PROBLEMARIO DE ECUACIONES DIFERENCIALES

Jazmín Adriana Juárez Ramírez

Problemario de Ecuaciones Diferenciales

Jazmín Juárez Ramírez

1 Ecuaciones de orden superior

1.1 Ecuaciones con coeficientes constantes.

1. $y'' - 5y' + 4y = 0$
   El polinomio característico es $p(m) = m^2 - 5m + 4$, la ecuación característica $p(m) = m^2 - 5m + 4 = 0$ tiene por raíces $m_1 = 4$ y $m_2 = 1$,que son distintas, por tanto las soluciones de la ecuación son $y_1 = e^{4x}, y_2 = e^x$. La combinación lineal de estas soluciones l.i. es también solución.
   $$y = c_1 e^{4x} + c_2 e^x.$$

2. $y'' + 6y' + 9y = 0$
   $p(m) = m^2 + 6m + 9$, $m^2 + 6m + 9 = 0$, raíces: $m_1 = -3$ y $m_2 = -3$, estas raíces son iguales,
   las soluciones son $y_1 = xe^{-3x}, y_2 = e^{-3x}$.
   $$y = c_{1x} e^{-3x} + c_2 e^{-3x} = e^{-3x}(c_1 x + c_2).$$

3. $y'' + 25y = 0$
   $p(m) = m^2 + 25$, $m^2 + 25 = 0$, raíces: $m_1 = -5i$ y $m_2 = 5i$, estas raíces son complejas conjugadas, las raíces son $y_1 = e^{i5x}, y_2 = e^{-i5x}$;
   $y = c_1 e^{5ix} + c_2 e^{-5ix}$;
   usando las fórmula de Euler $e^{\pm i\theta} = \cos\theta \pm isen\theta$
   la solución se escribe de la forma
   $$y = Acos5x + Bsen5x.$$

4. $y''' + 3y'' + 2y' = 0$
   $m^3 + 3m^2 + 2m = 0, \quad m_1 = 0\,, m_2 = -1, m_3 = -2;$
   $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} + c_3;$
   $$y = c_1 e^{2x} + \frac{c_2}{e^x} + c_3.$$

5. $y''' = 0$
   $m^3 = 0, m_1 = m_2 = m_3 = 0;$
   $$y = c_1 + c_2 x + c_3 x^2.$$

6. $y'' + 6y' + 13y = 0$

$m^2+6m+13=0; \quad m_1=-3+2i, m_2=-3-2i; y=c_1e^{-3x}\left(A\cos 2x+Bsen2x\right).$

1.2 Ecuaciones lineales no homogéneas

1.2.1 Método de los coeficientes indeterminados

$y''-4y=3x+2$

1. Resolvemos la ecuación homogénea $y''-4y=0$, que tiene por solución $y_c=c_1e^{2x}+c_2e^{-2x}$;
   proponemos la solución particular $y_p=Ax+B$ de ya que $f(x)=3x+2$.
   Calculando la primera y segunda derivada de esta solución propuesta $y_p'=A$, $y_p''=0$;
   sustituyendo en la ecuación diferencial: $0-4\left(Ax+B\right)=3x+2$;
   comparando coeficientes: $-4A=3$ y $-B=2$;de aquí obtenemos los valores de las constantes $A=-\frac{3}{4}$ y $B=-\frac{1}{2}$; sustituyendo en la solución particular $y_p=-\frac{3}{4}x-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}+1\right)$;
   la solución general tiene la forma $y=y_c+y_p$;
   $$y=c_1e^{2x}+c_2e^{-2x}-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}+1\right).$$

2. $y''-4y=3e^{5x}$
   $y_c=c_1e^{2x}+c_2e^{-2x}$, se propone $y_p=Ae^{5x}$ ya que $f(x)=3e^{5x}$;
   $y_p'=5Ae^{5x}, y_p''=25Ae^{5x}$;
   $25Ae^{5x}-4\left(Ae^{5x}\right)=3e^{5x}, 21Ae^{5x}=3e^{5x}, A=\frac{3}{21}$, por tanto $y_p=\frac{1}{7}e^{5x}$;
   $$y=c_1e^{2x}+c_2e^{-2x}+\frac{1}{7}e^{5x}.$$

3. $y''-7y=(x-1)^2$
   $y''-7y=x^2-2x+1$;
   $y''-7y=0$ tiene solución $\quad y_c=c_1e^{\sqrt{7}x}+c_2e^{-\sqrt{7}x}$;
   $y_p=Ax^2+Bx+C; \quad y_p'=2Ax+B; \quad y_p''=2A$;
   $2A-7\left(Ax^2+Bx+C\right)=x^2-2x+1$;
   $-7A=1, -7B=-2, 2A-7C=1$;
   $A=-\frac{1}{7}, B=\frac{2}{7}, C=-\frac{9}{49}$;
   $y_p=-\frac{1}{7}x^2+\frac{2}{7}x-\frac{9}{49}=-\frac{1}{7}\left(x^2-2x+\frac{1}{7}\right)$;
   $$y=c_1e^{\sqrt{7}x}+c_2e^{-\sqrt{7}x}-\frac{1}{7}\left(x^2-2x+\frac{1}{7}\right)$$
   .

4. $y''+4y=3sen3x$
   $y''+4y=0$;
   $y_c=c_1\cos 2x+c_2sen2x$;
   $y_p=A\cos 3x+Bsen3x; \quad y_p'=-3Asen3x+3B\cos 3x; \quad y_p''=-9A\cos 3x-9Bsen3x$;
   $-9\left(A\cos 3x+Bsen3x\right)+4\left(A\cos 3x+Bsen3x\right)=3sen3x$;
   $-5Acos3x-5Bsenx=3sen3x; \quad -5A=0, \ -5B=3$, entonces $A=0$ y $B=-\frac{3}{5}$;

$y_p = -\frac{3}{5} sen3x;$

$$y = c_1 \cos 2x + c_2 sen2x - \frac{3}{5} sen3x.$$

5. $y''' - y'' = e^{-x}$
   $y''' - y'' = 0;$
   $y_c = c_1 + c_{2x+} c_3 e^{-x};$
   $y_p = Axe^{-x}$(proponemos esta solución ya que en la solución complementaria aparece e^{-x});
   $y' = Ae^{-x}(1-x)\,; \quad y'' = -Ae^{-x}(2-x)\,; \quad y''' = Ae^{-x}(3-x)\,;$
   sustituyendo en la ecuación diferencial:
   $Ae^{-x}(3-x) - Ae^{-x}(2-x) = e^{-x}; \quad Ae^{-x}(3-x-2+x) = e^{-x}; \quad Ae^{-x} = e^{-x}; \quad A = 1.$
   $y_p = xe^{-x}$

$$y = c_1 + c_{2x+} c_3 e^{-x} + xe^{-x}.$$

1.2.2 Variación de parámetros.

1. $y'' - y' - 2y = e^{-x}$
   $y'' - y' - 2y = e^{-x}$ tiene por solución $y_c = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x};$
   Proponemos una solución particular de la forma $y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2$; hay que calcular las funciones u_1, u_2 :
   calculamos el wronskiano $W(x) = \begin{vmatrix} e^{-x} & e^{2x} \\ -e^{-x} & 2e^{2x} \end{vmatrix} = 2e^{x} + e^{x} = 3e^{x};$
   $u_1 = -\int \frac{e^{-x}e^{2x}}{3e^{x}} dx = -\frac{1}{3}\int \frac{e^{x}}{e^{x}} dx = -\frac{1}{3}x;$
   $u_2 = \int \frac{e^{-x}e^{-x}}{3e^{x}} dx = \frac{1}{3}\int \frac{e^{-2x}}{e^{x}} dx = -\frac{1}{9}e^{-3x};$
   formamos la solución particular $y_p = \left(-\frac{1}{3}x\right)e^{-x} + \left(-\frac{1}{9}e^{-3x}\right)e^{2x};$
   $y_p = -\frac{1}{3}xe^{-x} - \frac{1}{9}e^{-x}$;tendremos la soluciòn general $y = y_c + y_p;$

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} - \frac{1}{3}xe^{-x} - \frac{1}{9}e^{-x} = c_3 e^{-x} + c_2 e^{2x} - \frac{1}{3}xe^{-x}.$$

2. $y" + y = \sec x$
   $y" + y = 0; \quad y_c = A\cos x + B \operatorname{sen} x;$
   $y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2;$
   $W(x) = \begin{vmatrix} \cos x & \operatorname{sen} x \\ -\operatorname{sen} & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$(en este ejercicio el wronskiano es constante);
   $u_1 = -\int \frac{\sec x \operatorname{sen} x}{1} dx = -\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} dx = \ln|\cos x|\,;$
   $u_2 = \int \frac{\sec x \cos x}{1} dx = \int \frac{\cos x}{\cos x} dx = x;$
   $y_p = \cos x \ln|\cos x| + x \operatorname{sen} x$

$$y = \cos x \ln|\cos x| + x \operatorname{sen} x + A\cos x + B \operatorname{sen} x.$$

