ÁLGEBRA LINEAL

Unidad 1

1. (Soluciones químicas) Se necesitan tres ingredientes distintos, A, B y C, para producir determinada sustancia. Pero deben disolverse primero en agua, antes de ponerlos a reaccionar para producir la sustancia. La solución que contiene A con 1.5 gramos por centímetro cúbico (g/cm^3), combinada con la solución de B cuya concentración es de 3.6 g/cm^3 y con la solución de C con 5.3 g/cm^3 forma 25.07 g de la sustancia. Si las proporciones de A, B y C en esas soluciones se cambian a 2.5, 4.3 y 2.4 g/cm^3, respectivamente (permaneciendo iguales los volúmenes), se obtienen 22.36 g de la sustancia. Por último, si las proporciones se cambian a 2.7, 5.5 y 3.2 g/cm^3, respectivamente, se producen 28.14 g de la sustancia. ¿Cuáles son los volúmenes, en centímetros cúbicos, de las soluciones que contienen A, B y C?

2. (Escalamiento) En el sistema siguiente todos los coeficientes de x son de distintos órdenes de magnitud que el resto de los coeficientes. En estos casos, los cálculos se simplifican si se escala la variable. Para este sistema, sea $x' = 0{,}001x$. Escriba el sistema con las variables x', y y z, y resuélvalo con la eliminación de Gauss. A continuación calcule x.

$$\begin{aligned} 0{,}004x + y - z &= 15{,}8 \\ 0{,}001x + 5y + z &= 14{,}2 \\ 0{,}001x + y + 5z &= -29{,}8 \end{aligned}$$

3. (Equilibrio en mercados relacionados) Las condiciones de equilibrio entre tres mercados relacionados (carne de pollo, de cerdo y de res) se expresan como sigue:

$$\begin{aligned} 5P_p - P_c - 2P_r &= 1 \\ -2P_p + 6P_c - 3P_r &= 3 \\ -2P_p - P_c + 4P_r &= 10 \end{aligned}$$

   Calcule el precio de equilibrio, en dólares, para cada mercado.

4. Resuelva por propiedades:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 1 & a^2 & b^2 \\ 1 & a^3 & b^3 \end{vmatrix} = ab(b-a)(a-1)(b-1)(a+b+1)$$

5. Aplique la regla de Cramer para despejar x y y del sistema siguiente:

$$\begin{aligned} (\cos\theta)x - (\text{sen}\,\theta)y &= \cos\theta - 2\,\text{sen}\,\theta \\ (\text{sen}\,\theta)x + (\cos\theta)y &= \text{sen}\,\theta + \cos\theta \end{aligned}$$

6. Otra aplicación característica de los sistemas en química es el balanceo de reacciones químicas. Es preciso introducir coeficientes enteros frente a cada uno de los reactivos, para que la cantidad de átomos de cada elemento sea igual en ambos lados de la ecuación. Por ejemplo, en la combustión del metano:

$$a\,\mathrm{CH_4} + b\,\mathrm{O_2} \to c\,\mathrm{CO_2} + d\,\mathrm{H_2O} \tag{1}$$

calcularemos los coeficientes a, b, c y d que balanceen la ecuación. Observe que en el siguiente caso es fácil resolver por aproximación, pero no es el caso general.

(Balanceo de reacciones químicas) Balancee la reacción (1).

7. (Herencia) Un padre desea distribuir sus bienes raíces, cuyo valor es \$234,000, entre sus cuatro hijas de la manera siguiente: $\frac{2}{3}$ de las propiedades deben dividirse por igual entre las hijas. Para el resto, cada hija debe recibir \$3,000 cada año hasta su vigésimo primer cumpleaños. Como entre ellas se llevan 3 años, ¿cuánto recibiría cada una de los bienes de su padre? ¿Qué edad tienen ahora esas hijas?

8. Realice las operaciones indicadas con $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 4 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}$: $-7A + 3B$

9. Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ 5 & -2 & 3 \end{pmatrix}$. Calcule A^{-1} si existe. (Utilice el método de matriz aumentada).

10. Sea E una matriz que representa la operación elemental $R_1 \to R_1 - 3R_2$. Verifique que $\det E = 1$.

11. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & 1 \end{pmatrix}$. Calcule A^{-1} si existe, a través de su adjunta. Para calcular el determinante sólo podrás usar cofactores o propiedades de determinantes (cualquier otra forma de calcular el determinante no será aceptada e invalidará el ejercicio). Compruebe que es su inversa.

12. Resuelva el sistema utilizando la regla de Cramer:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 7 \\ 3x_1 + 8x_2 - x_3 &= 2 \\ -5x_1 - 12x_2 + 6x_3 &= 11 \end{aligned}$$

13. Determine (si es posible) las condiciones de a, b y c tales que el sistema de ecuaciones lineales (a) no tenga solución, (b) tenga exactamente una solución, o (c) tenga un número infinito de soluciones.

$$\begin{aligned} 2x - y + z &= a \\ x + y + 2z &= b \\ 3y + 3z &= c \end{aligned}$$

14. Dar las condiciones para los elementos de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

De modo que $A^{-1} = A^T$.

