySecxyTanxy=Sec^2xy+2xySec^2xyTanxy$$

$$\frac{\partial N}{\partial x}=Sec^2xy+2xySecxySecxyTanxy=Sec^2xy+2xySec^2xyTanxy$$

$$\therefore\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$$

$\therefore$la e.d. es exacta

Como

$$\frac{\partial u}{\partial x}=ySec^2xy+Senx$$

entonces

$$u = y\int Sec^2 xy dx + \int Senx dx + c(y)$$

$$u = \frac{yTanxy}{y} - Cosx + c(y)$$

$$u = Tanxy - Cosx + c(y)$$

Para encontrar c(y) utilizamos el hecho de que:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = xSec^2 xy + Seny$$

$$xSec^2 xy + c'(y) = xSec^2 xy + Seny$$

$$c'(y) = Seny$$

$$c(y) = -Cosy$$

Por lo tanto

$$u = Tanxy - Cosx - Cosy$$

Así la solución general es:

$$Tanxy - Cosx - Cosy = c$$

c)

$$[nCos(nx+my) - mSen(mx+ny)]dx + [mCos(nx+my) - nSen(mx+ny)]dy = 0$$

$$M = nCos(nx+my) - mSen(mx+ny)$$

$$N = mCos(nx+my) - nSen(mx+ny)$$

como

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -mnSen(nx+my) - mnCos(mx+ny)$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = -mnSen(nx+my) - mnCos(mx+ny)$$

entonces la e.d. es exacta. Así

$$\frac{\partial u}{\partial x} = nCos(nx+my) - mSen(mx+ny)$$

$$u = n\int Cos(nx+my)dx - m\int Sen(mx+ny)dx + c(y)$$

$$u = Sen(nx+my) + Cos(mx+ny) + c(y)$$

Para encontrar c(y) utilizamos el hecho de que

$$\frac{\partial u}{\partial y} = mCos(nx+my) - nSen(mx+ny)$$

$$mCos(nx+my) - nSen(mx+ny) + c'(y) = mCos(nx+my) - nSen(mx+ny)$$

$$\therefore c'(y) = 0$$

Así la solución general es:

$$Sen(nx+my) + C(mx+ny) = c$$

d)

$$\left(\frac{1}{y}Sen\frac{x}{y}-\frac{y}{x^2}Cos\frac{y}{x}+1\right)dx+\left(\frac{1}{x}Cos\frac{y}{x}-\frac{x}{y^2}Sen\frac{x}{y}+\frac{1}{y^2}\right)dy=0$$

$$M=\frac{1}{y}Sen\frac{x}{y}-\frac{y}{x^2}Cos\frac{y}{x}+1$$

$$N=\frac{1}{x}Cos\frac{y}{x}-\frac{x}{y^2}Sen\frac{x}{y}+\frac{1}{y^2}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=-\frac{1}{y^2}Sen\frac{x}{y}-\frac{x}{y^3}Cos\frac{x}{y}-\frac{1}{x^2}Cos\frac{y}{x}+\frac{x}{y^3}Sen\frac{y}{x}$$

$$\frac{\partial N}{\partial x}=-\frac{1}{x^2}Cos\frac{y}{x}+\frac{y}{x^3}Sen\frac{y}{x}-\frac{1}{y^2}Sen\frac{x}{y}-\frac{x}{y^3}Cos\frac{x}{y}$$

$$\therefore \frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$$

$\therefore$la e.d. es exacta

como

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{y}Sen\frac{x}{y}-\frac{y}{x^2}Cos\frac{y}{x}+1$$

entonces

$$u=\frac{1}{y}\int Sen\frac{x}{y}dx-y\int\frac{1}{x^2}Cos\frac{y}{x}dx+\int dx+c(y)$$

entonces

$$u=-Cos\frac{x}{y}+Sen\frac{y}{x}+x+c(y)$$

Para calcular c(y) utilizamos el hecho de que:

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{x}Cos\frac{y}{x}-\frac{x}{y^2}Sen\frac{x}{y}+\frac{1}{y^2}$$

Es decir,

$$-\frac{x}{y^2}Sen\frac{x}{y}+\frac{1}{x}Cos\frac{y}{x}+c'(y)=\frac{1}{x}Cos\frac{y}{x}-\frac{x}{y^2}Sen\frac{x}{y}+\frac{1}{y^2}$$

$$\therefore c'(y)=\frac{1}{y^2}$$

$$c(y)=-\frac{1}{y}$$

Así la solución general es:

$$-Cos\frac{x}{y}+Sen\frac{y}{x}+x-\frac{1}{y}=c$$

7.- Muestre que yf(xy)dx + xg(xy)dy = 0 no es exacta en general pero llega a ser exacta al multiplicarla por el factor integrante $[xy(f(xy)-g(xy))]^{-1}$.

Como M = yf(xy) y N = xg(xy)
entonces

$$\frac{\partial M}{\partial y} = f(xy) + yf'(xy)x$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = g(xy) + xg'(xy)y$$

$$y\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$$

Si ahora multiplicamos por el factor integrante obtenemos:

$$yx^{-1}y^{-1}(f(xy)-g(xy))^{-1}f(xy)dx + xx^{-1}y^{-1}(f(xy)-g(xy))^{-1}g(xy)dy = 0$$

$$x^{-1}(f(xy)-g(xy))^{-1}f(xy)dx + y^{-1}(f(xy)-g(xy))^{-1}g(xy)dy = 0$$

Ahora tenemos que

$$M = x^{-1}(f(xy)-g(xy))^{-1}f(xy)yN = y^{-1}(f(xy)-g(xy))^{-1}g(xy)$$

y se tiene

$$\frac{\partial M}{\partial y} = x^{-1}\left[-f((xy)-g(xy))^{-2}(xf'(xy)-xg'(xy))\right]f(xy) + x^{-1}(f(xy)-g(xy))^{-1}xf'(xy)$$

$$= -(f(xy)-g(xy))^{-2}(f'(xy)-g'(xy))f(xy) + (f(xy)-g(xy))^{-1}f'(xy)$$

$$= \frac{f'(xy)}{f(xy)-g(xy)} - \frac{f'(xy)f(xy)-g'(xy)f(xy)}{(f(xy)-g(xy))^2}$$

$$= \frac{f'(xy)(f(xy)-g(xy)) - f'(xy)f(xy) + g'(xy)(xy)}{(f(xy)-g(xy))^2}$$

$$\frac{f'(xy)f(xy)-f'(xy)g(xy)-f'(xy)f(xy)+g'(xy)f(xy)}{(f(xy)-g(xy))^2}$$

$$= \frac{g'(xy)f(xy)-f'(xy)g(xy)}{(f(xy)-g(xy))^2}$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = y^{-1}\left[-(f(xy)-g(xy))^{-2}(yf'(xy)-yg'(xy))\right]g(xy) + y^{-1}(f(xy)-g(xy))^{-1}yg'(xy)$$

$$= -(f(xy)-g(xy))^{-2}(f'(xy)-g'(xy))g(xy) + (f(xy)-g(xy))^{-1}g'(xy)$$

$$= -\frac{(f'(xy)-g'(xy))g(xy)}{(f(xy)-g(xy))^2} + \frac{g'(xy)}{f(xy)-g(xy)}$$

$$= \frac{g'(xy)(f(xy)-g(xy)) - (f'(xy)-g'(xy))g(xy)}{(f(xy)-g(xy))^2}$$

$$= \frac{g'(xy)f(xy)-g'(xy)g(xy)-f'(xy)g(xy)+g'(xy)g(xy)}{(f(xy)-g(xy))^2}$$

$$= \frac{g'(xy)f(xy)-f'(xy)g(xy)}{(f(xy)-g(xy))^2}$$

$$\therefore \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

$\therefore$la e.d. es exacta

8.- Si $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}$ y $\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}$ muestre que la ecuación Pdx + Qdy = 0 no es exacta en general pero llega a ser exacta al multiplicarla por $1/(P^2 + Q^2)$.

$$\underbrace{\frac{P}{P^2+Q^2}}_{M}dx + \underbrace{\frac{Q}{P^2+Q^2}}_{N}dy = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\left(P^2+Q^2\right)\frac{\partial P}{\partial y} - P\left[2P\frac{\partial P}{\partial y} + 2Q\frac{\partial Q}{\partial y}\right]}{\left(P^2+Q^2\right)^2}$$

$$= \frac{P^2\frac{\partial P}{\partial y} + Q^2\frac{\partial P}{\partial y} - 2P^2\frac{\partial P}{\partial y} - 2PQ\frac{\partial Q}{\partial y}}{\left(P^2+Q^2\right)^2}$$

$$= \frac{Q^2\frac{\partial P}{\partial y} - 2PQ\frac{\partial Q}{\partial y} - P^2\frac{\partial P}{\partial y}}{\left(P^2+Q^2\right)^2}$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\left(P^2+Q^2\right)\frac{\partial Q}{\partial x} - Q\left[2P\frac{\partial P}{\partial x} + 2Q\frac{\partial Q}{\partial x}\right]}{\left(P^2+Q^2\right)^2}$$

$$= \frac{P^2\frac{\partial Q}{\partial x} + Q^2\frac{\partial Q}{\partial x} - 2PQ\frac{\partial P}{\partial x} - 2Q^2\frac{\partial Q}{\partial x}}{\left(P^2+Q^2\right)^2}$$

$$= \frac{P^2\frac{\partial Q}{\partial x} - 2PQ\frac{\partial P}{\partial x} - Q^2\frac{\partial Q}{\partial x}}{\left(P^2+Q^2\right)^2} = \frac{-P^2\frac{\partial P}{\partial y} - 2PQ\frac{\partial P}{\partial x} + Q^2\frac{\partial P}{\partial y}}{\left(P^2+Q^2\right)^2}$$

9.- Muestre que si la ecuación Mdx + Ndy = 0 es tal que

$$\frac{1}{xM - yN}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) = F(xy)$$

entonces un factor integrante es $e^{\int F(u)du}$ donde u=xy.

Sea μ el factor integrante entonces

$$N\frac{\partial \ln\mu}{\partial x} - M\frac{\partial \ln\mu}{\partial y} = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}$$

Si z = xy entonces

$$N\frac{\partial \ln \mu}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} - M\frac{\partial \ln \mu}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \ln \mu}{\partial z} = \frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N\dfrac{\partial z}{\partial x} - M\dfrac{\partial z}{\partial y}} = \frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{yN - xM} = \frac{\dfrac{\partial N}{\partial x} - \dfrac{\partial M}{\partial y}}{xM - yN}$$

como $\dfrac{\dfrac{\partial N}{\partial x} - \dfrac{\partial M}{\partial y}}{xM - yN} = F(xy)$ entonces

$$\frac{\partial \ln \mu}{\partial z} = F(u)$$

$$\ln \mu = \int F(u)du$$

$$u = e^{\int F(u)du}$$

10.- Muestre que $\sqrt{x^2 + y^2}(xdx + ydy) = \dfrac{1}{3}d\left(\left(x^2 + y^2\right)^{\frac{3}{2}}\right)$. Ahora resuelva

$$\left(y - x\sqrt{x^2 + y^2}\right)dx + \left(x - y\sqrt{x^2 + y^2}\right)dy = 0$$

$$ydx - x\sqrt{x^2 + y^2}dx + xdy - y\sqrt{x^2 + y^2}dy = 0$$

$$ydx + xdy - \sqrt{x^2 + y^2}\left[xdx + ydy\right] = 0$$

$$d(xy) - \frac{1}{3}d\left(\left(x^2 + y^2\right)^{\frac{3}{2}}\right) = 0$$

$$d\left(xy - \frac{1}{3}\left(x^2 + y^2\right)^{\frac{3}{2}}\right) = 0$$

$$\therefore xy - \frac{1}{3}\left(x^2 + y^2\right)^{\frac{3}{2}} = c$$

11.- Muestre que $\dfrac{xdy - ydx}{(xy)^4} = -\dfrac{1}{3}d\left[(xy)^{-3}\right]$. Ahora resuelva.