3. $y'' - 4y' = \frac{e^{2x}}{x}$
   $y'' - 4y = 0;$

$y_c = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x}$;

$y_p = u_1y_1 + u_2y_2$;

$W(x) = \begin{vmatrix} e^{2x} & e^{-2x} \\ 2e^{2x} & -2e^{-2x} \end{vmatrix} = (-2e^{-2x}xe^{2x}) - (2e^{2x}xe^{-2x}) - 2 - 2 = -4$;

$u_1 = \int \frac{\frac{e^{2x}}{x}e^{2x}}{-4}dx = -\int \frac{1}{-4x}dx = \frac{1}{4}\ln x$;

$u_2 = \int \frac{\frac{e^{2x}}{x}e^{2x}}{-4}dx = -\frac{1}{4}\int \frac{e^{4x}}{x}dx$ (esta integral se resuelve aproximando a una serie);

$y_p = \frac{1}{4}\ln|x|\,e^{2x} - \left[\frac{1}{4}\int \frac{e^{4x}}{x}dx\right]e^{-2x}$;

$$y = \frac{1}{4}\ln|x|\,e^{2x} - \left[\frac{1}{4}\int \frac{e^{4x}}{x}dx\right]e^{-2x} + C_1e^{2x} + C_2e^{-2x}.$$

4. $y'' - 9y = \frac{9x}{e^{3x}}$

   $y'' - 9y = 0$;

   $y_c = C_1e^{3x} + C_2e^{-3x}$;

   $y_p = u_1y_1 + u_2y_2$;

   $W(x) = \begin{vmatrix} e^{3x} & e^{-3x} \\ 3e^{3x} & -3e^{-3x} \end{vmatrix} = -3e^0 - 3e^0 = -6$

   $u_1 = -\int \frac{\frac{9x}{e^{3x}}e^{-3x}}{-6}dx = \frac{9}{6}\int xe^{-6x}dx = -\frac{3e^{-6x}}{12}\left(x + \frac{1}{6}\right)$;

   $u_2 = \int \frac{\frac{9x}{e^{3x}}e^{3x}}{-6}dx = -\frac{1}{6}\int 9xdx = -\frac{9}{6}\frac{x^2}{2} = -\frac{3}{4}x^2$;

   $y_p = e^{3x}\left[-\frac{3xe^{-6x}}{12} - \frac{3e^{-6x}}{36}\right] + e^{-3x}\left[-\frac{9}{12}x^2\right] = -\frac{xe^{-3x}}{4} - \frac{e^{-3x}}{12} - \frac{3x^2e^{-3x}}{4}$;

$$y = C_1e^{3x} + C_2e^{-3x} - \left(\frac{xe^{-3x}}{4} + \frac{e^{-3x}}{12} + \frac{3x^2e^{-3x}}{4}\right)$$

.

1.3 Ecuaciones con coeficientes variables

1.3.1 Ecuación de Cauchy-Euler

1. $x^2y'' - 2y = 0$

   La ecuación característica es $m^2 - m - 2 = 0$ cuyas raices (distintas) son $m_1 = -1$ y $m_2 = 2$.
   las soluciones son $y_1 = x^{-1}$, $y_2 = x^2$; por lo tanto

$$y = \frac{c_1}{x} + c_2x^2.$$

2. $x^2y'' + xy' = 0$

   La ecuación característica es $m^2 = 0$, con raíces (iguales) $m_1 = m_2 = 0$;
   las soluciones l.i. son: 1, lnx;

$$y = c_1 + c_2lnx.$$

3. $x^2y'' + xy' + y = 0$

$m^2 + 1 = 0$, con raíces (complejas conjugadas) $m_1 = i, m_2 = -i$;

$y_1 = \cos(\ln x)$, $y_2 = sen(\ln x)$

$$y = c_1 \cos(\ln x) + c_2 sen(\ln x).$$

4. $x^2y'' + 10xy' + 8y = x^2$

$m^2 + 9m + 8 = 0, \quad m_1 = -1, m_2 = -8$;

$y_c = \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^8}$;

la solución particular se encuentra por variación de parámetros

$W(x) = \begin{vmatrix} \frac{1}{x} & \frac{1}{x^8} \\ -\frac{1}{x^2} & -\frac{8}{x^9} \end{vmatrix} = -\frac{8}{x^{10}} + \frac{1}{x^{10}} = -\frac{7}{x^{10}}$;

$u_1 = -\int \frac{\frac{1}{x^8}}{-\frac{7}{x^{10}}} dx = \frac{1}{7}\int x^2 dx = \frac{x^3}{21}$;

$u_2 = \int \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{7}{x^{10}}} dx = -\frac{1}{7}\int x^9 dx = \frac{x^{10}}{70}$;

$y_p = u_1y_1 + u_2y = \frac{x^3}{21}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{x^{10}}{70}\left(\frac{1}{x^8}\right) = \frac{x^2}{21} - \frac{x^2}{70} = \frac{x^2}{30}$;

$$y = \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^8} + \frac{x^2}{30}.$$

Esta ecuación también podemos resolverla haciendo el cambio de variable $x = e^t$, para llegar a una ecuación con coeficientes constantes

$\frac{d^2y}{dt^2} + 9\frac{dy}{dt} + 8y = e^{2t}$;

$y_c(t) = c_1e^{-8t} + c_2e^{-t}$;

$W(t) = \begin{vmatrix} e^{-8t} & e^{-t} \\ -8e^{-8t} & -e^{-t} \end{vmatrix} = -e^{-9t} + 8e^{-9t} = 7e^{-9t}$;

$u_1 = -\int \frac{e^{-t}e^{2t}}{7e^{-9t}} dt = -\frac{1}{7}\int e^{10t}dt = -\frac{1}{70}e^{10t}$;

$u_2 = -\int \frac{e^{-8t}e^{2t}}{7e^{-9t}} dt = \frac{1}{7}\int e^{3t}dt = \frac{1}{21}e^{3t}$;

$y_p(t) = -\frac{1}{70}e^{10t}\left(e^{-8t}\right) + \frac{1}{21}e^{3t}\left(e^{-t}\right) = \frac{1}{30}e^{2t}$;

$$y(t) = c_1e^{-8t} + c_2e^{-t} + \frac{1}{30}e^{2t};$$

esta solución está en términos de t, regresando a la variable x

$$y = \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^8} + \frac{x^2}{30}.$$

5. $(3x-4)^2 y'' + 10(3x+4)y' + 9y = 0$;

Esta ecuación no parece a simple vista una ecuación de Cauchy-Euler, pero si hacemos el cambio $u = 3x-4$, la ecuación resultante es una ecuación C-E en términos de u.

$9u^2\frac{d^2y}{du^2} + 30u\frac{dy}{du} + 9y = 0$;

$u^2\frac{d^2y}{du^2} + \frac{10}{3}u\frac{dy}{du} + y = 0$;

Ecuación característica: $m^2 + \frac{7}{3}m + 1 = 0; \quad m_1 = -\frac{7}{6} + \frac{\sqrt{13}}{6}$ y $m_2 = -\frac{7}{6} - \frac{\sqrt{13}}{6}$;

$u^2 \frac{d^2y}{du^2} + \frac{10}{3} u \frac{dy}{du} + y = 0;$
Ecuación característica: $m^2 + \frac{7}{3}m + 1 = 0;\quad m_1 = -\frac{7}{6} + \frac{\sqrt{13}}{6}$ y $m_2 = -\frac{7}{6} - \frac{\sqrt{13}}{6};$
$y(u) = c_1 u^{-\frac{7}{6}+\frac{\sqrt{13}}{6}} + c_2 u^{-\frac{7}{6}-\frac{\sqrt{13}}{6}};$
regresando a la variable x

$$y(x) = c_1(3x+4)^{-\frac{7}{6}+\frac{\sqrt{13}}{6}} + c_2(3x+4)^{-\frac{7}{6}-\frac{\sqrt{13}}{6}}$$

6. $(x-1)^2 y'' - 2(x-1)y' - 4y = 0$
Si $u = x-1$, la ecuación se transforma en $u^2 \frac{d^2y}{du^2} - 2u\frac{dy}{du} - 4y = 0;$
$m - 3m - 4 = 0;\quad m_1 = 4,\quad m_2 = -1;$
$y(t) = c_1 u^4 + \frac{c_2}{u};$
en términos de x:

$$y(x) = c_1(x-1)^4 + \frac{c_2}{x-1}$$

Reducción de orden

1. Calcular una segunda solución de $x^2y'' + x(x-1)y' - y = 0$ si $y_1 = e^{-x}$
La solución tendrá la forma $y = uy_1$ donde u es una función a determinar y que está relacionada con una función $v = u'$; calculando $v = \frac{ce^{\ln x - x}}{e^{-2x}} = cxe^x$, $u = c_1\int xe^x dx = c_1 e^x(x-1) + c_2$; así que $y = (c_1 e^x(x-1) + c_2)e^{-x} = c_1(x-1) + c_2e^{-x}$; por lo tanto

$$y_2 = x - 1$$

2. $x^2y'' - 2xy' + (x^2+2)y = 0$ si $y_1 = x\cos x$
$v = \frac{ce^{\ln x^2}}{x^2\cos^2 x} = \frac{cx^2}{x^2\cos^2 x} = c\sec^2 x$
$u = \int c\sec^2 x dx = c_1\tan x + c_2;$
$y = (c_1\tan x + c_2)x\cos x = c_1 x\tan x\cos x + c_2 x\cos x = c_1 x\operatorname{sen} x + c_2 x\cos x$
Por lo tanto

$$y_2 = x\operatorname{sen} x$$

Problemario de Ecuaciones Diferenciales

Jazmín Juárez Ramírez

1 Transformada de Laplace

1.1 Transformada directa

1.1.1 Propiedad de traslación.(Desplazamiento de s)

Si $\ell\{f(t)\} = F(s)$ se cumple que

$\boxed{\ell\{f(t)e^{at}\} = F(s-a)}$ con a constante.