$$\left(y - x^5y^4\right)dx + \left(x - x^4y^5\right)dy = 0$$

$$ydx - x^5y^4dx + xdy - x^4y^5dy = 0$$

$$ydx + xdy - x^4y^4\left[xdx + ydy\right] = 0$$

$$\frac{ydx+xdy}{(xy)^4}-[xdx+ydy]=0$$

$$-\frac{1}{3}d\left[(xy)^{-3}\right]-d(xy)=0$$

$$-\frac{1}{3}(xy)^{-3}-xy=c$$

12.- Integrar las ecuaciones:

a)

$$x\ln xy'-(1+\ln x)y+\frac{1}{2}\sqrt{x}(2+\ln x)=0$$

$$y'=\frac{(1+\ln x)y}{x\ln x}=-\frac{\sqrt{x}(2+\ln x)}{2x\ln x}$$

$$e^{\int-\frac{(1+\ln x)}{x\ln x}dx}=e^{-\int\frac{(1+z)}{z}dz}=e^{-\int\frac{dz}{z}-\int dz}$$

$$z=\ln x$$

$$dz=\frac{dx}{x}$$

$$=e^{-\int\ln|z|-z}=e^{-\ln|\ln x|}e^{-\ln x}$$

$$=e^{\ln\left|\frac{1}{\ln x}\right|}e^{\ln x^{-1}}=\frac{1}{x\ln x}$$

Multiplicando la e.d. por $\frac{1}{x\ln x}$ obtenemos:

$$\frac{y'}{x\ln x}-\frac{(1+\ln x)y}{x^2\ln^2 x}=-\frac{\sqrt{x}(2+\ln x)}{2x^2\ln^2 x}$$

$$Dx\left[\frac{y}{x\ln x}\right]=-\frac{\sqrt{x}(2+\ln x)}{2x^2\ln^2 x}$$

$$\frac{y}{x\ln x}=-\int\frac{\sqrt{x}(2+\ln x)}{2x^2\ln^2 x}dx+c$$

$$\int\frac{\sqrt{x}(2+\ln x)}{2x^2\ln^2 x}dx=\int\frac{2\sqrt{x}dx}{2x^2\ln^2 x}+\int\frac{\sqrt{x}\ln x}{2x^2\ln^2 x}$$

$$=\int\frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}}+\int\frac{dx}{2x^{\frac{3}{2}}}=\int\frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}}-\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}-\int\frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}\ln^2 x}$$

$$=-\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}\ln x}$$

Por partes

$$u = (\ln x)^{-1}$$

$$du = -(\ln x)^{-2}\left(\frac{1}{x}\right)dx$$

$$dv = \frac{x^{-\frac{3}{2}}dx}{2}$$

$$v = \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{2\left(-\frac{1}{2}\right)}$$

Por lo tanto

$$\frac{y}{x\ln x} = \frac{1}{\sqrt{x}\ln x} + c$$

$$y = \frac{x\ln x}{\sqrt{x}\ln x} + cx\ln x$$

$$y = \sqrt{x} + cx\ln x$$

b) $\qquad y'-y=2xe^{x+x^2}$

$e^{-\int dx}=e^{-x}$

multiplicando la e. d. por e^{-x} tenemos

$$e^{-x}y'-ye^{-x}=2xe^{x^2}$$
$$Dx\left[ye^{-x}\right]=2xe^{x^2}$$
$$ye^{-x}=\int 2xe^{x^2}dx+c \qquad\qquad z=x^2$$
$$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad dz=\partial x dx$$
$$ye^{-x}=e^{x^2}+c$$
$$y=e^{x+x^2}+ce^{-x}$$

C)

$$y'+\frac{x+\frac{1}{2}}{x^2+x+1}y=\frac{(1-x^2)}{(x^2+x+1)^{3/2}}y^2$$

Sea

$$z=y^{1-n}=y^{1-2}=y^{-1}$$

entonces

$$\frac{dz}{dx}=-y^{-2}\frac{dy}{dx}$$

multiplicando la ecuación diferencial por $-y^{-2}$

$$-y^{-2}\frac{dy}{dx}-\frac{x+\frac{1}{2}}{x^2+x+1}y^{-1}=\frac{(1-x^2)}{(x^2+x+1)^{3/2}}$$

$$\frac{dz}{dx}-\frac{x+\frac{1}{2}}{x^2+x+1}z=\frac{(1-x^2)}{(x^2+x+1)^{3/2}}$$

$$e^{-\int\frac{x+\frac{1}{2}}{x^2+x+1}dx}=e^{-\frac{1}{2}\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx}=e^{-\frac{1}{2}\ln|x^2+x+1|}=e^{\ln|x^2+x+1|^{-\frac{1}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}$$

multiplicando la ec. dif. por $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}$

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}\frac{dz}{dx}-\frac{x+\frac{1}{2}}{(x^2+x+1)^2}z=\frac{(1-x^2)}{(x^2+x+1)^2}$$

$$Dx\left[\frac{x}{\sqrt{x^2+x+1}}\right]=\frac{(1-x^2)}{(x^2+x+1)^2}$$

$$\frac{z}{\sqrt{x^2+x+1}}=\int\frac{(1-x^2)}{(x^2+x+1)^2}dx+c$$

d) $2\sqrt{x}y'-y=-\operatorname{sen}\sqrt{x}-\cos\sqrt{x}$ y es acotada cuando $x\to\infty$

$$y'-\frac{y}{2\sqrt{y}}=-\frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}-\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$$

$$e^{-\int\frac{dx}{2\sqrt{x}}}=e^{-\frac{\sqrt{x}}{2(1/2)}}=e^{-\sqrt{x}}$$

Multiplicando por $e^{-\sqrt{x}}$ obtenemos

$$y'e^{-\sqrt{x}}-\frac{ye^{-\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}=-\frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}-\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}e^{-\sqrt{x}}$$

$$Dx\left[ye^{-\sqrt{x}}\right]=\frac{-\operatorname{sen}\sqrt{x}-\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}e^{-\sqrt{x}}$$

$$ye^{-\sqrt{x}}=-\int\frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}+\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}e^{-\sqrt{x}}dx+c$$

Calculamos la integral:

$$\int \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}+\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} e^{-\sqrt{x}}dx = \int (\operatorname{sen} u + \cos u) e^{-u} du$$

$$u = \sqrt{x} \qquad du = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{-\operatorname{sen} ue^{-u} - \cos ue^{-u}}{2} + \frac{\operatorname{sen} ue^{-u} - \cos ue^{-u}}{2}$$

$$= -\cos ue^{-u} = -\cos\sqrt{x}e^{-\sqrt{x}}$$

$$\int \operatorname{sen} ue^{-u} du = -\operatorname{sen} ue^{-u} + \int \cos ue^{-u} du$$

$$= -\operatorname{sen} ue^{-u} + \cos ue^{-u} - \int \operatorname{sen} ue^{-u}$$

$\alpha = \operatorname{sen} u \qquad d\beta = e^{-u} du$

$d\alpha = \cos u du \qquad \beta = -e^{-u}$

$\alpha = \cos u \qquad d\beta = e^{-u} du$

$d\alpha = -\operatorname{sen} u du \qquad \beta = -e^{-u}$

$$\therefore 2\int \operatorname{sen} u du = -\operatorname{sen} ue^{-u} - \cos ue^{-u}$$

$$\int \operatorname{sen} u du = \frac{-\operatorname{sen} ue^{-u} - \cos ue^{-u}}{2}$$

$$\int \cos ue^{-u} du = -\cos ue^{-u} - \int \operatorname{sen} ue^{-u} du$$

$$= \cos ue^{-u} + \operatorname{sen} ue^{-u} - \int \cos ue^{-u}$$

$\alpha = \cos u \qquad d\beta = e^{-u} du$

$d\alpha = -\operatorname{sen} u du \qquad \beta = -e^{-u}$

$\alpha = \operatorname{sen} u \qquad d\beta = e^{-u} du$

$d\alpha = \cos u du \qquad \beta = -e^{-u}$

$$\therefore 2\int \cos u du = -\cos u e^{-u} + \operatorname{sen} u e^{-u}$$

$$\int \cos u du = \frac{-\cos u e^{-u} + \operatorname{sen} u e^{-u}}{2}$$

Así la solución de la ec. Diferencial es:

$$ye^{-\sqrt{x}} = \cos\sqrt{x}e^{-\sqrt{x}} + c$$

$$y = \cos\sqrt{x} + ce^{\sqrt{x}}$$

Para que se tenga una solución acotada cuando x-> ∞ pedimos que c=0. Por lo tanto la solución es:

$$y = \cos\sqrt{x}$$

13.-Integrar las ecuaciones si tienen un factor integrante de la forma indicada:

a) $(x^2 + y^2 + 1)dx - 2xydy = 0, \qquad \mu = \gamma(y^2 - x^2)$

sea

$\mu = \gamma(z)$ y $z = y^2 - x^2$

entonces la ecuación

$$\frac{\partial In\mu}{\partial y}M - \frac{\partial In\mu}{\partial x}N = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}$$

se transforma en:

$$\frac{\partial In\mu}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}M - \frac{\partial In\mu}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}N = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}$$

$$\therefore \frac{\partial Inu}{\partial z} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M\frac{\partial z}{\partial y} - N\frac{\partial z}{\partial x}}$$

Así

$$\frac{\partial In\mu}{\partial z}=\frac{-2y-2y}{(x^2+y^2+1)(2y)-(-2xy)(-2x)}$$

$$=\frac{-4y}{2x^2y+2y^3+2y-4x^2y}$$

$$=\frac{-4y}{-2x^2y+2y^3+2y}=\frac{2}{x^2-y-1}$$

$$\therefore \frac{\partial In\mu}{\partial z}=-\frac{2}{z+1}$$

$$In\mu=-2\int\frac{dz}{z+1}$$

$$In\mu=-2In|z+1|$$

$$In\mu=In\left|\frac{1}{(z+1)^2}\right|$$

$$\therefore \mu=\frac{1}{(y^2-x^2+1)^2}$$

Ahora multiplicando la e. d. por el factor integrante

$$\frac{(x^2+y^2+1)}{(y^2-x^2+1)^2}dx-\frac{2xydy}{(y^2-x^2+1)^2}=0$$

Como

$$\frac{\partial\mu}{\partial y}=-\frac{\partial xy}{(y^2-x^2+1)^2}$$

Entonces

$$u(x,y) = -x\int \frac{2ydy}{(y^2 - x^2 + 1)^2}$$

Sea

$$z = y^2 - x^2 + 1$$

entonces

dz = 2ydy

$$u(x,y) = -x\int \frac{dz}{z^2}$$

$$= \frac{x}{z} = \frac{x}{y^2 - x^2 + 1}$$

Comprobemos ahora que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x^2 + y^2 + 1}{\left(y^2 - x^2 + 1\right)^2}$$

Se tiene que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{(1)\left(y^2 - x^2 + 1\right) - (x)(-2x)}{\left(y^2 - x^2 + 1\right)^2} = \frac{y^2 - x^2 + 1 + 2x^2}{\left(y^2 - x^2 + 1\right)^2} = \frac{x^2 + y^2 + 1}{\left(y^2 - x^2 + 1\right)}$$

Por lo tanto la solución de la e. d. es

$$\frac{x}{y^2 - x^2 + 1} = \frac{1}{c}$$

b) $\left(3y^2 - x\right)dx + \left(2y^3 - 6xy\right)dy = 0$ $\qquad \mu = \gamma(x + y^2)$

Sea $\mu = \gamma(z)$ y $z = x + y^2$ entonces la ecuación

$$\frac{\partial In\mu}{\partial y}M - \frac{\partial In\mu}{\partial x}N = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}$$

Se transforma en

$$\frac{\partial In\mu}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}M-\frac{\partial In\mu}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}N=\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}$$

$$\therefore\frac{\partial In\mu}{\partial z}=\frac{\dfrac{\partial N}{\partial x}-\dfrac{\partial M}{\partial y}}{M\dfrac{\partial z}{\partial y}-N\dfrac{\partial z}{\partial x}}$$

Así

$$\frac{\partial In\mu}{\partial z}=\frac{-6y-6y}{(3y^2-x)(2y)-(2y^3-6xy)(1)}=-\frac{12y}{6y^3-2xy-2y^3+6xy}$$

$$=-\frac{12y}{4y^3+4xy}$$

$$\therefore\frac{\partial In\mu}{\partial z}=-\frac{3}{y^2+x}=-\frac{3}{z}$$

$$In\mu=-3\int\frac{dz}{z}$$

$$In\mu=-3In|x+y^2|$$

$$\therefore\mu=\frac{1}{(x+y^2)^3}$$

Ahora multiplicando la e.d. por el factor integrante

$$\frac{(3y^2-x)dx}{(x+y^2)^3}+\frac{(2y^3-6xy)dy}{(x+y^2)^3}=0$$

Como

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{3y^2 - x}{\left(x + y^2\right)^3}$$

entonces

$$u = \int \frac{3y^2 - x}{\left(x + y^2\right)^3} dx$$

Sea $w = x + y^2$ entonces

$x = w - y^2$ y dw = dx

Por lo tanto

$$u = \int \frac{3y^2 - \left(w - y^2\right)}{w^3} dw = \int \frac{3y^2 - w + y^2}{w^3} dw = \int \frac{4y^2 - w}{w^3} dw = 4y^2 \int \frac{dw}{w^3} - \int \frac{dw}{w^2}$$

$$= 4y^2 \frac{w^{-2}}{-2} + \frac{1}{w} = -\frac{2y^2}{\left(x + y^2\right)^2} + \frac{1}{\left(x + y^2\right)} = \frac{-2y^2 + x + y^2}{\left(x + y^2\right)^2} = \frac{x - y^2}{\left(x + y^2\right)^2}$$

Como

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{(-2y)\left(x + y^2\right)^2 - \left(x - y^2\right)2\left(x + y^2\right)(2y)}{\left(x + y^2\right)^4} = \frac{(-2y)\left(x + y^2\right)^2 - 2\left(x - y^2\right)2y}{\left(x + y^2\right)^3}$$

$$= \frac{-2xy - 2y^3 - 4xy + 4y^3}{\left(x + y^2\right)^3} = \frac{2y^3 - 6xy}{\left(x + y^2\right)^3}$$

Entonces la solución general de la e.d. es:

$$\frac{x - y^2}{\left(x + y^2\right)^2} = c$$

c) $\left(x^4 Inx - 2xy^3\right)dx + 3x^2y^2dy = 0, \qquad \mu = \gamma(x)$

Como la e.d. tiene un factor integrante que depende de x entonces éste se encuentra de la ecuación:

$$\frac{dIn\mu}{dx} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}$$

$$\frac{dIn\mu}{dx} = \frac{-6xy^2 - 6xy^2}{3x^2y^2} = -\frac{12xy^2}{3x^2y^2} = -\frac{4}{x}$$

$$In\mu = -a\int \frac{dx}{x}$$

$$In\mu = -4Inx$$

$$\mu = \frac{1}{x^4}$$

Multiplicando la e.d. por μ obtenemos

$$\frac{x^4 Inx - 2xy^3}{x^4}dx + \frac{3y^2}{x^2}dy = 0$$

Como

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{3y^2}{x^2}$$

Entonces

$$u = \int \frac{3y^2}{x^2}dy = \frac{y^3}{x^2} + c(x)$$

Calculamos c(x) por el hecho de que u debe cumplir

$$\frac{\partial u}{\partial x} = Inx - \frac{2y^3}{x^3}$$

Es decir

$$-\frac{2y^3}{x^3} + c'(x) = Inx - \frac{2y^3}{x^3}$$

$$c'(x) = \ln x$$
$$c(x) = \int \ln x dx$$

$$\alpha = \ln x \qquad d\beta = dx$$
$$d\alpha = \frac{dx}{x} \qquad \beta = x$$

$$c(x) = x\ln x - \int dx = x\ln x - x$$

Por lo tanto

$$u = \frac{y^3}{x^2} + x\ln x - x$$

Así la solución gral. es:

$$\frac{y^3}{x^2} + x\ln x - x = c$$

$$\frac{y^3}{x^2} + x(\ln x - 1) = c$$

$$\frac{y^3 + x^3(\ln x - 1)}{x^2} = c$$

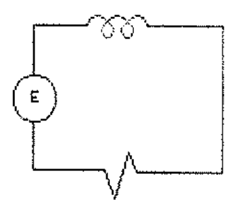
$$y^3 + x^3(\ln x - 1) = cx^2$$

UNIDAD II

APLICACIONES DE LAS ECUACIONES DIFIRENCIALES

II.1.Circuitos Eléctricos.

La segunda ley de Kirchoff dice que en un circuito en serie que contiene solo una resistencia y una inductancia, la suma de las caídas de voltaje a través del inductor L$\frac{di}{dt}$ y el resistor iR es igual a la tensión E(t) aplicada al circuito.

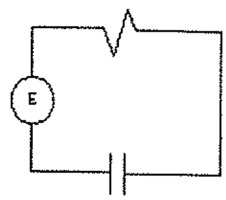


Se obtiene así la ecuación diferencial para la corriente i(t):

$$L\frac{di}{dt} + iR = E(t)$$

En donde L y R son constantes conocidas como inductancia y resistencia, respectivamente. A veces, a la corriente i(t) se le llama respuesta del sistema.

La caída de voltaje a través de un capacitor con capacidad C esta dada por $\frac{q(t)}{C}$, en donde q es la carga en el capacitor. Por consiguiente, para el circuito en serie:



La segunda ley de Kirchoff da:

iR + $\dfrac{q}{C}$ = E(t)

Ejemplo. Una batería de 12V (volts) se conecta a un circuito simple en serie en el cual la inductancia es ½ H (henrys), y la resistencia, de 10 Ω (ohms). Determinar la corriente si la intensidad inicial es cero.

Se debe resolver

$$\frac{1}{2}\frac{di}{dt} + 10 = 12$$

sujeta a i(0) = 0. Primero multiplíquese la ecuación diferencial por 2 y deduzcase que el factor integrante es e^{20t}. Luego se obtiene:

$$\frac{d}{dt}\left[e^{20t} i\right] = 24e^{20t}$$

$$e^{20t} i = \frac{24}{20} e^{20t} + C$$

$$i = \frac{6}{5} + Ce^{-20t}$$

ahora bien, i(0)=0 implica 0=$\frac{6}{5}$+C, o bien C=$-\frac{6}{5}$. Por lo tanto, la respuesta es:

$$i(t)=\frac{6}{5}-\frac{6}{5}e^{-20t}$$

Ejemplo. Una fem. decayente E=200e^{-5t} se conecta en serie con una resistencia de 20 ohmios y un condensador de 0.01 faradios. Asumiendo q=0 en t=0, encuentre la carga y la corriente en cualquier tiempo. Muestre que la carga alcanza un máximo, calcúlelo y halle cuando se obtiene.

Por la ley de Kirchoff:

20i + 100q=200e^{-5t}

y puesto que i=$\frac{dq}{dt}$

$$20\frac{dq}{dt}+100q=200e^{-5t}$$

$$\frac{dq}{dt}+5q=10e^{-5t}$$

$$\frac{d}{dt}(qe^{5t})=10$$

$$qe^{5t}=10t+C$$

puesto que q=0 en t=0, C=0. De donde

$$q = 10te^{-5t}$$

puesto que

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}(10te^{-5t}) = 10e^{-5t} - 50te^{-5t}$$

para hallar cuando q es máxima, haga $\frac{dq}{dt} = 0$, esto es, i=0

$$10\,e^{-5t} - 50te^{-5t} = 0$$

$$t = \frac{1}{5}seg.$$

II.2. Crecimiento y Decrecimiento.

El problema de valor inicial

$$\frac{dx}{dt} = kx$$

$x(t_0)=x_0$

en donde k es una constante, aparece en muchas teorías físicas que involucran crecimiento, o bien, decrecimiento. Por ejemplo, en Biología a menudo se observa que la rapidez con que, en cada instante, ciertas bacterias se multiplican, es proporcional al numero de bacterias presentes en dicho instante.

En física, un problema de valores iniciales como el anterior proporciona un modelo para aproximar la cantidad restante de una substancia que desintegra radiactivamente.

Ejemplo. Un cultivo tiene inicialmente una cantidad N_0 de bacterias. Para t=1 hora, el numero de bacterias, medido es (3/2) N_0. Si la rapidez de multiplicación es proporcional al numero de bacterias presentes, determine el tiempo necesario para que el número de bacterias se triplique.

Primero se resuelve la ecuación diferencial

$$\frac{dN}{dt} = kN$$

sujeta a $N(0)=N_0$

cuando la ecuación se lleva a la forma

$$\frac{dN}{dt} - kN = 0$$

es posible ver, mediante un examen, que el factor integrante es e^{-kt}. Multiplicando ambos miembros de la ecuación por este termino, de inmediato resulta

$$\frac{d}{dt}\left[e^{-kt} N\right] = 0$$

integrando ambos miembros de la ultima ecuación

$$e^{-kt}N = C \text{ ó } N(t) = Ce^{kt}$$

Para t=0 se deduce que $N_0=Ce^0=C$ y por lo tanto $N(t)=N_0e^{kt}$. Para t=1 se tiene

$$\frac{3}{2}N_0 = N_0e^k \text{ ó } e^k = \frac{3}{2}$$

de donde se obtiene

$$k = \ln\left(\frac{3}{2}\right) = 0.4055$$

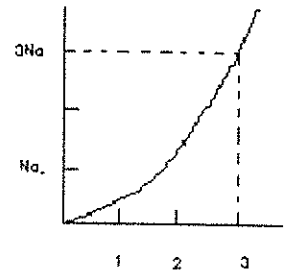
en consecuencia

$$N(t) = N_0e^{0.4055}$$

Para determinar el valor de t para el que las bacterias se multiplican, despejamos t de

$$3N_0 = N_0e^{0.4055t}$$

se deduce que



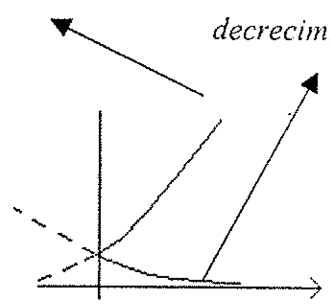
$$0.4055 = \ln 3$$

$$t = \frac{\ln 3}{0.4055} \approx 2.71 horas$$

Como se muestra en la siguiente figura, para k>o la función exponencial e^{kt} crece cuando t crece; y si k<0, decrece cuando t crece. Así, los problemas que describen crecimiento, como el de una población, numero de bacterias, e incluso capital, se caracterizan por un valor positivo de k, mientras que los problemas que involucran decrecimiento, como la desintegración radiactiva, darán un valor negativo de k.

$e^{kt}, k > 0$ $\quad$ $e^{kt}, k < 0$

crecimiento $\quad$ *decrecimiento*



t

En física se llama semivida o vida media a una medida de la estabilidad de una sustancia radiactiva. La semivida es simplemente el tiempo necesario para que se desintegran la mitad de los átomos de una cantidad inicial A_0. Cuanto mas larga es la semivida de una sustancia, tanto mas estable es. Por ejemplo, la semivida del radio altamente radiactivo es aproximadamente de 1,700años, mientras que el isótopo de uranio que mas comúnmente aparece, el U-238, tiene una semivida de cerca de 4,500,000,000años.

Ejemplo. Un reactor transforma el uranio 238 en el isótopo plutonio 239. Despues de 15años se determina que 0.043% de la cantidad inicial A_0 de plutonio se ha desintegrado. Determine la semivida de este isótopo si la rapidez de desintegración es proporcional a la cantidad restante.

Sea A(t) la cantidad de plutonio que queda en un instante cualquiera. La solución del problema de valor inicial

$$\frac{dA}{dt} = kA$$

$$A(0) = A_0$$

es

$$A(t) = A_0 e^{kt}$$

si 0.043% de los átomos se han desintegrado, queda 99.957% de la sustancia. Para evaluar se debe resolver

$$0.99957 A_0 = A_0 e^{15k}$$

por lo tanto

$$e^{15k} = 0.99957$$
$$15k = \ln(0.99957)$$
$$k = \frac{\ln(0.99957)}{15}$$
$$k = -0.00002867$$

de modo que

$$A(t) = A_0 e^{-0.00002867t}$$

ahora bien, la semivida es el valor de t para el cual $A(t)=A_0/2$. Despejando t resulta

$$\frac{A_0}{2} = A_0 e^{-0.00002867t}$$
$$\frac{1}{2} = e^{-0.00002867t}$$
$$-0.00002867t = -\ln 2$$
$$t = \frac{\ln 2}{0.00002867}$$
$$t \approx 24180 años$$

Alrededor de 1950, el químico Willard Libby ideo un método en le cual se usa carbono radiactivo para determinar la edad aproximada de los fósiles. La teoría se basa en que el isótopo carbono 14 se produce en la atmósfera por la acción de la radiación cósmica sobre el nitrógeno. El cociente de la cantidad de C-14 y la cantidad del carbono ordinario presentes en la atmósfera es constante, y en consecuencia, la proporción de isótopo presente en todos los organismos vivos es la misma que en la atmósfera. Cuando un organismo muere, la absorción de C-14 cesa. Así, comparando la proporción constante encontrada en la atmósfera es posible obtener una estimación razonable de su edad. El método se basa en que la semivida del C-14radiactivo es de aproximadamente 5,600años.

Ejemplo. Se ha encontrado que un hueso fosilizado contiene 1/1000 de la cantidad original de C-14. Determinar la edad del fósil.

Nuevamente, el punto de partida es

$A(t)=A_0e^{kt}$

cuando t=5600años, $A(t)=A_0/2$, de lo cual es posible determinar el valor de k, como sigue:

$$\frac{A_0}{2} = A_0 e^{5600k}$$
$$5600k = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2$$
$$k = -\frac{\ln 2}{5600} = -0.00012378$$

por lo tanto

$$A(t) = A_0 e^{-0.00012378t}$$

cuando $A(t)=A_0/1000$ se tiene que

$$\frac{A_0}{1000} = A_0 e^{-0.00012378t}$$
$$-0.00012378t = -\ln 1000$$
$$t = \frac{\ln 1000}{0.00012378} \approx 55{,}800 años$$

II.3. Ley de Newton del Enfriamiento.

La ley de Newton del enfriamiento dice que un cuerpo que se esta enfriando, la rapidez con la que la temperatura $T(t)$ cambia es proporcional a la diferencia entre la temperatura del cuerpo y la temperatura constante T_0 del medio que lo rodea. Esto es

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_0)$$

en donde k es una constante de proporcionalidad.