1. $\ell\{e^{5t}\} = \ell\{1 \cdot e^{5t}\} = \frac{1}{s-5}$, en este caso f(t) = 1.
2. $\ell\{t^2e^{-2t}\} = \frac{2!}{(s-(-2))^3} = \frac{2}{(s+2)^3}$.
3. $\ell\{te^{4t}\} = \frac{1}{(s-4)^2}$.
4. $\ell\{e^{-t}sen2t\} = \frac{2}{s^2+4}|_{s\to s+1} = \frac{2}{(s+1)^2+4}$.
5. $\ell\{e^{-10t}\cosh 4t\} = \frac{s}{s^2-16}|_{s\to s+10} = \frac{s+10}{(s+10)^2-16}$.

1.1.2 Propiedad de la derivada de la transformada.

1. Si $\ell\{f(t)\} = F(s)$ entonces
   $\boxed{\ell\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n}}$
2. $\ell\{e^{-3t}t\} = (-1)\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s+3}\right) = -\left(-\frac{1}{(s+3)^2}\right) = \frac{1}{(s+3)^2}$.
3. $\ell\{t\cos t\} = (-1)\frac{d}{ds}\ell\{\cos t\} = (-1)\frac{d}{ds}\left(\frac{s}{s^2+1}\right) = -\left[\frac{s+1-s(2s)}{(s^2+1)^2}\right] = \frac{s^2-1}{(s^2+1)^2}$.
4. $\ell\{t^2sent\} = (-1)^2\frac{d^2}{ds^2}\ell\{sent\} = \frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{1}{s^2+1}\right) = \frac{d}{ds}\left[\frac{-2s}{(s^2+1)^2}\right] = \frac{2(3s^2-1)}{(s^2+1)^3}$.

1.1.3 Transformadas de funciones trigonométricas.

1. $\ell\{\cos 3t \text{ sen } 5t\}$

Usando $\cos mx \operatorname{sen} nx = \frac{\operatorname{sen}(m+n)x - \operatorname{sen}(m-n)x}{2}$ tenemos:

$\frac{1}{2}\ell\{\operatorname{sen} 8x\} + \frac{1}{2}\ell\{\operatorname{sen} 2x\} = \frac{1}{2}\left(\frac{8}{s^2+64}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{s^2+4}\right) = \frac{4}{s^2+64} + \frac{1}{s^2+4}.$

2. $\ell\{\cos t \cos 2t\}$

   Usando $\cos mx \cos nx = \frac{\cos(m+n)x \cos(m-n)x}{2}$ tenemos:

   $\frac{1}{2}\ell\{\cos 3x\} + \frac{1}{2}\ell\{\cos(-1)x\} = \frac{1}{2}\ell\{\cos 3x\} + \frac{1}{2}\ell\{\cos x\} = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{s^2+9}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{5}{s^2+1}\right);$

   $\ell\{\cos t \cos 2t\} = \frac{1}{2s^2+18} + \frac{1}{2s^2+2}.$

3. $\ell\left\{\operatorname{sen}\left(4t + \frac{\pi}{4}\right)\right\} = \ell\left\{\operatorname{sen} 4t \cos\frac{\pi}{4} + \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\cos 4t\right\} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{4}{s^2+16}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{s}{s^2+16}\right) =$

   $\ell\left\{\operatorname{sen}\left(4t + \frac{\pi}{4}\right)\right\} = \frac{2\sqrt{2}}{s^2+16} + \frac{\sqrt{2}s}{2(s^2+16)} = \frac{\sqrt{2}}{s^2+16}\left(2 + \frac{s}{2}\right).$

4. $\ell\{e^{\alpha t}\cos(t+\beta)\}$, donde α, β son constantes

   $\ell\{\cos(t+\beta)\} = \ell\{\cos t \cos\beta - \operatorname{sen} t \operatorname{sen}\beta\} = \cos\beta\,\ell\{\cos t\} - \operatorname{sen}\beta\,\ell\{\operatorname{sen} t\};$

   $\ell\{\cos(t+\beta)\} = \cos\beta\left(\frac{s}{s^2+1}\right) - \operatorname{sen}\beta\left(\frac{1}{s^2+1}\right);$

   Utilizando $\ell\{f(t)e^{at}\} = F(s-a)$ si $a = \alpha$;

   $\ell\{e^{\alpha t}\cos(t+\beta)\} = \cos\beta\left(\frac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2+1}\right) - \operatorname{sen}\beta\left(\frac{1}{(s-\alpha)^2+1}\right).$

5. $\ell\left\{e^{2t}\operatorname{sen}\left(t+\frac{\pi}{4}\right)\right\} = \frac{1}{\sqrt{2}}\ell\left\{e^{2t}\operatorname{sen} t\right\} + \frac{1}{\sqrt{2}}\ell\left\{e^{2t}\cos t\right\}$ si $a = 2$;

   $\ell\left\{e^{2t}\operatorname{sen}\left(t+\frac{\pi}{4}\right)\right\} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{s^2+1}|_{s\to s-2}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{s}{s^2+1}|_{s\to s-2}\right);$

   $\ell\left\{e^{2t}\operatorname{sen}\left(t+\frac{\pi}{4}\right)\right\} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{(s-2)^2+1}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{s-2}{(s-2)^2+1}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{s-1}{(s-2)^2+1}.$

1.1.4 Función de Heaviside

1. $\ell\left\{e^{(2-t)}H(t-2)\right\} = e^2\ell\left\{e^{-t}H(t-2)\right\} = e^2\left[\ell\{H(t-2)\}|_{s\to s+1}\right] = e^2\left[\frac{e^{-2s}}{s}|_{s\to s+1}\right];$

   $\ell\left\{e^{(2-t)}H(t-2)\right\} = e^2\left[\frac{e^{-2(s+1)}}{s+1}\right] = \frac{e^{-2s}}{s+1}.$

2. $\ell\{tH(t-3)\} = (-1)^n\frac{d}{ds}\left[\ell\{H(t-3)\}\right] = -\frac{d}{ds}\left[\frac{e^{-3s}}{s}\right] = -\frac{e^{-3s}(-3s-1)}{s^2} = e^{-3s}\left(\frac{3s+1}{s^2}\right).$

3. $\ell\{H(t-1)\cosh 4t\} = \ell\{H(t-1)\cosh 4t\} = \frac{1}{2}\ell\left\{H(t-1)e^{4t}\right\} + \frac{1}{2}\ell\left\{H(t-1)e^{-4t}\right\};$

   $\ell\{H(t-1)\cosh 4t\} = \frac{1}{2}\left[\frac{e^{-s}}{s}\right]|_{s\to s+4} + \frac{1}{2}\left[\frac{e^{-s}}{s}\right]|_{s\to s-4} = \frac{1}{2}\left[\frac{e^{-(s+4)}}{s+4} + \frac{e^{-(s-4)}}{s-4}\right].$

1.2 Transformada Inversa de Laplace

Si

$$\ell\{f(t)\} = F(s)$$

entonces

$$\boxed{\ell^{-1}\{F(s)\} = f(t)}$$

La transformada inversa es un operador lineal

$$\boxed{\ell^{-1}\left\{\alpha F(s)+\beta G(s)\right\}=\alpha\ell^{-1}\left\{F(s)\right\}+\beta\ell^{-1}\left\{G(s)\right\}}$$

1.2.1 Cálculo de transformadas inversas utilizando tablas

1. Calcular $\ell^{-1}\left\{\frac{3}{s-4}\right\}$

   $\ell^{-1}\left\{\frac{3}{s-4}\right\}=3\ell^{-1}\left\{\frac{1}{s-4}\right\}$

   Como sabemos que $\ell\left\{e^{at}\right\}=\frac{1}{s-\alpha}$ entonces $3\ell^{-1}\left\{\frac{1}{s-4}\right\}=3e^{4t}$.