Sea t el tiempo en minutos y T(t) la temperatura en grados Fahrenheit en el tiempo t. La ecuación diferencial que gobierna viene de la ley de enfriamiento

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - To)$$

De la descripción del problema, la temperatura ambiente es de 70^{o} , $T_o = 70$. No sólo se percibe la temperatura inicial, también se dá la temperatura a los 10 minutos

$100 = T(10)$ cuando $T(0) = 120$

Hay que determinar k , para el flujo de energía térmica de la tasa de café a la oficina. La solución del problema de valor inicial es :

$$T = T_o + (T(0) - T_o)\, e^{-kt}$$

$$T = 70 + 50\, e^{-kt}$$

No se conoce la constante de la proporcionalidad k, por lo que se debe determinar a partir de la última ecuación uasando la temperatura dada a los 10 minutos

$$T(10) = 100 = 70 + 50\, e^{-10t}$$

Resolbiendo al ecuación se obtiene

$$e^{-10k} = \frac{3}{5} \qquad \text{ó} \qquad k = \frac{\ln(\frac{3}{5})}{-10} \approx 0.05$$

Ahora se trata de determinar la temperatura inicial si se quiere T(20) = 100

$$10\,0 = T(20) = 70 + e^{2\ln\frac{3}{5}}\left[T(o) - 70\right]$$

o sea

$$30 = \frac{9}{25}\left[T(o) - 70\right]$$

Por último, despejando la temperatura deseada T(0) de esta ecuación se obtiene

$$T(o) = 70 + \frac{30.5}{9} \approx 153.33^{o}\,F$$

II. 4. Trayectorias Ortogonales.

Definición : Dos curvas C1 y C2 se dice que son ortogonales en un punto, si y solo si sus tangentes son perpendiculares en el punto.

Ya que $C_1 = \frac{y}{x^3}$

Ahora bien, derivando implícitamente $x^2 + 3y^2 = C_2$ conduce a la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{3y}$$

consecuentemente, en el punto (x,y) sobre ambas curvas

Como las pendientes de las tangentes son , cada una, la recíproca de la otra , las curvas C_1 y C_2 se intersectan de manera ortogonal.

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)C_1\left(\frac{dy}{dx}\right)C_2 = \left(\frac{3y}{x}\right)\left(-\frac{x}{3y}\right) = -1$$

<u>Definición :</u> Cuando todas las curvas de una familia de curvas $G(x,y,C_1) = 0$ cortan ortogonalmente a otra familia de curvas $H(x,y,C_2) = 0$, se dice que las familias son, cada una, trayectorias ortogonales de la otra.

Para encontrar las trayectorias ortogonales de ina familia de curvas dadas, se halla en primer lugar la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

que describe a la familia. la ecuación diferencial de la segunda familia ortogonal, ortogonal a la familia dada, es

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{f(x, y)}$$

<u>Ejemplo:</u> Hallar las trayectorias ortogonales de la familia de hipérbolas rectangulares

$$y = \frac{C_1}{x}$$

la derivada de $\quad y = \dfrac{C_1}{x} \quad$ es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-C_1}{x^2}$$

Reemplazando C_1 por $C_1 = xy$ se obtiene la ecuación diferencial de la familia dada:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$$

En tal caso, la ecuación diferencial de la familia ortogonal es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\frac{-y}{x}} = \frac{}{y}$$

Se resuelbe esta última ecuación por separación de variables:

$y\,dy = x\,dx$

$$\int y dy = \int x dx + C_2'$$

$$\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + C_2'$$

ó bién

$$y^2 - x^2 = C_2$$

con $C_2 = 2C_2'$

<u>Ejemplo</u>. Obtener las trayectorias ortogonales de:

$$y = \frac{C_1 x}{1+}$$

Por la regla del cosiente se tiene:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{C_1}{(1+x)^2} \qquad \text{ó} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x(1+x)}$$

ya que $C_1 = \frac{y(1+x)}{x}$ la ecuación diferencial de las trayectorias ortogonales es

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x(1+x)}{y}$$

nuevamente por separación de variables, se tiene

$y\,dy = -x(1+x)$

$$\int y\,dy = -\int (x + x^2)\,dx$$

$$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + C_2'$$

$$3y^2 + 3x^2 + 2x^3 = C_2$$

EJERCICIOS

1.- Una fem de $E_o \cos(wt)$ voltios, donde E_o, w son constantes, se aplica en $t = 0$ a un circuito en serie consistente de R ohmios y C faradios, donde R y C son constantes. Si $q = 0$ en $t = 0$, muestre que la carga en $t > 0$ es

$$q = \frac{CE_o}{R^2C^2w^2 + 1}\left[\cos(wt) + wRC\,\mathrm{sen}(wt) - e^{\frac{-t}{RC}}\right]$$

2.- Un circuito consistente de una resistencia constante de r ohmios en serie con una fem constante de E voltios y una inductancia constante de L herios. Si la corriente inicial es cero, muestre que la corriente crece a la mitad de su valor teórrico máximo en $(L \ln 2)/R$ segundos.

3.- Demuestre en forma general que la vida de una sustancia radioactiva es

$$\frac{(t_2 - t_1)\ln 2}{\ln\left(\frac{A_1}{A_2}\right)}$$

desde $A_1 = A(t_1)$ y $A_2 = A(t_2)$, $t_1 < t_2$.

4.- inicialmente había 100 miligramos presentes de una sustancia radioactiva. Después de seis horas la masa disminuyó en 3%. Si la rapidez de esintegración es, en un instante cualquiera, proporcioal a lacantidad de sutancia presente en dicho instante, encuentre la cantidad que s e queda en 24 horas.

5.- Un termómetro se saca de una habitación, donde la temperatura del aire es de 70 ^{o}F, al exterior donde la temperatura es de 10 ^{o}F, después de ½ minuto el termómetro marca 50 ^{o} F ¿Cuánto marca el termómetro después de t = 1 minuto? ¿Cuánto tiempo demorará el termómetro en alcanzar los 15 ^{o} F?; 36.67 ^{o} F,3.06 minutos.

6.- cuando un objeto absorve el calor medio que lo rodea se obtiene también la fórmula de Newton. Una pequeña barra de metal, cuya temperatura inicial es de 20 ^{o} C, se deja caer en un recipiente con agua hirviendo. Calcule el tiempo que dicha barra edmorará en alcanzar los 90 ^{o} C, si se sabe que su temperatura aumentó 2 ^{o} C en 1 segundo ¿Cuánto demorará la barra en alcanzar los 98 ^{o}C?

7.- Determine las trayectorias ortogonales de:

a) $x^p + cy^p = 1,$ $\qquad y^2 = \dfrac{2x^{2-p}}{2-p} - x^2 +$ $\qquad$ si $p \neq 2$

$\qquad e^{x^2+y^2} = k x^2$ $\qquad$ si $p = 2$

b) $x^2 + cxy + y^2 = 1,$ $\qquad x^2 - y^2 = k e$ [illegible]

8.- Encuentre las trayectorias ortogonales de la familia $y = x + ce^{-x}$ y determine aquel miembro particular de cada familia que pasa por (0,3);

$y = x + 3e^{-x}, x - y + 2 + e^{3-y} =$

9.- Encuentre la constante para que las familias $y^3 = C_1$ y $x^2 + ay^2 = C^2$ sean ortogonales; $a = \frac{1}{3}$

RESPUESTAS

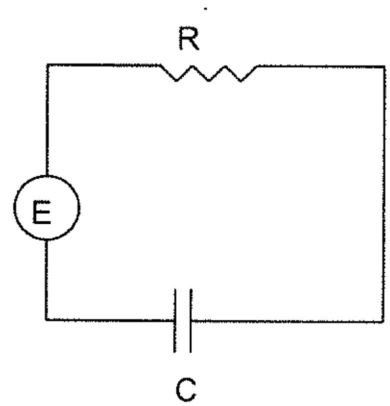
Tarea # 2

1.- Una fem de $E_o \cos(wt)$ voltios, donde E_o, w son constantes, se aplica en $t = 0$ a un circuito en serie consistente de R ohmios y C faradios, donde R y C son constantes. Si $q = 0$ en $t = 0$, muestre que la carga en $t > 0$ es

$$q = \frac{CE_o}{R^2C^2w^2 + 1}\left[\cos(wt) + wRC\,\mathrm{sen}(wt) - e^{\frac{-t}{RC}}\right]$$

SOLUCION.

El circuito es:



y la ecuación diferencial es

$$R\frac{dq}{dt}+\frac{q}{c}=E_o\cos(wt)$$

$$\frac{dq}{dt}+\frac{q}{RC}=\frac{E_o\cos(wt)}{R}$$

cuyo factor integrante es:

$$e^{\int\frac{dt}{RC}}=e^{\frac{t}{RC}}$$

Entonces

$$e^{\frac{t}{RC}}\frac{dq}{dt}+\frac{q\,e^{\frac{t}{RC}}}{RC}=\frac{E_o\cos(wt)e^{\frac{t}{RC}}}{R}$$

$$D_t\left[qe^{\frac{t}{RC}}\right]=\frac{E_o\cos(wt)e^{\frac{t}{RC}}}{R}$$

$$qe^{\frac{t}{RC}}=\int\frac{E_o\cos(wt)e^{\frac{t}{RC}}}{R}dt+c$$

con c la constante de integración. Calculamos la integral por separado. Haciendo la integración por partes:

$$\int\frac{E_o\cos(wt)e^{\frac{t}{RC}}}{R}dt=\frac{E_o}{R}\int\cos(wt)e^{\frac{t}{RC}}dt$$

$$u=\cos(wt)$$

$$d\,v = e^{\frac{t}{RC}}d$$

$$d\,u = -w\,\mathrm{sen}(w\,t)d$$

$$v = RCe^{\frac{t}{RC}}$$

$$= E_oC\cos(wt)e^{\frac{t}{RC}} + \int E_oCw\,\mathrm{sen}(wt)e^{\frac{t}{RC}}dt$$

$$= E_oC\cos(wt)e^{\frac{t}{RC}} + E_oCw\int \mathrm{sen}(wt)e^{\frac{t}{RC}}dt$$

volviendo a integrar por partes con

$$u = \mathrm{sen}(w\,t)$$

$$d\,v = e^{\frac{t}{RC}}d$$

$$d\,u = w\cos(w\,t)d$$

$$v = RCe^{\frac{t}{RC}}$$

se tiene

$$\frac{E_o}{R}\int \cos(wt)e^{\frac{t}{RC}}dt =$$

$$E_oC\cos(wt)e^{\frac{t}{RC}} + E_oCw\left[RC\,\mathrm{sen}(wt)e^{\frac{t}{RC}} - \int RCw\cos(wt)e^{\frac{t}{RC}}dt\right]$$

$$= E_oC\cos(wt)e^{\frac{t}{RC}} + E_oRC^2w\,\mathrm{sen}(wt)e^{\frac{t}{RC}} - E_oRC^2w^2\int \cos(wt)e^{\frac{t}{RC}}dt$$

Por lo tanto

$$\frac{E_o}{R}\int \cos(wt)e^{\frac{t}{RC}}dt + E_oRC^2w^2\int \cos(wt)e^{\frac{t}{RC}}dt$$

$$= E_oC\cos(w\,t)e^{\frac{t}{RC}} + E_oRw\,C^2\mathrm{sen}(w\,t)e^{\frac{t}{RC}}$$

$$\left[\int \cos(wt)e^{\frac{t}{RC}}dt\right]\left[\frac{E_o}{R}E_oRC^2w^2\right]$$

$$= E_oC\cos(wt)e^{\frac{t}{RC}} + E_oRwC^2\text{sen}(wt)e^{\frac{t}{RC}}$$

$$\int \cos(wt)e^{\frac{t}{RC}}dt = \frac{E_oC\cos(wt)e^{\frac{t}{RC}} + E_oRwC^2\,\text{sen}(wt)e^{\frac{t}{RC}}}{\frac{E_o}{R} + E_oRC^2w^2}$$

$$= \frac{C\cos(wt)e^{\frac{t}{RC}} + RwC^2\text{sen}(wt)e^{\frac{t}{RC}}}{\frac{1+R^2C^2w^2}{R}}$$

$$= \frac{RC\cos(wt)e^{\frac{t}{RC}} + R^2wC^2\text{sen}(wt)e^{\frac{t}{RC}}}{1+R^2C^2w^2}$$

Sustituyendo este valor en la soluicíón a la ecuación diferencial, obtenemos:

$$qe^{\frac{t}{RC}} = \frac{E_o}{R}\left[\frac{RC\cos(wt)e^{\frac{t}{RC}} + R^2wC^2\,\text{sen}(wt)e^{\frac{t}{RC}}}{1+R^2C^2w^2}\right] + c$$

entonces

$$q = \frac{E_oC\cos(wt) + E_oRwC^2\text{sen}(wt)}{1+R^2C^2w^2} + ce^{\frac{t}{RC}}$$

Ahora como $q = 0$ cuando $t = 0$obtenemos:

$$0 = \frac{E_oC}{1+R^2C^2w^2} + c$$

por lo tanto $c = -\dfrac{E_oC}{1+R^2C^2w^2}$

Así la solución buscada es:

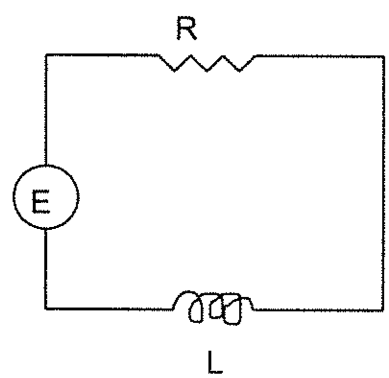
$$q = \frac{E_o C \cos(w\,t) + E_o R w\, C^2 \operatorname{sen}(w\,t) - E_o C e^{-\frac{t}{RC}}}{1 + R^2 C^2 w^2}$$

$$= \frac{CE_o}{R^2C^2w^2+1}\left[\cos(wt) + wRC\operatorname{sen}(wt) - e^{\frac{t}{RC}}\right]$$

2.- Un circuito consistente de una resistencia constante de r ohmios en serie con una fem constante de E voltios y una inductancia constante de L herios. Si la corriente inicial es cero, muestre que la corriente crece a la mitad de su valor teórrico máximo en (L ln 2) / R segundos.

SOLUCION.

El circuito es:



y la ecuación diferencial:

$$L\frac{d\,i}{d\,t} + Ri = E$$

$$\frac{d\,i}{d\,t} + \frac{Ri}{l} = \frac{E}{L}$$

con factor integrante

$$e^{\int \frac{R}{L}dt} = e^{\frac{Rt}{L}}$$

Entonces

$$e^{\frac{Rt}{L}}\frac{di}{dt}+\frac{Rie^{\frac{Rt}{L}}}{L}=\frac{E}{L}e^{\frac{Rt}{L}}$$

$$D_t\left[ie^{\frac{Rt}{L}}\right]=\frac{E}{L}e^{\frac{Rt}{L}}$$

Integrando

$$ie^{\frac{Rt}{L}}=\frac{E}{L}\int e^{\frac{Rt}{L}}dt+c$$

$$ie^{\frac{Rt}{L}}=\frac{E}{L}\frac{L}{R}e^{\frac{Rt}{L}}+c$$

$$ie^{\frac{Rt}{L}}=\frac{E}{R}e^{\frac{Rt}{L}}+c$$

por lo tanto

$$i=\frac{E}{R}+c$$

como i=0 cuando t=0 entonces

$$0=\frac{E}{R}+c$$

$$\therefore c=-\frac{E}{R}$$

Así

$$i=\frac{E}{R}-\frac{E}{R}e^{-\frac{Rt}{L}}$$

Unidad IV. Ecuaciones diferenciales lineales y de orden superior.

IV.1 Problemas de valor inicial y teorema de existencia y unicidad.

<u>Definición</u>. Un problema de valor inicial para una ecuación diferencial lineal de orden n es

Resolver: $$a_n(x)\,\frac{d^ny}{dx^n} + a_{n-1}(x)\,\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x)\,\frac{dy}{dx} + a_0\,(x)y = g(x)$$

Sujeta a: $$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0',\dots,\ y^{(n-1)}\,(x_0)= y_0^{(n-1)}$$

en donde y_0, y_0', ... , $y_0^{(n-1)}$ son constantes arbitrarias.
Se busca una solución en algún intervalo I que contenga al punto $x=x_0$.

<u>Ejemplo</u>: Verificar que $y=3e^{2x} + e^{2x} - 3x$ es una solución del problema de valor inicial

$$y^4 - 4y = 12x$$
$$y(_0) = 4$$
$$y'(_0) =1$$

Como $y'= 6e^{2x} - 2e^{-2x} - 3$ entonces $y'' = 12e^{2x} + 4e^{-2x} - 4y = -12e$

Sumando las ecuaciones se obtiene $y'' - 4y = 12x$

Por otro lado como

$$y(_0) = 3e^0 + e^{\,0} = 4$$
$$y'(_0) = 6e^0 - 2e^0 - 3 = 0$$

se tiene que $y = 3e^{2x} + e^{-2x} - 3x$ es una solución al problema de valor inicial.

<u>Ejemplo.</u> Verificar que la función $y = cx^2 + x + 3$ es una solución del problema de valor inicial.

$$x^2y'' - 2xy' + 2y = 6$$
$$y(_0) = 3$$
$$y'(_0) = 1$$

en el intervalo $-\infty < x < \infty$ para cualquier valor del parámetro c.

Como $y' = 2cx + 1$ y $y'' = 2c$ se tiene que

$$\begin{aligned} x^2y'' - 2xy' + 2y &= x^2(2c) - 2x\,(2cx+1) + 2\,(cx^2+x+3) \\ &= 2cx^2 - 4cx^2 - 2x + 2cx^2 + 2x + 6 = 6 \end{aligned}$$

Además

$$y(_0) = c(0)^2 + 0 + 3 = 3$$
$$y'(_0) = 2c(_0) + 1 = 1$$

El siguiente teorema da condiciones suficientes parta la existencia de una solución única de un problema de valor inicial.

Teorema (Teorema de existencia y unidad). Sean $a_n(x)$, $a_{n-1}(x)$, ... , $a_1(x)$, $a_0(x)$ y $g(x)$ continuas en un intervalo I y sea $a_n(x) \neq 0$ para toda x en ese intervalo. Si $x=x_0$ es cualquier punto de este intervalo, entonces existe una solución $y_{(x)}$ del problema de valor inicial en el intervalo, y la solución es única.

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0',\ \ldots,\ y^{n-1}(x_0) = y_0^{\ n-1}$$

Ejemplo. Encuentre un intervalo en tero a x= 0 en el cual el problema de valor inicial

$$(x-2)\,y'' + 3y = x$$
$$y(0) = 0$$
$$y'(0) = 1$$

tenga una solución única.

Como x-2 tiene que ser diferente de cero, se necesita que el intervalo sea (-2, 2).

IV.2 Dependencia e independencia lineal

Definición. Se dice que es un conjunto de funciones $f_1(x)$, $f_2(x)$ es linealmente dependiente en un intervalo I si existen constantes c_1, c_2, ..., c_n, no todas nulas tales que

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + ... + c_n f_n(x) = 0$$

para toda x en el intervalo. Un conjunto de funciones $f_1(x)$, $f_2(x)$,..., $f_n(x)$ es linealmente independiente en un intervalo si las únicas constantes para las cuales

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + ... + c_n f_n(x) = 0$$

para toda x en el intervalo, son $c_1 = c_2 = ... = c_n = 0$

Observación. Dos funciones son linealmente dependientes si y solo si una es múltiplo constante de la otra en un intervalo.

Demostración. Si las funciones $f_1(x)$ y $f_2(x)$ son linealmente dependientes en un intervalo, entonces existen constantes c_1 y c_2, no siendo ambas nulas, tales que pera todo x del intervalo

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) = 0$$

Por lo tanto, si se supone que $c_1 \neq 0$, se infiere que

$$f_1(x) = -\frac{c_2}{c_1} f_2(x)$$

Recíprocamente si para alguna constante c_2 se tiene que $f_1(x) = c_2 f_2(x)$, entonces

$$(-1) f_1(x) + c_2 f_2(x) = 0$$

para todo x en algún intervalo. Por lo tanto, las funciones son linealmente dependientes puesto que al menos una de las constantes (a saber, c_1=-1) no es nula.

Ejemplo. Las funciones $f_1(x)$ = sen 2x y $f_2(x)$ = sen x cos x son linealmente dependientes en el intervalo $-\infty < x < +\infty$ puesto que

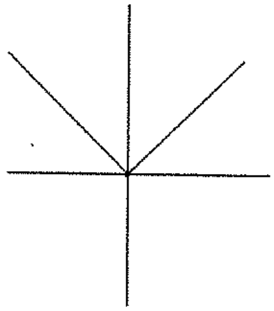
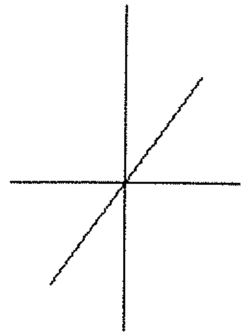
$$c_1 \text{ sen } 2x + c2 \text{ sen } x \cos x = 0$$

se satisface para toda x real si elegimos $c_1 = ½$ y $c_2 = -1$.

Ejemplo. Las funciones $f_1(x) = x$ y $f_2(x) = |x|$ son linealmente independientes en el intervalo $-\infty < x < +\infty$. Un examen cuidadoso de las gráficas de f_1 y f_2 debería convencer al lector de que ninguna de las dos funciones es un múltiplo constante de la otra. Para traer

$$c_1 x + c_2|x| = 0$$

para toda x real, debemos elegir c_1=0 y c_2 =0

El intervalo en el cual las funciones están definidas es importante en las consideraciones sobre dependencia e independencia lineal. Las funciones $f_1(x) = x$ y $f_2 = |x|$ son linealmente dependientes en el intervalo $0 < x < \propto$

<u>Ejemplo</u>. Las funciones sen x, sen $(x + \pi/8)$, sen $(x - \pi/8)$ son linealmente dependientes en el intervalo $(-\infty,+\infty)$.

Esto es consecuencia de la relación evidente

$$\text{sen}\,(x + \pi/8) + \text{sen}\,(x - \pi/8) - 2\cos \pi/8 \,\text{sen}\, x = 0$$

Aquí, $c_1 = 1$, $c_2 = 1$ y $c_3 = -2\cos \pi/8$

<u>Definición.</u> A una ecuación diferencial lineal de orden n de la forma:

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0$$

se le llama homogénea es tanto que a

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

en donde g(x) no es identicamente nula, recibe el nombre de homogénea.

<u>Teorema.</u> (Prinicpio de superposición). Sean $y_1, \ldots, y_k$ soluciones de la ecuación diferencial lineal homogénea de orden n en un intervalo I. Entonces la combinación lineal

$$y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \ldots + c_ky_k(x)$$

en donde los c_i, $i = 1,2,\ldots, k$ son constantes arbitrarias, también es una solución en el intervalo.

Demostración. Se realizará la demostración para n=2 y k=3 Sean $y_1(x)$, $y_2(x)$ y $y_3(x)$ soluciones n =2 y k=3. Sean $y_1(x)$, $y_2(x)$ y $y_3(x)$ soluciones de

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

Si se define $y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + c_3y_3(x)$ entonces

$$a_2(x)\,[\,c_1y_1'' + c_2y_2'' + c_3y_3''\,] + a_1(x)\,[c_1y_1' + c_2y_2' + c_3y_3'] + a_0(x)\,[c_1y_1 + c_2y_2 + c_3y\,]$$
$$= c_1\,[a_2(x)y_1'' + a_1(x)y_1' + a_0(x)y_1 + a_0\,(x)y_1\,] + c_2\,[\,a_2(x)y_2'' + a_1(x)y_2' + a_0(x)y_2\,]$$
$$+ c_3\,[\,a_2(x)y_3'' + a_1(x)y_3' + a_0\,(x)\,y_3\,]$$
$$= c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 + c_3 \cdot 0 = 0$$

Ejemplo. Las funciones $y_1 = x^2$ y $y_2 = x^2 \ln x$ son soluciones de la ecuación homogénea de tercer orden

$$x^3y''' - 2xy' + 4y = 0$$

en el intervalo $0 < x < \infty$. Por el principio de superposición, la combinación lineal

$$y = c_1x^2 + c_2x^2 \ln x$$

también es una solución de la ecuación en el intervalo.

Teorema. Existen n soluciones de

$$a_n(x)y^{(n)} + \ldots + a_0\,(x)y = 0$$

linealmente independientes en I.

Demostración. Sea x_0 un punto en I. De acuerdo con el teorema de existencia y unicidad, existen n soluciones $\theta_1, \ldots, \theta_n$ de la ecuación diferencial, que además satisfacen las condiciones

$$\theta_1(x_0) = 1\,,\ \theta_1'(x_0) = 0, \ldots, \theta_1^{(n-1)}(x_0) = 0$$
$$\theta_2(x_0) = 0\,,\ \theta_2'(x_0) = 1, \ldots, \theta_2^{(n-1)}(x_0) = 0$$
$$\vdots$$
$$\theta_n(x_0) = 0\,,\ \theta_n'(x_0) = 1, \ldots, \theta_n^{(n-1)}(x_0) = 0$$

Las soluciones $\theta_1, \ldots, \theta_2$ son l.i. en I; para demostrarlo, supongamos que existen ciertas constantes $c_1, \ldots, c_n$, tales que

$$c_1\theta_1(x) + \ldots + c_n\theta_n(x) = 0$$

para toda x en I. Derivando, vemos que

$$c_1\theta_1'(x) + \ldots + c_n\theta_n'(x) = 0$$
$$c_1\theta_1''(x) + \ldots + c_n\theta_n''(x) = 0$$
$$\vdots$$
$$c_1\theta_1(n-1)(x) + \ldots + c_n\theta_n(n-1)(x) = 0$$

para toda x en I. En particular se deben cumplir en x_0. Sustituyendo $x = x_0$, vemos que

$$
\begin{aligned}
c_1 * 1 + 0 + \dots + 0 &= 0 \\
0 + c_2 * 1 + \dots + 0 &= 0 \\
\vdots \qquad\qquad & \vdots \\
0 + 0 + \dots + c_n * 1 &= 0
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$. Por lo que concluimos que las soluciones $\theta_1, \dots, \theta_n$ son linealmente independientes.