1. $\ell^{-1}\left\{\frac{4s}{s^2-14}\right\}=4\ell^{-1}\left\{\frac{s}{s^2-14}\right\}=4\cos\sqrt{14}t.$

2. $\ell^{-1}\left\{\frac{3s+17}{s^2+7}\right\}=3\ell^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+7}\right\}+17\ell^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+7}\right\}=3\cos\sqrt{7}t+\frac{17}{\sqrt{7}}\operatorname{sen}\sqrt{7}t.$

3. $\ell^{-1}\left\{\frac{1}{s-4}-\frac{6}{(s-4)^2}\right\}=\ell^{-1}\left\{\frac{1}{s-4}\right\}-\ell^{-1}\left\{\frac{6}{(s-4)^2}\right\}=e^{4t}-6te^{4t}.$

1.2.2 Convolución

Sea $H(s)=G(s)\,F(s)$, donde $\ell^{-1}\left\{G(s)\right\}=g(t)$ y $\ell^{-1}\left\{F(s)\right\}=f(t)$;

entonces

$$\boxed{\ell^{-1}\left\{F(sG(s))\right\}=\ell^{-1}\left\{F(s)\right\}*\ell^{-1}\left\{G(s)\right\}=f(t)*g(t)}$$

La transformada inversa de funciones es la convolución de las transformadas inversas

$$\boxed{F(s)\,G(s)=\ell\left\{f(t)*g(t)\right\}}$$

$$\boxed{\ell^{-1}\left\{F(s)\,G(s)\right\}=f(t)*g(t)}$$

La convolución se define de la siguiente forma:

$$\boxed{f(t)\,g(t)=\int_0^t f(\lambda)\,g(t-\lambda)\,d\lambda}$$

La convolución es un operador que cumple la propiedad de conmutatividad

1. $\ell^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s-2)}\right\}$

   $\ell^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s-2)}\right\}=\ell^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\cdot\frac{1}{s-2}\right\}=\ell^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}*\ell^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\}=t*e^{2t}$

$$\ell^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s-2)}\right\}=\int_0^t \lambda e^{2(t-\lambda)}d\lambda=e^{2t}\int_0^t e^{-2\lambda}d\lambda=e^{2t}\left[\frac{e^{-2\lambda}}{-2}\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\right]_0^t$$
$$\ell^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s-2)}\right\}=e^{2t}\left[\frac{e^{-2t}}{-2}\left(t+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{4}\right];$$
$$\ell^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s-2)}\right\}=-\frac{t}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}e^{2t}.$$

2. Calcular $\ell^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-3s+2}\right\}$

$$\ell^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-3s+2}\right\}=\ell^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)(s-2)}\right\}=\ell^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\cdot\frac{1}{s-2}\right\}=\ell^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\}*\ell^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\};$$

Sabemos que $\ell^{-1}\left\{\frac{1}{s-a}\right\}=e^{at}$,entonces

$$\ell^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-3s+2}\right\}=e^{t}*e^{2t}=\int_0^t e^{\lambda}e^{2(t-\lambda)}d\lambda=e^{2t}\int_0^t e^{-\lambda}d\lambda=e^{2t}\left[-e^{-\lambda}\right]=e^{2t}\left[-e^{-t}+1\right];$$
$$\ell^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-3s+2}\right\}=e^{2t}-e^{t}.$$

1.2.3 Segundo teorema de traslación

Si $\ell\{f(t)\}=F(s)$ entonces

1. $\boxed{\ell\{f(t-a)H(t-a)\}=e^{-sa}F(s)}$

   $\boxed{\ell^{-1}\{e^{-sa}F(s)\}=f(t-a)H(t-a).}$

2. $\ell^{-1}\left\{\frac{e^{-2s}}{s^3}\right\}=\ell^{-1}\left\{e^{-2s}\frac{1}{s^3}\right\}=\left(\ell^{-1}\left\{\frac{1}{s^3}\right\}H(t)\right)|_{t\to t-2}=\frac{(t-2)^2}{2}H(t-2).$
3. $\ell^{-1}\left\{\frac{se^{-\frac{\pi}{2}s}}{s^2+4}\right\}=\ell^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}e^{-\frac{\pi}{2}s}\right\}=H(t)\cos t|_{t\to t-\frac{\pi}{2}}=H(t-\frac{\pi}{2})\cos(t-\frac{\pi}{2}).$
4. $\ell\left\{sen sH(t-\frac{\pi}{2})\right\}=\ell\left\{\cos\left(t-\frac{\pi}{2}\right)tH(t-\frac{\pi}{2})\right\}=\frac{se^{-\frac{\pi}{2}s}}{s^2+1}.$
5. $\ell\{\cos tH\,(t-\pi)\}=\ell\{sen(t-\pi)H(t-\pi)\}=\frac{e^{-\pi}}{s^2+1}.$

1.3 Solución de ecuaciones diferenciales.

1. $\frac{dy}{dt}+2y=t;\quad y(0)=-1$

   Aplicamos la transformada a ambos lados de la ecuación
   $\ell\{y'+2y\}=\ell\{t\};$
   aplicando la propiedad de linealidad
   $\ell\{y'\}+2\ell\{y\}=\ell\{t\};$
   tomando $\ell\{y\}=Y(s)$ y calculando las transformadas
   $sY(s)-sy(0)+2Y(s)=\frac{1}{s^2};$
   aplicamos la condición inicial $y(0)=-1$ y factorizamos a $Y(s)$

$Y(s)(s+2)+1=\frac{1}{s^2};$
despejando a $Y(s)$
$Y(s)=\frac{1}{(s+2)s^2}-\frac{1}{(s+2)};$
para obtener la solución de la ecuación, calculamos la transformada inversa de $Y(s)$;
$y(t)=\ell^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)s^2}\right\}-\ell^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)}\right\};$
$\ell^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)s^2}\right\}=\ell^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)}\cdot\frac{1}{s^2}\right\}=\ell^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)}\right\}*\ell^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}=t*e^{-2t}$
$\ell^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)s^2}\right\}=\int\limits_0^t\lambda e^{-2(t-\lambda)}d\lambda=e^{-2t}\int\limits_0^t\lambda e^{2\lambda}d\lambda=e^{-2t}\left[\frac{e^{2\lambda}}{2}\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)\right]_0^t$
$\ell^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)s^2}\right\}=e^{-2t}\left[\frac{e^{2t}}{2}\left(t-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{4}\right]$
$\ell^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)s^2}\right\}=\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{2}\left(e^{-2t}-1\right)\right);$
Sumando esta función con la transformada $-\ell^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)}\right\}$ que es inmediata, tenemos
$y(t)=\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{2}\left(e^{-2t}-1\right)\right)-e^{-2t};$
reduciendo términos semejantes
$y(t)=\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{2}\left(3e^{-2t}+1\right)\right).$

2. $y''-4y'-5y=0, y(0)=1, y'(0)=-1.$
$\ell\{y''-4y'-5y\}=\ell\{y''\}-4\ell\{y'\}-5\ell\{y\}=\ell\{0\};$
si $\ell\{y\}=Y(s)$
$\ell\{y''-4y'-5y\}=s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)-4(sY(s)-y(0))-5Y(s)=0;$
Aplicando condiciones iniciales
$s^2Y(s)-s+1-4sY(s)+4-5Y(s)=0;$
Factorizando la transformada$Y(s)Y(s)\left(s^2-4s-5\right)=s-5;$
Despejando $Y(s)$
$Y(s)=\frac{s-5}{s^2-4s-5}=\frac{s-5}{(s-5)(s+1)}=\frac{1}{s+1};$
Aplicando la transformada inversa
$y(t)=\ell^{-1}\{Y(s)\}=\ell^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\};$
$y(t)=e^{-t}.$

3. $y''+y=1, y(0)=2, y'(0)=3;$
$\ell\{y''+y\}=\ell\{1\};$
$\ell\{y''\}+\ell\{y\}=\ell\{1\};$
si $\ell\{y\}=Y(s)$
$\ell\{y''+y\}=s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)+Y(s)=\frac{1}{s};$
Aplicando condiciones iniciales
$s^2Y(s)-2s-3+Y(s)=\frac{1}{s};$
Factorizando la transformada$Y(s)$
$Y(s)\left(s^2+1\right)=2s+3+\frac{1}{s};$

Despejando Y(s)

$Y(s) = \frac{2s+3+\frac{1}{s}}{s^2+1} = \frac{2s^2+3s+1}{(s^2+1)s}$;

Aplicando la transformada inversa

$y(t) = \ell^{-1}\{Y(s)\} = \ell^{-1}\left\{\frac{2s^2+3s+1}{(s^2+1)s}\right\}$;

$y(t) = 2\ell^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+1)}\right\} + 3\ell^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)}\right\}. + \ell^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)s}\right\}$;

Utilizando fracciones parciales para descomponer la tercer fracciòn

$y(t) = 2\ell^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+1)}\right\} + 3\ell^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)}\right\}. + \ell^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \ell^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\}$

$y(t) = \ell^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+1)}\right\} + 3\ell^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)}\right\}. + \ell^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}$

Calculando las tranformadas inversas

$y(t) = \cos t + 3sent + 1.$

4. Determina la carga en el capacitor en un circuito RC en serie donde $q(0) = 0$, $R = 2.5$, $C = 0.08$ y

$E(t) = \left\{ \begin{array}{ll} 5 & t \leq 3 \\ 0 & t > 3 \end{array} \right\} = 5H(t-3)$

La suma de voltajes en la malla es:

$Ri + \frac{1}{c}q = E(t)$;

$\frac{dq}{dt} + \frac{1}{Rc}q = \frac{E(t)}{R}$;

Sustituyendo los valores constantes y el voltaje en la fuente

$\frac{dq}{dt} + 5q = \frac{5H(t-3)}{2.5}$;

$q' + 5q = 2H(t-3)$;

aplicando transformada de Laplace para resolver esta ecuación

$\ell\{q' + 5q\} = 2\ell\{H(t-3)\}$;

Si $\ell\{q\} = Q(s)$ entonces

$sQ(s) - q(0) + 5Q(s) = \frac{e^{-5s}}{s}$;

aplicando la condición inicial (la carga inicial es cero);

$Q(s)[s+5] = \frac{e^{-5s}}{s}$;

$Q(s) = \frac{e^{-5s}}{s(s+5)}$;

calculando la transformada inversa de $Q(s)$

$q(t) = \ell^{-1}\{Q(s)\} = \ell^{-1}\left\{\frac{e^{-5s}}{s(s+5)}\right\}$;

$\ell^{-1}\left\{\frac{e^{-6s}}{s(s+5)}\right\} = H(t-3)\ell^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+5)}\right\}_{t\to t-3} = H(t-3)\left[\frac{1}{5} - \frac{e^{-5t}}{5}\right]_{t\to t-3}$;

$q(t) = \frac{2}{5}H(t-3)\left(1 - e^{-5(t-3)}\right)$ carga en el capacitor para cualquier tiempo.

5. Aplica la transformada de Laplace para encontrar la carga $q(t)$ en un circuito LRC cuando $L = 1h$, $R = 20\Omega$, $C = 0.05f$, $E(t) = 150V$ para $t > 0$, $q(0) = 0$ e $i(0) = 0$.

La ecuación diferencial que modela el comportamiento de la carga es

$q'' + \frac{R}{L}q' + \frac{1}{lC}q = \frac{E(t)}{L}$;

sustituyendo valores

$q'' + 20q' + 200q = 150;$

aplicando transformada

$\ell^{-1}\{q'' + 20q' + 200q\} = \ell^{-1}\{150\};$

Si $\ell\{q(t)\} = Q(s)$

$s^2Q(s) - sq(0) - q'(0) + 20(sQ(s) - q(0)) + 200Q(s) = \frac{150}{s};$

aplicando condiciones iniciales

$Q(s)(s^2 + 20s + 200) = \frac{150}{s};$

$Q(s) = \frac{150}{s(s^2+20s+200)};$

$q(t) = 150\ell^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+20s+200)}\right\} = 150\ell^{-1}\left\{\frac{1}{s\left((s+10)^2+100\right)}\right\};$

usando fracciones parciales y recordando el primer teorema de traslación, tenemos

$q(t) = -\frac{3}{4}\left[(\cos 10t + sen10t)\,e^{-10t} - 1\right].$

6. $y'(t) = 1 - sent - \int\limits_0^t i(\sigma)\,d\sigma,\quad y(0) = 0$ (esta es una ecuación integrodiferencial)

$\ell\{y'(t)\} = \ell\left\{1 - sent - \int\limits_0^t i(\sigma)\,d\sigma\right\};$

$sY(s) - y(0) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2+1} - \frac{Y(s)}{s};$

Recordemos que $y(0) = 0;$

$s^2Y(s) = 1\text{-}\frac{s}{s^2+1} - Y(s);$

$Y(s)(s^2+1) = 1\text{-}\frac{s}{s^2+1};$

$Y(s) = \frac{1}{(s^2+1)}\text{-}\frac{s}{(s^2+1)^2};$

$y(t) = \ell^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)} - \frac{s}{(s^2+1)^2}\right\}$

$y(t) = sent\text{-}\frac{t}{2}\cos t.$

7. $\frac{dy}{dt} + 6y(t) + 9\int\limits_0^t y(\sigma)\,d\sigma = 1,\quad y(0) = 0$

$\ell\left\{\frac{dy}{dt} + 6y(t) + 9\int\limits_0^t y(\sigma)\,d\sigma\right\} = \ell\{1\}$

$\ell\left\{\frac{dy}{dt}\right\} + 6\ell\{y(t)\} + 9\ell\left\{\int\limits_0^t y(\sigma)\,d\sigma\right\} = \ell\{1\};$

$sY(s) - y(0) + 6Y(s) + 9\frac{Y(s)}{s} = \frac{1}{s};$

$Y(s)(s^2 + 6s + 9) = 1;$

$Y(s) = \frac{1}{(s+3)^2};$

$y(t) = te^{-3t}.$

8. Calcula la corriente $i(t)$ en un circuito RC, cuando $R = 10$, $C = 0.05f$ y $E(t) = 2(t^2 + t)$.
La ecuación que modela el comportamiento de la corriente es la ecuación integrodiferencial

$iR + \frac{1}{C}\int\limits_0^t i\,(\sigma)\,d\sigma = E(t);$

$i + \frac{1}{RC}\int\limits_0^t i\,(\sigma)\,d\sigma = \frac{E(t)}{R};$

$i + \frac{1}{5}\int\limits_0^t i\,(\sigma)\,d\sigma = \frac{2}{10}(t^2 + t);$

$\ell\left\{i\right\} + \frac{1}{5}\ell\left\{\int\limits_0^t i\,(\sigma)\,d\sigma\right\} = \frac{2}{10}\ell\left\{t^2\right\} + 2\ell\left\{t\right\};$

Si $\ell\left\{i\right\} = I(s)$ entonces

$I(s)$ -$\frac{I(s)}{s} = \frac{1}{10}\left(\frac{4}{s^3} + \frac{2}{s^2}\right);$

multiplicando por esta igualdad por s

$sI(s) - \frac{I(s)}{5} = \frac{1}{10}\left(\frac{4}{s^2} + \frac{2}{s}\right);$

$I(s) = \frac{1}{10}\left(\frac{4}{s^2\left(s-\frac{1}{5}\right)} + \frac{2}{s\left(s-\frac{1}{5}\right)}\right);$

$i(t) = \ell^{-1}\left\{I(s)\right\} = i(t) = \frac{1}{10}\ell^{-1}\left\{\frac{4}{s^2\left(s-\frac{1}{5}\right)} + \frac{2}{s\left(s-\frac{1}{5}\right)}\right\};$

calculando las transformadas

$i(t) = \frac{1}{10}\left[10\left(2t + 9\left(e^{-\frac{t}{5}} - 1\right)\right)\right];$

$i(t) = -9 + 2t + 9e^{-\frac{t}{5}}.$

Problemario de Ecuaciones Diferenciales

Jazmín Juárez Ramírez

1 Ecuaciones de primer orden

1.1 Ecuaciones separables

1. $y' = \frac{x^2+1}{2-y}$;
   cambiando de notación:
   $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+1}{2-y}$
   separando variables:
   $(2-y)\,dy = \left(x^2+1\right)dx$
   integrando ambos lados de la igualdad:
   $$2y - \frac{y^2}{2} = \frac{x^3}{3} + x + C$$

2. $\frac{dy}{dx} = 8x^3y^2; \quad y\,(2) = 3$ este es un problema de valor inicial
   $\frac{dy}{y^2} = 8x^3dx$
   $-\frac{1}{y} = 2x^4 + C$
   $$y = -\frac{1}{2x^4+C}$$

3. $y' = 4\cos(x)sen(x); y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

   $dy = 4\cos(x)\,sen\,(x)\,dx$

   $y = 2\int sen2xdx = -\frac{2}{2}\cos(2x) + C$

   $y = -\cos 2x + C$

   $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 = -\cos\left(2\frac{\pi}{2}\right) + C;\ \ C = -1$

   $$y = -\cos(2x) - 1$$

1.2 Transformación de variables

$f(x,y)$ es homogenea de grado α si

$f(tx,ty) = t^{\alpha} f(x,y)$

$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ es una E.D. homogénea si f es homogenea de grado cero

Ejemplo:

$f(x,y) = \frac{\sec^2(\frac{y}{x})}{\ln(\frac{xy}{y^2})}$

$f(tx,ty) = \frac{\sec^2(\frac{ty}{tx})}{\ln(\frac{tx(ty)}{t^2y^2})} = \frac{\sec^2(\frac{x}{y})}{Ln\ \frac{t^2xy}{t^2y^2}} = f(x,y)$ Ecuación Homogénea

$f(x,y) = \frac{1+x}{2-y}$

$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ f homogénea; hacemos el cambio

$y = ux$

$\frac{dy}{dx} = ux$

$\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$;

$u + x\frac{du}{dx} = f(x,ux) = f(1,u) = F(u)$

$x\frac{du}{dx} = F(u) - u = F(u)$

$\boxed{\frac{du}{f(u)-u} = \frac{dx}{x}}$ Ecuación separable.