Teorema. Sean $\theta_1, \dots, \theta_n$, las n soluciones de

$$a_n(x)y^n + \dots + a_0(x)y = 0$$

definidas en I, que además satisfacen las condiciones

$$
\begin{aligned}
&\theta_1(x_0) = 1,\ \theta_1'(x_0) = 0, \dots, \theta_1^{(n-1)}(x_0) = 0 \\
&\theta_2(x_0) = 0,\ \theta_2'(x_0) = 1, \dots, \theta_2^{(n-1)}(x_0) = 0 \\
&\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\
&\theta_n(x_0) = 0,\ \theta_n'(x_0) = 1, \dots, \theta_n^{(n-1)}(x_0) = 0
\end{aligned}
$$

Si θ es cualquier solución de la ecuación diferencial, entonces existen n constantes $c_1, \dots c_n$, tales que

$$\theta = c_1\theta_1 + \dots + c_n\theta_n$$

Demostración. Sean

$$\theta(x_0) = \alpha_1,\ \theta'(x_0) = \alpha_2, \dots, \theta^{(n-1)}(x_0) = \alpha_n$$

y consideremos la función

$$\psi = \alpha_1\theta_1 + \alpha_2\theta_2 + \alpha_n\theta_n$$

Que es una solución de la ecuación diferencial y es claro que

$$
\begin{aligned}
&\psi(x_0) = \alpha_1\theta_1(x_0) + \alpha_2\theta_2(x_0) + \dots + \alpha_n\theta_n(x_0) = \alpha_1 \\
&\psi'(x_0) = \alpha_1\theta_1'(x_0) + \alpha_2\theta_2'(x_0) + \dots + \alpha_n\theta_n'(x_0) = \alpha_2 \\
&\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\
&\psi_{(n-1)}(x_0) = \alpha_1\theta_{1\,(n-1)}(x_0) + \alpha_2\theta_{2\,(n-1)}(x_0) + \dots + \alpha_n\theta_{n\,(n-1)}(x_0) = \alpha_2
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, ψ es una solución de la ecuación diferencial, que tiene las mismas condiciones iniciales en x_0 que θ. Por el teorema de existencia y unidad, debemos tener $\theta = \psi$, esto es

$$\theta = \alpha_1\theta_1 + \alpha_2\theta_2 + \dots + \alpha_n\theta_n$$

IV.3. Wronskiano e independencia lineal

Definición. El Wronskiano $W(\theta_1, \dots, \theta_n)$ de cualesquiera n soluciones $\theta_1, \dots, \theta_n$ se define de la siguiente manera:

$$\begin{matrix} \theta_1 & \theta_2 & \theta_n \\ \theta_1' & \theta_2' & \theta_n' \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \theta_1(n-1) & \theta_2(n-1) & \theta_n(n-1) \end{matrix}$$

Teorema. Si $\theta_1 \dots \theta_n$ son n soluciones de la ecuación diferencial, definidas en un intervalo I, éstas son linealmente independientes en dicho intervalo si, y solo si

$$W(\theta_1, \dots, \theta_n)(x) \neq 0 \text{ para toda x en I}$$

Demostración. Primero supongamos que $W(\theta_1, \dots \theta_n)(x) \neq 0$ para toda x en I. Si existen ciertas constantes $c_1, \dots c_n$ tales que

$$c_1\theta_1(x) + \dots + c_n\theta_n(x) = 0$$

para toda x en I, entonces es obvio que

$$\begin{matrix} c_1\theta_1'(x) + \dots + c_n\theta_n'(x) = 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ c_1\theta_1(n-1)(x) + \dots + c_n\theta_n(n-1)(x) = 0 \end{matrix}$$

para toda x en I. Para una x fija en I, las ecuaciones anteriores son ecuaciones lineales homogéneas, satisfechas por $c_1 \dots c_n$. El determinante de los coeficientes es precisamente $W(\theta_1, \dots, \theta_n)(x)$, el cual es diferente de cero. Por consiguiente, la única solución de este sistema es:

$$c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$$

Esto demuestra que $\theta_1, \dots, \theta_n$ son l.i. en I.
Recíprocamente, supongamos que $\theta_1, \dots, \theta_n$ son l.i. en I. Supongamos que existe una x_o en I tal que

$$W(\theta_1, \dots, \theta_n)(x_o) = 0$$

Entonces esto implica que el sistema de n ecuaciones lineales

$$\begin{matrix} c_1\theta_1'(x) + \dots + c_n\theta_n'(x) = 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ c_1\theta_1(n-1)(x) + \dots + c_n\theta_n(n-1)(x) = 0 \end{matrix}$$

tiene una solución $c_1, \dots, c_n$, donde no todas las constantes $c_1, \dots, c_n$ son nulas. Sea $c_1, \dots c_n$ dicha solución y analizaremos la función

$$\psi = c_1\theta_1 + \ldots + c_n\theta_n$$

Ahora ψ es una solución de la ecuación diferencial y de acuerdo con las ecuaciones diferenciales vemos que:

$$\psi\,(x_0) = 0 \qquad \psi'(x_0) = 0 \qquad \psi^{(n-1)}\,(x_o) = 0$$

Por el teorema de existencia y unidad, se sigue que $\psi(x) = 0$ para toda x en I, y así

$$c_1\theta_1\,(x) + \ldots + c_n\theta_n\,(x) = 0$$

para toda x en I. Pero esto contradice al hecho de que $\theta_1, \ldots, \theta_n$ sea l.i. en I. Así, la hipótesis de que había un punto x_0 en I, para el cual

$$W(\theta_1,\ldots,\theta_n)\,(x_0) = 0$$

debe ser falsa. En consecuencia, hemos demostrado que

$$W(\theta_1,\ldots,\theta_n)\,(x) \neq 0 \text{ para toda x en I}$$

Ejemplo. Para

$$f_1(x) = e^{w1x}, f_1(x) = e^{w2x}, w_1 \neq w_2$$

$$w(e^{w1x}, e^{w2x}) = \begin{vmatrix} e^{w1x} & e^{w2x} \\ w_1e^{w1x} & w_2e^{w2x} \end{vmatrix} = (w_2 - w_1)e^{(w_1+w_2)x} \neq 0$$

Para todo valor de x. Por lo tanto f_1, f_2 .son l.i. en R.

Ejemplo. Si α Y β son números re $\beta \neq$ entonces:

$y_1 = e^{ax}\cos\beta x$ y $y_2 = e^{ax}\operatorname{sen}\beta x$ Son linealmente independientes en R.
Puesto que:

$$W(e^{ax}\cos\beta x, e^{ax}\operatorname{sen}\beta x) = \begin{vmatrix} e^{ax}\cos\beta x & e^{ax}\operatorname{sen}\beta x \\ -\beta e^{ax}\operatorname{sen}\beta x + \alpha e^{ax}\cos\beta x & \beta e^{ax}\cos\beta x + \alpha e^{ax}\operatorname{sen}\beta x \end{vmatrix}$$

•

$$= \beta e^{2\alpha x}(\cos^2\beta x + \operatorname{sen}^2\beta x)$$
$$= \beta e^{2\alpha x} \neq 0$$

<u>Ejemplo</u>. Las 3 funciones :

$$f_1(x) = e^x \qquad f_2(x) = x_1 e^x \qquad f_3(x) = x^2 e^x$$

Son linealmente independientes en R puesto que:

$$w(e^x, xe^x, x^2e^x) = \begin{vmatrix} e^x & xe^x & x^2e^x \\ e^x & xe^x + e^x & x^2e^x + 2xe^x \\ e^x & xe^x + 2e^x & x^2e^x + 4xe^x + 2e^x \end{vmatrix}$$

$$= 2e^3 x$$

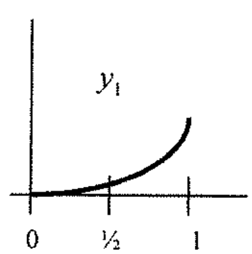
No es cero para ningún valor real de x.

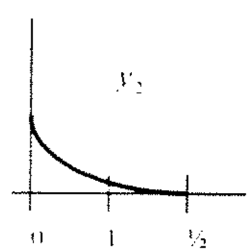
Ejemplo. Examinemos las funciones

$$y_1(x) = \begin{cases} 0, 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ (x - \frac{1}{2})^2, \frac{1}{2} \,\pi\, x \leq 1 \end{cases}$$

$$y_2(x) = \begin{cases} (x - \frac{1}{2})^2, 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 0, \frac{1}{2} \,\pi\, x \leq 1 \end{cases}$$

Sus gráficas tienen la forma que se muestra en la figura





•

Las funciones y_1 y y_2 son l.i , puesto que solamente para:

$c_1 = c_2 = 0$

Se cumple la igualdad

$$c_1 y_1(x) = c_2 y_2(x) = 0$$

En efecto, considerándola en el segmento [0,1/2], obteniendo $c_2 y_2(x) = 0$ de donde $c_2 = 0$,puesto que $y_2(x) \neq 0$;no obstante, en el segmento[1/2,1] se tiene $c_1 y_1(x) = 0$, de donde $c_1 = 0$, puesto que $y_1(x) \neq 0$ en este segmento.

Consideremos el wronskiano del conjunto (y_1, y_2)
En el segmento [0,1/2]

$$w(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} 0 & (x - \frac{1}{2}) \\ 0 & 2(\frac{1}{2} - x)^2 \end{vmatrix} = 0$$

En el segmento [1/2,1]

$$w(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} (x - \frac{1}{2})^2 & 0 \\ 2(\frac{1}{2} - x) & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Por lo tanto $w(y_1, y_2)$ en [0,1].

<u>Definición</u>. Se llama conjunto fundamental de soluciones en un intervalo I a cualquier conjunto

y_1 ,..., y_2 de n soluciones linealmente independientes de la e.d. lineal homogénea de orden n

en el intervalo I.

y_1

•

Definición. Sea $,\ldots, \quad y_n$ un conjunto fundamental de soluciones de la e.d. lineal

homogénea de orden n en un intervalo I, se define como solución general de la ecuación en el intervalo a

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \ldots c_n y_n(x)$$

En donde los c_i son constantes arbitrarias.

Ejemplo. Verifique que las funciones $y_1 = \cos(\ln x)$ $y_2 = \operatorname{sen}(\ln x)$ forman un conjunto

fundamental de soluciones de la e.d. $x^2 y'' + xy' + y = 0$.

Se tiene que y_1 y y_2 porque:

$$w = \begin{vmatrix} \cos(\ln x) & \operatorname{sen}(\ln x) \\ \dfrac{-\operatorname{sen}(\ln x)}{x} & \dfrac{\cos(\ln x)}{x} \end{vmatrix} = \frac{\cos^2(\ln x)}{x} + \frac{\operatorname{sen}^2(\ln x)}{x} = \frac{1}{x}$$

$$w \neq 0$$

Después y_1 y y_2 son soluciones de la e.d. porque:

$$y_1 = \cos(\ln x) \Rightarrow y_1' = \frac{-\operatorname{sen}(\ln x)}{x} \Rightarrow$$

$$y_1'' = \frac{\cos(\ln x) \cdot \frac{1}{x} \cdot - \operatorname{sen}(\ln x) \cdot 1}{x^2}$$

$$= -\frac{\cos(\ln x) - \operatorname{sen}(\ln x)}{x^2}$$

Sustituyendo la e.d.

$$x^2 y'' + xy' + y = -\cos(\ln x) + \operatorname{sen}(\ln x) - \operatorname{sen}(\ln x) + \cos(\ln x) = 0$$

$$\Phi_1, \ldots, \Phi_n, n$$

Teorema. Sean n soluciones de la e.d. lineal homogénea

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\dots a_n(x)y=0$$

En un intervalo I. Y sea X_0 cualquier punto en I. entonces

$$w(\Phi_1,\dots,\Phi_n)(x)=e^{-\int_{x_0}^{x}a_1(t)dt}\,w(\Phi_1,\dots,\Phi_n)(x_0)$$

Demostración. Sea $w(\Phi_1,\dots,\Phi_n)$ .A partir de la definición de W como un determinante, se sigue que:

$$w'=\begin{vmatrix}\Phi_1'\dots\Phi_n'\\ \Phi_1'\dots\Phi_n'\\ \Phi_1''\dots\Phi_n''\\ \bullet\\ \bullet\\ \bullet\\ \Phi_1^{(n-1)}\dots\Phi_n^{(n-1)}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\Phi_1\dots\Phi_n\\ \Phi_1''\dots\Phi_n''\\ \Phi_1''\dots\Phi_n''\\ \bullet\\ \bullet\\ \bullet\\ \Phi^{(n-1)}\dots\Phi_n^{(n-1)}\end{vmatrix}+\dots+\begin{vmatrix}\Phi_1\dots\Phi_n\\ \Phi_1'\dots\Phi_n'\\ \Phi_1''\dots\Phi_n''\\ \bullet\\ \bullet\\ \bullet\\ \Phi^{(n)}\dots\Phi_n^{(n)}\end{vmatrix}$$

Los primeros n-1 determinantes valen cero, por tener cada uno de ellos renglones idénticos como $\Phi_1\dots\Phi_n$ son soluciones de la e.d. homogénea, se tiene lo siguiente:

$$\Phi_i^{(n)}=-a_1\Phi_i^{(n-1)}-\dots-a_n\Phi_1$$

$$i=1,\dots n$$

Y por tanto

$$w' = \begin{vmatrix} \Phi_1 \ldots \Phi_n \\ \Phi_1' \ldots \Phi_n' \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \Phi_1^{(n-2)} \ldots \Phi_n^{(n-2)} \\ -\sum_{i=0}^{(n-1)} a_{n-i}\Phi_1^{(i)} \ldots -\sum_{i=0}^{(n-1)} a_{n-i}\Phi_n^{(i)} \ldots \end{vmatrix}$$

El valor de este determinante no cambia si multiplicamos cualquier renglón por una constante y se lo sumamos al ultimo renglón. Multiplicamos el primer renglón por a_n, el segundo por a_{n-i} ,..., el (n-1) renglón por a_2, y le ponemos todo esto al ultimo renglón, con lo cual obtenemos:

$$w' = \begin{vmatrix} \Phi_1 \ldots \Phi_n \\ \Phi_1' \ldots \Phi_n' \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \Phi_1^{(n-1)} \ldots \Phi_n^{(n-1)} \\ -a_1\Phi_1^{(n-1)} \ldots -a_1\Phi_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = -a_1 w$$

Por consiguiente, W satisface la ecuación lineal de primer orden
$w' + a_1 w = 0$

Y así:

$$w(x) = e^{-\int_{x_0}^{x} a_1(t)dt} w(x_0)$$

Corolario. Si los coeficientes de la e.d. son constantes, entonces

$$w(\Phi_1 \ldots \Phi_n)(x) = e^{-a_1(x-x_0)} w(\Phi_1 \ldots \Phi_n)(x_0)$$

Ejemplo. Consideremos la ecuación

$$y = c_1 e^{0x} + c_2 x e^{0x} + c_3 x^2 e^{0x} + c_4 x^3 e^{0x} + c_5 e^{-x} + c_6 x e$$

IV.4 Coeficientes indeterminados.

Teorema: Sea Yp una solución dada de la ecuación diferencial lineal no homogénea de orden n en un intervalo I

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\dots\dots+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=g(x)$$

Y sea $Y_1,\dots\dots\dots Y_n$ un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación homogénea asociada a la ecuación anterior.
Entonces para cualquier solución Y(x) de la e.d.l.n.h. es posible encontrar constantes $c_1,c_2,\dots\dots\dots c_n$ de modo que:

$$y=c_1y_1(x)+\dots\dots\dots\dots+c_ny_n(x)+y_p(x)$$

Demostración: Supóngase que Y y Yp son soluciones de:

$$a_n(x)y^{(n)}+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\dots\dots+a_1(x)y'+a_0(x)y=g(x)$$

Entonces:

$$a_n(x)[y-y_p]^{(n)}+a_{n-1}(x)[y-y_p]^{(n-1)}+\dots\dots\dots\dots+a_1(x)[y-y_p]'+a_0(x)[y-y_p]=$$

$$[a_n(x)y^{(n)}+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\dots\dots+a_1(x)y'+a_0(x)y]-[a_n(x)y_p^{(n)}+a_{n-1}(x)y_p^{(n-1)}+\dots\dots+a_1(x)y_p'+a_0(x)y_p]$$

.g(x)-g(x)=0

Por lo tanto:

$$y(x)-y_p(x)=c_1y_1(x)+\dots\dots\dots+c_ny_n(x)$$

O bien:

$$y(x)=y_p(x)+c_1y_1(x)+\dots\dots\dots+c_ny_n(x)$$

Definición: Sea Yp una solución dada de la ecuación diferencial lineal no homogénea de orden n y sea:

$$C_1Y_1(x)+\dots\dots\dots+C_nY_n$$

La solución general de la ecuación homogenea. La solución general de la ecuación no homogénea se define como:

$$Y=C_1Y_1(x)+\dots\dots\dots\dots\dots C_nY_n(x)+Y_p(x)$$

A la combinación lineal $C_1Y_1(x)+\dots\dots\dots+C_nY_n$ se le llama función complementaria.

Sea dada la ecuación diferencial

$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \dots\dots\dots + a_ny = f(x)$$

De coeficientes constantes reales $a_0, a_1, \dots\dots\dots, a_n$. La solución general de la ecuación no homogénea es igual a la suma de la solución general de la ecuación homogénea correspondiente y de cualquier solución particular de la solución no homogénea.

La solución general de la ecuación homogénea correspondiente se halla según las reglas expuestas anteriormente.

Por lo tanto el problema de la integración de la e.d. se reduce al problema de la búsqueda de una solución particular Y_p de la solución no homogénea. Cuando los segundos miembros f(x) tienen una forma especial la solución particular puede hallarse con mayor facilidad por el método de coeficientes indeterminados.

Para que sea posible emplear el método de coeficientes indeterminados, el segundo miembro f(x) tiene que tener la forma:

$$f(x) = e^{\alpha x}[P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\operatorname{sen}\beta x]$$

Donde $P_n(x)$ y $Q_m(x)$ son polinomios de grado n y m, respectivamente. En este caso, se busca una solución particular Y_p de la ecuación de la forma:

$$y_p(x) = x^{\Delta}e^{\alpha x}[\tilde{P}_k(x)\cos\beta x + \tilde{Q}_k(x)\operatorname{sen}\beta x]$$

Donde K=max(m,n)

$\tilde{P}_k(x)$

Y

$\tilde{Q}_k(x)$

Son polinomios de grado k, de coeficientes indeterminados, y Δ es el orden de multiplicidad de la raíz del polinomio característico.

Si el segundo miembro f(x) representa una suma:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{l} \alpha_i f_i(x)$$

Donde

$$f_i(x) = e^{\alpha i x}[P_{n,i}(x)\cos\beta ix + Q_{m,i}(x)\operatorname{sen}\beta ix]$$

En virtud del principio de superposición se busca una solución particular Y_p de la e.d. de la forma:

$$Y_p = \sum_{i=1}^{l} \alpha_i Y_{i,p}$$

<u>Ejemplo:</u> Hallar la solución general de la ecuación $y''' - y'' = 12x^2 + 6x$

En este caso

$$f(x)=12x^2+6x=e^{0x}[(12x^2+6x)\cos(0x)+(0)\operatorname{sen}(0x)]$$

Y por lo tanto m=2, n=0, alfa=0 y ß=0. Así K=max(2,0)=2. Para obtener Δ vemos si alfa+iß=0 y la raíz del polinomio característico:

m3-m2=0

Como el numero 0 es raiz de multiplicidad 2, se debe buscar una solución particular de la forma:

$$Y_p(x)=x^2e^{0x}[(A_2x^2+A_1x+A_0)\cos(0x)+(B_2x^2+B_1x+B_0)\operatorname{sen}(0x)]$$

$$=x^2(A_2x^2+A_1x+A_0)$$

$$=A_2x^4+A_1x^3+A_0x^2$$

Sustituyendo la expresión de Yp en la ecuación dada se tiene:

$$24A_2x+6A_1-(12A_2x^2+6A_1x+2A_0)=12x^2+6x$$
$$-12A_2x^2+(24A_2-6A_1)x+6A_1-2A_0=12x^2+6x$$
$$donde$$
$$-12A_2=12$$
$$24A_2-6A_1=6$$
$$6A_1-2A_0=0$$

La solución de este sistema es: A_2=-1, A=-5 y A_0=-15. Por lo tanto:

$$Y_p=-x^4-5x^3-15x^2$$

La solución general de la ecuación dada es:

$$Y=C_1+C_2x+C_3e^x-x^4-5x^3-15x^2$$

<u>Ejemplo:</u> Hallar la solución general de la ecuación:

Y''-6y'+9y=25e^xsenx

En este caso

$$f(x)=25e^x\operatorname{sen}x=e^x[(0)\cos(x)+25\operatorname{sen}(x)]$$

Y por lo tanto m=0, n=0, alfa=1 y ß=1.Así K=max(0,0)=0 Para obtener Δ, vemos si:
$\alpha+i\beta=1+i$
Es raíz del polinomio característico:

m^2-6m+9=0

Como las raíces del polinomio característico son :
$\lambda_1 = \lambda_2 = 3$

Se busca una solución particular de la forma:

$$Y_p = e^x[A\cos x + B\operatorname{sen} x]$$

Poniendo la expresión de Y_p en la ecuación y simplificando ambos miembros de esta por e^x obtenemos:

$$(3A-4B)\cos x+(4A+3B)\operatorname{sen} x=25\operatorname{sen} x$$

de aquí resulta

$$3A-4B=0$$
$$4A-3B=25$$

La solución de este sistema es A=4 y B=3.Por consiguiente

$$Y_p = e^x[4\cos x + 3\operatorname{sen} x]$$

La solución general de la ecuación dada es:

$$Y = (C_1 + C_2 x)e^{3x} + e^x(4\cos x + 3\operatorname{sen} x)$$

<u>Ejemplo:</u> Encuentre la solución general de:

$Y'' + 2y' + 2y = 3e^{-x} + 4\cos x$

Primero se resuelve la ecuación homogénea asociada.
La ecuación característica es $r^2 + 2r + 2 = 0$. Sus raíces son:

$$r = -1 \pm i$$

Ahora se determina Y_p. Observe que f(x) es una suma de dos términos, $3e^{-x}$ y $4\cos x$. Considere primero:

$$3e^{-x} = e^{-x}\ [\ 3\cos(0x) + 0\operatorname{sen}(0x)\ ]$$

En este caso m=0, n=0, $\alpha=-1$ y $\beta=0$. Así k = max (0,0) = 0. Como $\alpha + i\beta = -1$ no es raíz del polinomio característico, sabemos que Y_p incluye un término de la forma A_1e^{-x}. Ahora considere:

$$4\cos x = e^{0x}\ [\ 4\cos x + 0\operatorname{sen} x\ ]$$

En este caso m=0, n=0, $\alpha=0$ y $\beta=1$. Así k = max (0,0). Como $\alpha + i\beta = i$ no es una raíz del polinomio característico, sabemos que Y_p incluye un término de la forma $A_2\cos x + B_2\operatorname{sen} x$. Por lo tanto:

$$Y_p = A_1e^{-x} + A_2\cos x + B_2\operatorname{sen} x$$

para algunas constantes A_1, A_2 y B_2. Sustituyendo esta expresión en la ecuación se obtiene:

$$[\ A_1e^{-x} + A_2\cos x + B_2\operatorname{sen} x\ ]'' + 2[\ A_1e^{-x} + A_2\cos x + B_2\operatorname{sen} x\ ]' + 2[\ A_1e^{-x} + A_2\cos x + B_2\operatorname{sen} x\ ]$$

$$= 3e^{-x} + 4\cos x$$

Es decir:

$$A_1e^{-x} - A_2\cos x - B_2\text{sen } x - 2A_1e^{-x} - 2A_2\text{sen } x + 2B_2\cos x + 2A_1e^{-x} + 2A_2\cos x + 2B_2\text{sen } x$$
$$= 3e^{-x} + 4\cos x$$

Aparecen tres funciones e^{-x}, $\cos x$, $\text{sen } x$ en esta ecuación. Igualando los coeficientes de términos semejantes se tiene:

$$\begin{array}{ll} e^{-x}: & A_1 = 3 \\ \cos x: & A_2 + 2B_2 = 4 \\ \text{sen } x: & B_2 - 2A_2 = 0 \end{array}$$

Este sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas A_1, $A2_2$ y B_2 tiene la solución:

$$A_1 = 3\,,\quad A_2 = 4/5\,,\quad B_2 = 8/5$$

Entonces:

$$Y_p = 3e^{-x} + 4/5\cos x + 8/5\text{sen } x$$

Y la solución general es:

$$Y = C_1e^{-x}\cos x = C_2e^{-x}\text{sen } x + 3e^{-x} + 4/5\cos x + 8/5\text{sen } x$$

Ejemplo. Dé la forma de Y_p si: $y'' + 2y' + 5y = x3e^{-x}\,\text{sen}2x$

Las raíces del polinomio característico r2 + 2r +5 son $-1 \pm 2i$. Así, las dos soluciones homogéneas independientes son $e^{-x}\cos 2x$ y $e^{-x}\,\text{sen } 2x$. Como:

$$f(x) = e^{-x}\ [\,0\cos 2x + x3\text{sen } 2x\,]$$

entonces m=0, n=3, $\alpha= -1$ y $\beta=2$. Así k = max (0,3) = 3. Como $\alpha + i\beta = -1 + 2i$ es una raíz de multiplicidad 1 del polinomio característico, se tiene:

$$Y_p = x\,(A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3)\,e^{-x}\cos 2x + x(B_0 + B_1x + B_2x^2 + B_3x^3)\,e^{-x}\,\text{sen } 2x$$

IV. 5. Variación de parámetros.

Para hallar una solución particular Y_p podemos emplear el método de variación de parámetros. Tratamos de hallar n funciones $C_1, \dots, C_n$ tales que:

$$Y_p = C_1Y_1 + \dots + C_nY_n$$

Sea una solución de la ecuación diferencial no homogénea:

$$Y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = b(x)$$

Con $Y_1, \dots, Y_n$ soluciones de la ecuación homogénea.