1. $\frac{dy}{dx} = \frac{ye^{\frac{y}{x}}+y}{x}$
   comprobamos si es una ecuación homogénea:
   $f(tx,ty) = \frac{tye^{\frac{ty}{tx}}+ty}{tx} = f(x,y)$;
   proponemos el cambio $u = \frac{y}{x}$;
   la ecuación toma la forma:
   $x\frac{du}{dx} + u = \frac{uxe^u+ux}{x}$
   $x\frac{du}{dx} = ue^u$ $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ...$
   $\frac{du}{u}e^{-u} = \frac{dx}{x}$ para resolver la ecuación hacemos una aproximación en series de potencias;
   $$Ln(xc) = \int \frac{e^{-u}}{u} du$$

2. $sen(xy)y' + y^2 - x = 0$;
   $y' = \frac{x-y^2}{sen(xy)}$.
   $f(tx,ty) = \frac{tx-t^2y^2}{sen(t^2xy)}$ No es homogénea.

3. $y' = \frac{x+y}{x-y}$

$f\left(tx,ty\right)=\frac{tx+ty}{tx-ty}=\frac{t(x+y)}{t(x-y)}=f\left(x,y\right)$
$y=ux$
$\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}=\frac{u+1}{1-u};\quad\frac{x+ux}{x-ux}=\frac{x(u+1)}{x(1-u)}$
$u+x\frac{du}{dx}=\frac{u+1}{1-u};\quad x\frac{du}{dx}=\frac{u+1}{1-u}-u$
$\frac{u+1-u+u^2}{1-u}=x\frac{du}{dx};\quad\frac{1+u^2}{1-u}=x\frac{du}{dx}$
$\ln\left(u\right)=\ln\left(x\right)+C$

$$\ln\left(\frac{y}{x}\right)=\ln\left(C_1x\right)$$

4. $y'=\frac{y^2}{xy+x^2}$
$\frac{1-u}{1+u^2}du=\frac{dx}{x};$
$u=Cx;$
$\frac{y}{x}=Cx;$
$\int\frac{du}{1+u^2}-\int\frac{u}{1+u^2}du=Ln\left(x\right)+C$
$\arctan\left(u\right)-\frac{1}{2}\ln\left(1+u^2\right)=\ln\left(x\right)+c$

$$arctan\left(\frac{y}{x}\right)+\ln\left(\frac{x^2+y^2}{x2}\right)^{-\frac{1}{2}}=\ln\left(x\right)+c$$

1.3 Ecuaciones casi-homogéneas

Algunas ecuaciones pueden resolverse proponiendo un cambio de variable distinto a $u=\frac{y}{x}$

1. $y'=\sqrt{x+y}$
$x+y=u^2$
$y'=\frac{d\left(u^2-x\right)}{dx}=2u\frac{du}{dx}-1$
$2u\frac{du}{dx}-1=u$
$\frac{2udu}{u+1}=dx$
$\int\frac{2udu}{u+1}=2\int\frac{(u+1)-1}{u+1}du=2\int\left(1-\frac{1}{u+1}\right)du$
$2u-2\ln\left(u+1\right)=x+c$

$$2\sqrt{x+y}-2\ln\left(\sqrt{x+y}\right)=x+c$$

2. $\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}}$

$\left(\frac{\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}}\right)=\frac{(x+y)+2\sqrt{(x+y)(x-y)}+(x-y)}{(x+y)-(x-y)}=\frac{2x+2\sqrt{x^2+y^2}}{2y}=\frac{2\ x+\sqrt{x^2+y^2}}{2y}$
$\frac{dy}{dx}=\frac{x+\sqrt{x^2+y^2}}{y}\qquad u=x^2+y^2$

$y = \sqrt{x^2 - u^2}$

$y' = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x^2-u^2}}\left(2x - 2u\frac{du}{dx}\right)$

$\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x^2-u^2}}\left(2x - 2u\frac{du}{dx}\right) = \frac{x+u}{\sqrt{x^2-u^2}}$

$x - u\frac{du}{dx} = x + u$

$-du = dx$

$-u = x + c$

$$x + \sqrt{x^2 - y^2} + c = 0$$

1.4 Ecuaciones lineales

1. $\frac{dx}{dy} - 2yx = x$
   $a(x) = -2x$
   $\mu(x) = e^{-2\int xdx}$
   $\mu(x) = e^{-x^2}$
   $y = e^{x^2}\int e^{-x^2}xdx$
   $y = e^{x^2}\left(-\frac{1}{2}e^{-x^2} + c\right)$

$$y = -\frac{1}{2} + ce^{x^2}$$

2. $\frac{dy}{dt} + 2ty = t$
   $a(x) = 2t$
   $\int a(x)\,dx = t^2$
   $\mu(t) = e^{t^2}$
   $y = e^{-t^2}\int e^{t^2}dt$
   $y = e^{-t^2}\left(\frac{1}{2}e^{t^2} + c\right)$

$$y = \frac{1}{2} + ce^{t^2}$$

3. $\frac{dy}{dt} + t^2y = 1$
   $a(t) = t^2$
   $\mu(t) = e^{\frac{t^3}{3}}$
   $\left(\frac{dy}{dt} + 2ty\right)e^{\frac{t^3}{3}} = e^{\frac{t^3}{3}}$
   $\frac{d}{dt}\left(e^{\frac{t^3}{3}}y\right) = e^{\frac{t^3}{3}}$

$e^{\frac{t^3}{3}}y = \int e^{\frac{t^3}{3}}\,dt$

$$y = e^{\frac{t^3}{3}}\left[\int e^{\frac{t^3}{3}}\,dt + c\right]$$

4. $y' - 2y = 1$
   $a(x) = -2 \quad b(x) = 1$
   $\int a(x)\,dx = -2x$
   $\mu(x) = e^{2x}\int e^{-2x}dx$
   $y = e^{2x}\left[-\frac{1}{2}e^{-2x} + c\right]$

$$y = -\frac{1}{2} + ce^{2x}$$

1.5 Ecuación de Bernoulli

1. $xy' + y = \frac{1}{y^2}$
   $y' + \frac{1}{x}y = \frac{y^{-2}}{x}$
   Comparamos con $y' + Q(x)\,y = R(x)\,y^{\alpha}$; entonces
   $Q(x) = \frac{1}{x} \quad R(x) = \frac{1}{x} \quad \alpha = -2 \quad w = y^3$; por lo tanto haciendo un cambio de variable y sustituyendo en la ecuación diferencial se llega a:
   $\frac{dw}{dx} + 3\frac{w}{x} = \frac{3}{x}$ que es una ecuación lineal.
   Resolviendo:
   $\mu(x) = e^{3\int\frac{dx}{x}} = e^{3\ln x} = x^3$
   $w = x^{-3}\int x^3\frac{3}{x}dx = \frac{1}{x^3}\left[3\int x^2dx\right]$
   Integrando:
   $w = \frac{1}{x^3}\left[x^3 + c\right] = 1 + \frac{c}{x^3}$
   Sustituyendo en términos de w se llega a:

$$y^3 = 1 + \frac{c}{x^3}$$

2. $y' - y = e^x y^2$
   $w = y^{-1}$
   $\frac{dw}{dx} + w = -e^{-x}$
   $\mu(x) = e^{\int dx} = e^x$
   $w(x) = e^{-x}\left[-\int e^{2x}dx\right]$
   $w(x) = e^{-x}\left[-\frac{1}{2}e^{2x} + c\right]$
   $w(x) = -\frac{1}{2}e^{x} + ce^{-x}$

$$\frac{1}{y} = -\frac{1}{2}e^{x} + ce^{-x}$$

3. $x^2y' + y^2 = xy$

$w = \frac{1}{y}$
$\frac{dw}{dx} + \frac{w}{x} = \frac{1}{x^2}$
$\mu(x) = x$
$w(x) = \frac{1}{x}\int x\frac{1}{x^2}dx = \frac{1}{x}[\ln x + c]$
$\frac{1}{y} = \frac{1}{x}[\ln x + c]$
$\frac{x}{y} = \ln x + c$

$$e^{\frac{x}{y}} = cx$$

1.6 Ecuaciones exactas

1. $y' = \frac{3x^2-2xy}{x^2-2y}$
   $\left(3x^2 - 2xy\right)dx + \left(2y - x^2\right)dy = 0$
   Identificando las funciones M y N y checando las condiciones de exactitud
   $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = -2x$
   Por lo tanto la ecuación diferencial es exacta
   Proponemos la solución como una función $F = \int M dx + f(y)$
   Sustituyendo M
   $F = \int \left(3x^2 - 2xy\right)dx + f(y)$
   Integrando:
   $F = x^3 - x^2y + f(y)$
   Diferenciando con respecto a y e igualando con N tenemos que
   $\frac{\partial F}{\partial y} = -x^2 + f'(y) = 2y - x^2$
   De aquí obtenemos
   $f'(y) = 2y$
   Por lo tanto $f(y) = y^2$ y la solución propuesta $F = C$ nos da como resultado

$$x^3 - x^2y + y^2 = C$$

2. $2xydx + \left(x^2 + 3y^2\right)dy = 0$
   $M = 2xy \quad N = x^2 + 3y^2$
   $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = 2x$
   $F = \int M dx + f(y)$
   $F = \int 2xydx + f(y)$
   $F = x^2y + f(y)$
   $\frac{\partial F}{\partial y} = x^2 + f'(y) = x^2 + 3y^2$
   $f'(y) = 3y^2$ por lo tanto $f(y) = y^3$

$$x^2y + y^3 = C$$

Ejercicios misceláneos

Ecuaciones de Primer Orden

Problema 1, Sección 2.6 (D. G. Zill)

BERNOULLI

$$x\frac{dy}{dx}+y=\frac{1}{y^2}$$

haciendo $w=y^{-1-n}$

$w=y^{-3}$

Dividiendo todo entre "X"

$$\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x}y=\frac{1}{xy^2}$$

Pasándolo a la forma

$$\frac{dw}{dx}+(-1-n)P(x)w=(-1-n)P(x)$$

tenemos:

$$\frac{dw}{dx}+3\frac{1}{x}w=3\frac{1}{x}$$

Sacamos factor integrante

$$e^{3\int\frac{1}{x}dx}=e^{3\ln x}=x^3$$

entonces tenemos:

$$\frac{dw}{dx}\left[x^3w\right]=3x^2$$

Integrando

$$\int\frac{dw}{dx}\left[x^3w\right]=\int 3x^2dx$$

$$x^3w=\frac{3x^3}{3}+c$$

$$w=\frac{x^3}{x^3}+cx^{-3}$$

$$w=1+cx^{-3}$$

EXACTAS

Problema 1, Sección 2.4 (D. G. Zill)

$$\overset{M}{(2x+4)}dx+\overset{N}{(3y-1)}dy=0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=0 \qquad \frac{\partial N}{\partial x}=0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x+4 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=3y-1$$

$$f(x,y)=\int M(x,y)+g(y)$$

$$f(x,y)=\int(2x+4)+g(y)$$

$$f(x,y)=x^2+4x+g(y)$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=g'(y)\Rightarrow g'(y)=3y-1$$

$$g(y)=\tfrac{3}{2}y^2-y=C$$

$$f(x,y)=x^2+4x+\tfrac{3}{2}y^2-y=C$$

Problema 9, Sección 2.4 (D. G. Zill)

$$\left(y^3-y^2senx-x\right)+\left(3xy^2+2y\cos x\right)dy=0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=3y^2-2senxy$$

$$\frac{\partial N}{\partial x}=3y^2+2ysenx$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=y^3-y^2senx-x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=3xy^2+2ysenx$$

$$f(x,y)=\int M(x,y)dx+g(y)$$

$$f(x,y)=\int\left(y^3-y^2senx-x\right)dx+g(y)$$

$$f(x,y)=\int y^3dx-\int\left(y^2senx-x\right)dx+g(y)$$

Por partes

$u=y^2 \qquad dv=senxdx$

$du=2ydu \qquad v=-\cos x$

$$f(x,y)=y^3x+y^2\cos x-\int\cos x\,2ydy-\int xdx+g(y)$$

$f(x,y)=y^3x+y^2\cos x-\int \cos x\,2y\,dy-$

$\frac{x^2}{2}+g(y)$

$f(x,y)=y^3x+y^2\cos x-\cos xy^2-$

$\frac{x^2}{2}+g(y)$

$f(x,y)=y^3x-\frac{x^2}{2}+g(y)$

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=3y^2+g'(y)\Rightarrow 3y^2+g'(y)=$

$3xy^2+2y\cos x$

$\int g'(y)=\int 2y\cos x\Rightarrow g(y)y^2\cos x$

$f(x,y)=y^3x+y^2\cos x-\cos xy^2-$

$\frac{x^2}{2}+y^2\cos x=C$

$f(x,y)=y^3x-\frac{x^2}{2}\cos x=C$

Ecuaciones de Segundo Orden

Problema 11, Sección 6.1 (D. G. Zill)

$x^2y''+5xy'+4y=0$

Por Cauchy-Euler

$y=x^m \qquad y'=mx^{m-1}$

$y''=m(m-1)x^{m-2}$

Sustituyendo:

$x^2(m-1)mx^{x-2}+5xmx^{m-1}+4x^m=0$

$(m-1)mx^m+5mx^m+4x^m=0$

$(m^2-m)x^m+5mx^m+4x^m=0$

$(m^2-m+5m+4)x^m=0$

$(m^2+4m+4)x^m=0$

$m^2+4m+4=0$

$(m+2)(m+2)=0$

$M_1=-2$

$M_2=-2$

$y=C_1x^{-2}+C_2x^{-2}\ln x$

Problema 1, Sección 4.5 (D. G. Zill)

$y''+y=\sec x$

$y''+y=0$

$m^2+1=0$

$M_1=-2$

$M_2=-2$

Por Euler $senx,\cos x$

$W(senx,cox)=\begin{vmatrix} senx & \cos x \\ \cos x & -senx \end{vmatrix}=-1$

$f(x)=\sec x$

$u'_1(x)=\frac{-y_2(f(x))}{W}$

$u'_1(x)=\frac{-\cos x\ \sec x}{W}$

$u'_1(x)=1\Rightarrow u'_1(x)=x$

$u'_2(x)=\frac{senx\ \sec x}{-1}$

$u'_2(x)=\int \frac{senx}{\cos x}dx$

$u'_2(x)=\ln|\cos(x)|$

$y_p(x)xsenx+\ln(\cos x)$

$y=C_1senx+C_2\cos x+xsenx+$

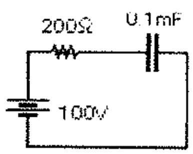
$\ln(\cos x)\cos x$

APLICACIONES

Problema 17 Sección 3.2 (D. G. Zill)

A un circuito en serie en el cual la resistencia es de 200 Ω y la capacitancia es de $10^{-4}F$ se le aplica una tensión de 100V. Calcular : q(x) en el capacitor si q(0)=0 y obtener la corriente i(t).

El circuito queda:



Sabemos que :

$L\dfrac{di}{dv}=V$ Inductor

$Ri=V$ Resistencia

$q\dfrac{1}{c}=V$ Capacitor

Por Leyes de Voltajes de Kirchoff (LVC):

$\sum Vn=0$

$F(t)=iR+q/C$

pero:

$i=\dfrac{dQ}{dt}$

entonces

$f(t)=\dfrac{dQ}{dt}R+\dfrac{q}{C}$

dividiendo entre R

$\dfrac{f}{R}=\dfrac{dQ}{dt}+\dfrac{q}{CR}$

$\dfrac{dQ}{dt}+\dfrac{q}{CR}=\dfrac{f}{R}\rightarrow Ec.\ Lineal$

$\mu(x)=e^{\int P(t)dt}=e^{\left(\frac{1}{RC}\right)t}=e^{50t}$

$e^{50t}q(t)=\int e^{50t}\dfrac{F}{R}dt=\dfrac{F}{R}\int e^{50t}dt$

$e^{50t}q(t)=\dfrac{100}{200}=\dfrac{1}{50}=0.01e^{50t}$

$q(t)=0.01+Ce^{-50t}$

$q(0)=$

$0=0.01+Ce^{-50t}$

$C=0.1$

$i=\dfrac{f(t)-q/C}{R}$

$i=\dfrac{F(t)-q/C}{R}=\dfrac{100-(0.01)(1-e^{-50t})}{200}$

$=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1+e^{-50t}}{20000}$

$q(t)=0.01(1-e^{50t})=\dfrac{1}{2}-\left(\dfrac{1-e^{-50t}}{2}\right)$

$=\dfrac{1}{2}-(1-1+e^{-50t})=\dfrac{e^{-50t}}{2}$

Problema 12 Sección 3.2 (D. G. Zill)

Un termómetro que está en el interior de una habitación se lleva al exterior donde la temperatura del aire es de 5°F después de un minuto el termómetro marca 55°F y a los 5 minutos marca 30°F. ¿Cuál es la temperatura inicial de la habitación?

Solución: Por la Ley del Enfriamiento de Newton.