Para determinar $C_1, \dots, C_n$, obtenemos el siguiente sistema:

$$\begin{array}{l} Y_1C_1' + Y_2C_2' + \dots + Y_nC_n' = 0 \\ Y_1'C_1' + Y_2'C_2' + \dots + Y_n'C_n' = 0 \\ \vdots \\ Y_1^{(n-1)}C_1' + Y_2^{(n-1)}C_2' + \dots + Y_n^{(n-1)}C_n' = b(x) \end{array}$$

Con este sistema podemos comprobar que:

$$Y_p = C_1Y_1 + \dots + C_nY_n$$

Es una solución particular de la ecuación diferencial:

$$Y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = b(x)$$

Para esto calculamos las derivadas de Y_p como sigue:

$$\begin{aligned} Y_p' &= C_1'Y_1 + C_1Y_1' + \dots + C_n'Y_n + C_nY_n' = [Y_1C_1' + \dots + Y_nC_n'] + [C_1Y_1' + \dots + C_nY_n'] \\ &= 0 + C_1Y_1' + \dots + C_nY_n' = C_1Y_1' + \dots + C_nY_n' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_p'' &= C_1'Y_1' + C_1Y_1'' + \dots + C_n'Y_n' + C_nY_n'' = [Y_1'C_1' + \dots + Y_n'C_n'] + [C_1Y_1'' + \dots + C_nY_n''] \\ &= 0 + C_1Y_1'' + \dots + C_nY_n'' = C_1Y_1'' + \dots + C_nY_n'' \end{aligned}$$

$$Y_p^{(n-1)} = C1Y1^{(n-1)} + \dots + C_nY_n^{(n-1)}$$

$$\begin{aligned} Y_p^{(n)} &= C_1'Y_1^{(n-1)} + C_1Y_1^{(n)} + \dots + C_n'Y_n^{(n-1)} + C_nY_n^{(n)} = [C_1'Y_1^{(n-1)} + \dots + C_n'Y_n^{(n-1)}] + \\ &[C_1Y_1^{(n)} + \dots + C_nY_n^{(n)}] = b(x) + C_1Y_1^{(n)} + \dots + C_nY_n^{(n)} = C_1Y_1^{(n)} + \dots + C_nY_n^{(n)} + b(x) \end{aligned}$$

Sustituyendo las derivadas de Y_p en la ecuación diferencial:

$$Y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = b(x)$$

Obtenemos:

$[C_1Y_1^{(n)} + \ldots + C_nY_n^{(n)}] + a_1(x)\ [C_1Y_1^{(n-1)} + \ldots + C_nY_n^{(n-1)}] + \ \ldots + a_n(x)\ [C_1Y_1 + \ldots + C_nY_n] =$
$C_1[\ Y_1^{(n)} + a_1(x)\ Y_1^{(n-1)} + \ \ldots + a_n(x)Y_1\ ] + \ldots + C_n[\ Y_n^{(n)} + a_1(x)\ Y_n^{(n-1)} + \ \ldots + a_n(x)Y_n\ ] + b(x) =$
$C_1[0] + \ldots + C_n[0] + b(x) = b(x)$

Si W_k es el determinante que se obtiene de $W(\phi_1, \ \ldots\ , \phi_n)$ reemplazando la k-ésima columna $(\phi_k, \phi_k', \ldots, \phi_k^{(n-1)})$ por $(0, 0, \ \ldots\ , 0, 1)$ entonces:

$$C_k(x) = \int \frac{W_k(t)b(t)}{W(\phi_1, \ldots, \phi_n)}\,dt$$

$$C_k(x) = \int \frac{W_k(t)b(t)}{W(\phi_1, \ldots, \phi_n)}\,dt$$

Y entonces Y_p tiene la forma:

$$Y_p(x) = \sum_{k=1}^{n} \phi_k(x) \int \frac{W_k(t)b(t)}{W(\phi_1, \ldots, \phi_n)(t)}\,dt$$

$$Y_p(x) = \sum_{k=1}^{n} \phi_k(x) \int \frac{W_k(t)b(t)}{W(\phi_1, \ldots, \phi_n)(t)}\,dt$$

Para adaptar el procedimiento anterior a una ecuación diferencial de segundo orden

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$$

con conjunto fundamental de soluciones Y_1 y Y_2, la solución particular

$$Y_p = C_1(x)\,Y_1 + C_2(x)\,Y_2$$

Se encuentra tomando

$$C_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & Y_2 \\ f(x) & Y_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_1' & Y_2' \end{vmatrix}} = -\frac{Y_2 f(x)}{\begin{vmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_1' & Y_2' \end{vmatrix}}$$

$$C_2(x) = \frac{\begin{vmatrix} Y_1 & 0 \\ Y_1' & f(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_1' & Y_2' \end{vmatrix}} = \frac{Y_1 f(x)}{\begin{vmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_1' & Y_2' \end{vmatrix}}$$

$$C_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} Y_2 & 0 \\ Y_2 & f(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_1' & Y_2' \end{vmatrix}} = -\frac{Y_1 f(x)}{\begin{vmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_1' & Y_2' \end{vmatrix}}$$

Ejemplo. Resolver:

$$4y'' + 36y = \csc 3x$$

Primero escribimos la ecuación en la forma estándar, dividiendo entre 4.

$$y'' + ay = \tfrac{1}{4} \csc 3x$$

Puesto que las raíces de la ecuación auxiliar $m_2 + 9 = 0$ son $m_1=3i$ y $m_2=-3i$ se tiene que:

$$Y_c = C_1 \cos 3x + C_2 \operatorname{sen} 3x$$

Y

$$w = \begin{vmatrix} \cos 3x & \operatorname{sen} 3x \\ -3 \operatorname{sen} 3x & 3\cos 3x \end{vmatrix}$$

consecuentemente

$$C_1' = \frac{(\operatorname{sen} 3x)(\frac{1}{4}\csc 3x)}{3} = -\frac{1}{12}$$

$$C_2' = \frac{(\operatorname{sen} 3x)(\frac{1}{4}\csc 3x)}{3} = \frac{1}{12}\frac{\cos 3x}{\operatorname{sen} 3x}$$

de lo cual se obtiene:

$$C_1 = -\frac{1}{12}x \qquad \text{y} \qquad C_2 = \frac{1}{36} \ln|\operatorname{sen} 3x|$$

Y

$$Y_p = -\frac{1}{12} x\cos 3x + \frac{1}{36} (\operatorname{sen} x) \ln |\operatorname{sen} 3x|$$

EJERCICIOS

1.- Determine si las funciones dadas son linealmente independientes o linealmente dependientes en el intervalo dado:

a) $1,\ 2,\ x,\ x^2$
b) sen x, cos x, cos 2x
c) 1, sen x, cos 2x
d) cos x, cos (x+1), cos (x-2)
e) 1, sen 2x, $(\text{sen } x - \cos x)^2$
f) 1, arcsen x, arccot x
g) 5, arctan x, arccot x
h) $2+x,\ 2+|x|$

2.- Demostrar que las funciones dadas son linealmente independientes y su wronskiano es idénticamente nulo.

a)
$$y1(x) = \begin{cases} x^3, & \text{si } -2 \le x \le 0 \\ 0, & \text{si } 0 < x \le 1 \end{cases}$$

b)
$$y2(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } -2 \le x \le 0 \\ x^2, & \text{si } 1 < x \le 1 \end{cases}$$

3.- Verifique que las funciones dadas forman un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación diferencial en el intervalo indicado. Forme la solución general.

a) $x^3y''' + 6x^2y'' + 4xy' - 4y = 0$; $x^{-2} \ln x$, $0 < x < \infty$

b) $y^{(4)} + y'' = 0$; $1,\ x,\ \cos x,\ \text{sen } x,\ -\infty < x < \infty$

4.- Si y_1 y y_2 son dos soluciones de:

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$$

en $-1 < x < 1$, demuestre que:

$$w(y_1, y_2) = \frac{c}{1-x^2}$$

donde c es una constante.

5.- Suponga que y_1 y y_2 son soluciones de la ecuación diferencial:

$$xy''' + y' + xy = 0, \quad 0 < x < \infty$$

suponga que se consideran las condiciones iniciales:

$$y_1(x_0) = k_1 \qquad y_1'(x_0) = k_2$$
$$y_2(x_0) = k3 \qquad y_2'(x_0) = k_4$$

con $x_0>0$. Pruebe que:

$$w(y_1, y_2) = \frac{(k_1k_4 - k_2k_3)x_0}{x}$$

6.- Diga si las siguientes son verdaderas o falsas. Si son verdaderas, demuéstrelas; si son falsas, dé un contraejemplo para mostrar su falsedad.

a) "Si ϕ_1, ϕ_2 son dos funciones linealmente independientes en I, entonces son linealmente independientes en cualquier intervalo J contenido en I."

b) "Si ϕ_1, ϕ_2 son linealmente dependientes en un intervalo I, también son linealmente dependientes en cualquier inervalo J contenido en I."

7.- Sean ϕ_1, ϕ_2 dos funciones derivables en un intervalo I, las cuales no necesariamente son soluciones de una ecuación $y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$. Demuestre lo siguiente:

a) Si ϕ_1, ϕ_2 son linealmente dependientes en I, entonces $w(\phi_1, \phi_2)(x) = 0$ para toda x en I.

b) Si $w(\phi_1, \phi_2)(x_0) \neq 0$ para alguna x_0 en I, entonces ϕ_1, ϕ_2 son linealmente independientes.

c) Si $w(\phi_1, \phi_2)(x)$ para toda x en I, no implica que ϕ_1, ϕ_2 sean linealmente dependientes en I.

d) $W(\phi_1, \phi_2)(x)$ para toda x en I, y $\phi_2(x) \neq 0$ en I, implica que ϕ_1, ϕ_2 son linealmente dependientes en I. (Ayuda: calcule $(\frac{\phi_1}{\phi_2})'$)

8.- a) Sea ϕ_n cualquier función que satisface la ecuación con valores en la frontera

$$y'' + n^2y = 0$$
$$y(0) = y(2\Pi)$$
$$y'(0) = y'(2\Pi)$$

donde n=0, 1, 2, ... Demuestre que:

$$\int_0^{2\pi} \phi_n(x)\phi_m(x)dx = 0$$

si $n \neq m$. (Ayuda: $-\phi_n'' = n^2\phi_n$ y $-\phi_m'' = m^2\phi_m$. Asi $(n^2-m^2)\,\phi_n\,\phi_m'' - \phi_m\,\phi_n'' = [\,\phi_n\,\phi_m' - \phi_m\,\phi_n']'$).

b) Demuestre que cos nx y sen nx son funciones que satisfacen la ecuación con condiciones de frontera.

9.- Diga si las siguientes afirmaciones falsas o verdaderas. Si son verdaderas, demuéstrelas, si no, de un contraejemplo.

a) "Si $\phi_1, \ldots, \phi_n$, son funciones linealmente independientes en un intervalo I, entonces cualquier subconjunto de ellas forma un conjunto de funciones linealmente independientes en I."

b) "Si $\phi_1, \ldots, \phi_n$ son funciones linealmente dependientes en un intervalo I, entonces cualquier subconjunto de ellas forma un conjunto de funciones linealmente dependientes en I."

10.- Encuentre cuatro soluciones de la ecuación:

$$y(4) + \lambda y = 0$$

que sean linealmente independientes, para los siguientes casos:

a) $\lambda=0$
b) $\lambda>0$
c) $\lambda<0$

11.- Integrar las siguientes ecuaciones:

a) $y''' + 6y'' + 11y' + 6y = 0$
b) $y^{VI} + y^{V} + y^{IV} = 0$
c) $y''' - 8y = 0$
d) $y^{IV} + 4y''' + 10y'' + 12y' + 5y = 0$
e) $y^{IV} + 2y''' + 4y'' - 2y' - 5y = 0$
f) $y^{V} + 4y^{IV} + 5y''' - 6y' - 4y = 0$
g) $y''' + 2y'' - y' - 2y = 0$
h) $y^{X} = 0$
i) $y''' - 3y' - 2y = 0$

12.- Resolver las siguientes ecuaciones por el método de coeficientes indeterminados

a) $y'' + y' + y = (x+x^2)e^x$
b) $y'' + 2y' + 5y = e^{-x}\text{sen } 2x$
c) $y'' + 4y' + 5y = 10e^{-2x}\cos x$
d) $4y'' + 8y' = x\text{sen } x$
e) $y'' + 2y' + y = x^2e^{-x}\cos x$
f) $y'' + y' = \cos^2 x + e^x + x^2$

13.- Resuelva cada ecuación diferencial mediante variación de parámetros

a) $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{1+x^2}$

b) $y'' - 2y' + y = e^x \arctan x$

c) $'' - 4y' + y = e^{x/2}\sqrt{1-x^2}$

14.- Dado que $y_1 = x^{-1/2}\cos x$ y $y_2 = x^{-1/2}\text{sen } x$ forman un conjunto fundamental de soluciones de :

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - 1/4)y = 0$$

encuentre la solución general de:

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - 1/4)y = x^{3/2}$$

15.- Consideremos la ecuación:

$$y'' + y = b(x)$$

Demuestre que una solución particular está dada por:

$$\int_1^x \operatorname{sen}(x-t)b(t)dt$$