$\dfrac{dT}{dt}=k(t-t_a)$

donde T= temperatura del objeto
ta= temperatura ambiente

$\dfrac{dT}{dt}=-k-kt_a\rightarrow Ec.\ Lineal$

$P(t)=-k$

$\mu(t)=e^{-\int kdt}=e^{-kt}$

$$\frac{d}{dt}\left(Te^{-kt}\right)=-kt_ae^{-kt}$$

Integrando:

$$Te^{-kt}=-t_a\int ke^{-kt}$$
$$Te^{-kt}=t_ae^{-kt}+C$$
$$T=t_a+Ce^{kt}$$

aplicándolo en el problema:
t(1)=55°F
t(5)=30°F
t(A)=5°F

(1) $55=5+Ce^{k}$ 1 minuto

(2) $30=5+Ce^{5k}$ 5 minutos

(1) $50=Ce^{k}$

(2) $25=Ce^{5k}$

$$C=\frac{50}{e^{k}}$$

igualando las ecuaciones:

$$50Ce^{5k}=25Ce^{k}$$
$$50Ce^{4k}=25$$
$$Ce^{4k}=\frac{25}{50}=\frac{1}{2}$$

sacando logarítmo

$$C\ln e^{4k}=\ln\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$K=0.17$$

Sustituyendo en la fórmula:

$$t(A)=5+54.26\Rightarrow 64.26\circ F$$

SERIES

Problema 13 Sección 6.3 (D. G. Zill)

$4xy'+\frac{1}{2}y'+y=0$ cero punto singular regular

proponemos:

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r}$$
$$y'=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(n+r)x^{n+r-1}$$
$$y''=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r-2}$$

Sustituyendo en la ecuación original:

$$\sum_{n=0}^{\infty}4a_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r-1}+$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{2}(n+r)x^{n+r-1}+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r}=0$$
$$x^{r}\left[\sum_{n=0}^{\infty}4a_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r-1}+\right.$$
$$\left.\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{2}(n+r)x^{n+r-1}+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n}\right]=0$$

haciendo los corrimientos

$$4a_0r(r-1)+\frac{a_0}{2}r+\sum_{n=1}^{\infty}4a_n(n+r)(n+r-1)x^{n-1}+$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2}(n+r)x^{n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n}=0$$

$$\left[4a_0r(r-1)+\frac{a_0}{2}r\right]=0 \qquad 4r^2-\frac{7}{2}r=0$$

$$a_0\left[4r(r-1)+\frac{r}{2}\right]=0 \qquad r\left(4r-\frac{7}{2}\right)=0$$

$$4r^2-4r+\frac{r}{2}=0 \quad r=0 \quad r={}^7\!/_8$$

k=n-1 n=k+1

$$\sum_{n=1}^{\infty}4a_n(n+r)(n+r-1)x^{n-1}$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2}(n+r)x^{n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n-1}=0$$

k=n-1 k=0

$$\sum_{k=0}^{\infty}4a_k(k+r)(k+r)x^n$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_{k+1}}{2}(k+1+r)x^k+\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k=0$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[4a_k(k+1)(k+r)+\frac{a_{k+1}}{2}(k+1+r)\right.$$
$$\left.+a_k\right]x^k=0$$

$$4a_k(k+1)(k+r)+\frac{a_{k+1}}{2}(k+1+r)+a_k=0$$

$$4a_k(k+1)(k+r)+\frac{1}{2}a_{k+1}(k+1+r)+a_k=0$$

$$a_{k+1}=2\frac{(4(k+1)(k+r)+1)a_k}{k+1+r}$$

$$a_{k+1}=8\frac{(k^2+kr+k+r+1)a_k}{k+1+r}$$

Dándole valores a k (k=0,1,2,3...n) y sustituyendo el valor de r queda:

$$y=a_0\left(1-4x^2+\frac{4}{3}x^4\right)$$

Problema 19 Sección 6.2 (D. G. Zill)

$$(x^3-1)y''+4xy'-2y=0$$

proponemos

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n \quad y'=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$$

$$y''=\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)na_nx^{n-2}$$

Sustituyendo en la Ec. Original:

$$(x^2-1)\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}+4x\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$$

$$-2\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^n-\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}$$

$$+4\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^n-2\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0$$

haciendo corrimientos

$$-6a_3x^2-12a_4x^3+8a_3x^2-2a_1x-2a_2x^2=0$$

$$-6a_3x^2-12a_4x^3+6a_3x^2-2a_1x=0$$

$$-12a_4+6a_2=0\Rightarrow -2a_4+a_2=0$$

$$6a_3-2a_1=0\Rightarrow 3a_3-a_1=0$$

k=n k=n-2 k=2 n=k+2

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^n-\sum_{n=4}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}+$$

$$4\sum_{n=2}^{\infty}na_nx^n-\sum_{n=2}^{\infty}a_nx^n=0$$

k=n k=n

$$\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)a_kx^k-\sum_{k=2}^{\infty}(k+2)(k+1)a_{k+2}x^k+$$

$$4\sum_{k=2}^{\infty}4ka_kx^k-\sum_{k=2}^{\infty}2a_kx^k=0$$

$$\sum_{k=2}^{\infty}\left[k(k-1)a_kx^k-(k+2)(k+1)a_{k+2}+\right.$$
$$\left.4ka_kx^k-2a_k\right]x^k=0$$

$$(k(k-1)+4k-2)a_k-(k+2)(k+1)a_{k+2}=0$$
$$(k^2-k+4k-2)a_k-(k+2)(k+1)a_{k+2}=0$$
$$(k^2+3k-2)a_k-(k+2)(k+1)a_{k+2}=0$$
$$a_{k+2}=\frac{(k^2+3k-2)}{(k+2)(k+1)}a_k \qquad k=0,1,2,3,\ldots,n$$
$$-2a_4+a_2=0 \qquad 3a_3-a_1=0$$
$$a_1=3a_3 \qquad a_4=a_2$$
$k=0$
$$a_2=-\frac{2}{2}a_0=-a_0$$
$k=1$
$$a_3=\frac{(1+3-2)}{6}a_1=\frac{1}{3}a_1$$
$k=2$
$$a_4=\frac{(4+6-2)}{8}a_2=a_2$$
$k=3$
$$a_5=\frac{(9+4-2)}{20}a_3=\frac{1}{2}a_3$$
$k=4$
$$a_6=\frac{(16+12-2)}{40}a_4=\frac{13}{20}a_4=\frac{13}{20}a_2$$
$$y=-a_0+a_1\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\ldots\right)+a_2\left(1+\frac{13}{20}+\ldots\right)$$

LAPLACE

Problema 8 Sección 7.3 (D. G. Zill)

$$y''-4y'+4y=t^3$$
usando
$$L\{f^n(t)\}=s^nf(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)-$$
$$f^{(n-1)}(0)$$

$$L\{t^3\}=-y'(0)-sy(0)+s^2y(0)-4[-y(0)+sy(s)]$$
$$+4y(s)$$

$$-s+s^2y(s)+4-4sy(s)+4y(s)=\frac{3!}{s^4}$$
$$y(s)[s^2-4s+4]=\frac{6}{s^4}+(s-4)$$
$$y(s)=\frac{6}{s^4(s-2)^2}+\frac{(s-4)}{(s-2)^2}$$
$$L\{f*g\}=F(s)G(s)$$
$$y(t)L^{-1}\left\{\frac{6}{s^4(s-2)^2}\right\}+L^{-1}\left\{\frac{(s-4)}{(s-2)^2}\right\}$$
$$=L^{-1}\left\{\frac{3!}{s^4}\right\}*L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-2)^2}\right\}+L^{-1}\left\{\frac{s-2}{(s-2)^2}-\frac{2}{(s-2)^2}\right\}$$
$$=L^{-1}\left\{\frac{3!}{s^4}\right\}*L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-2)^2}\right\}+L^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\}-2L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-2)^2}\right\}$$
$$t^3(te^{2t})+e^{2t}-2(te^{2t})$$
$$y(t)=t^4e^{2t}+e^{2t}+2te^{2t}$$

Problema 1 Sección 7.3 (D. G. Zill)

$$y(0)=0 \qquad \frac{dy}{dt}-y=1$$

$$L\left\{\frac{dy}{dt}\right\}-L\{y\}=L\{1\}$$
usando
$$L\left\{\frac{dy}{dt}\right\}=sy(s')-y(0)$$
$$sy(s)-1-y(s)=\frac{1}{s}$$
$$(s-1)y(s)=\frac{1+s}{s}$$

$$y(s)=\frac{1+s}{s(s-1)}$$

por fracciones parciales

$$y(s)=\frac{A}{s}+\frac{B}{s-1}$$

$$\frac{1+s}{s(s-1)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s-1}$$

$$1+s=A(s-1)+B(s)$$

haciendo $s=0$ y $s=1$

$$1=A(-1)+B(0)$$

$$1=-A\Rightarrow A=-1$$

$$s=1$$

$$2=B$$

$$B=2$$

$$y(s)=-\frac{1}{s}+\frac{2}{s-1}$$

$$y(t)=L^{-1}\left\{-\frac{1}{s}\right\}+L^{-1}\left\{\frac{2}{s-1}\right\}$$

$$y(t)=-1+2L^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\}$$

$$y(t)=-1+2e^{t}$$

Los problemas resueltos están propuestos en los siguientes libros:

Matemáticas Avanzadas para Ingeniería
Volumen I.
Peter V. O´ Neil.
C.E.C.S.A.

Ecuaciones Diferenciales Aplicadas.
Spiegel.
Prentice Hall.

Ecuaciones Diferenciales.
Zill.
Iberoamérica.

Problemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.
G. Makarenko.
Quinto Sol.