15. Si $B = C^{-1}AC$, pruebe por inducción matemática que $B^n = C^{-1}A^nC$, para $n \in \mathbb{N}$.

16. Demuestre que no existen matrices $A, B \in \mathbb{M}_{n\times n}$ tales que $AB - BA = I$.

17. Utilizar matrices elementales para encontrar la inversa de

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -5 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$$

18. Decodificar el mensaje enviado vía la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

y las matrices columna $\vec{b}_{3\times 1}$

$$\begin{bmatrix} -4 \\ 18 \\ 50 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 57 \\ -83 \\ 46 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 54 \\ -74 \\ 76 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 37 \\ -50 \\ 45 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 14 \\ -19 \\ 21 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 16 \\ -21 \\ 29 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 38 \\ -52 \\ 34 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 30 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 26 \\ -40 \\ -14 \end{bmatrix}$$

19. Sean A y B dos matrices cuadradas del mismo tamaño invertibles. Demostrar que adj$(AB) =$ adj(B)adj(A).

20. Determine si el conjunto de todas las matrices cuadradas A, $n \times n$ tales que tr$(A) = 0$ es un subespacio de $\mathbb{M}_{n\times n}$.

21. Demuestre que si A y B son matrices invertibles $n \times n$, entonces AB es invertible y que $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

22. Considere el sistema homogéneo de 3×3:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= 0 \end{aligned}$$

encuentre las condiciones sobre los a_{ij} tales que la solución del sistema sea única (sin emplear al determinante de la matriz de coeficientes).

23. Suponga que $A = (a_{ij})$ es una matriz $n \times m$ y $B = (b_{ij})$ es una matriz $m \times q$. Demuestre que:

    a) $(A^t)^t = A$

    b) $(AB)^t = B^t A^t$

    c) Si A es invertible, entonces A^t es invertible y $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

24. Demuestre que para todo número real θ la matriz

$$\begin{pmatrix} \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

    es invertible y encuentre su inversa.

25. Encuentre los números α y β tales que $\begin{pmatrix} 2 & \alpha & 3 \\ 5 & -6 & 2 \\ \beta & 2 & 4 \end{pmatrix}$ sea simétrica.

26. Realice lo que se le pide:

    a) Emplee operaciones elementales con renglones para reducir las matrices dadas a la forma escalonada por renglones y a la forma escalonada reducida por renglones:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 5 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

    b) Encuentre una matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tal que $A \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

27. Demuestre las leyes asociativa y distributiva para la multiplicación de matrices (Usando notación de sumatorias).

28. De los siguientes incisos, realice lo que se le pide:

    a) Encuentre una matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tal que $A\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

    b) Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 8 & -6 \end{pmatrix}$ encuentre un vector no nulo $b = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tal que $Ab = 6b$.

    c) Encuentre B tal que $AB = C$. Si $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.

29. Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ donde $ac \neq 0$. Escriba A como un producto de tres matrices elementales y concluya que A es invertible.

30. Una matriz de probabilidades es una matriz cuadrada donde todos sus elementos son no negativos y la suma de los elementos en cada renglón es 1. Las siguientes matrices son matrices de probabilidades:

$$P = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } Q = \begin{pmatrix} 1/6 & 1/6 & 2/3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/5 & 1/5 & 3/5 \end{pmatrix}$$

    Pruebe que PQ es una matriz de probabilidades.

31. Realice lo que se le pide:

    a) Emplee operaciones elementales con renglones para reducir las matrices dadas a la forma escalonada por renglones y a la forma escalonada reducida por renglones:

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 8 \\ 3 & 5 & 8 \\ -6 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

    b) Multiplique las siguientes matrices usando bloques:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -4 & 2 \\ \hline 3 & 1 & 6 & 4 \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc} 1 & 4 \\ -1 & 0 \\ \hline 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{array}\right)$$

32. Calcule el determinante solicitado suponiendo que $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 8$

   a) $\begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix}$

   b) $\begin{vmatrix} 2a_{11} - 3a_{21} & 2a_{12} - 3a_{23} & 2a_{13} - a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$

   c) $\begin{vmatrix} -3a_{11} & -3a_{12} & -3a_{13} \\ 2a_{21} & 2a_{22} & 2a_{23} \\ 5a_{31} & 5a_{32} & 5a_{33} \end{vmatrix}$

33. Sea $P(x) = ax^4+bx^2+c$, con a, b, c, incógnitas reales. Si se sabe que $P(1) = 4$, $P(-1) = d$ con $d \in \mathbb{R}$ y $P(2) = -2$, determina los valores de d de modo que el sistema:

   a) tenga infinitas soluciones
   b) no tenga solución
   c) tenga solución única

34. En la figura 1 se muestra una red de acequias de irrigación con los flujos medidos en millares de litros por día

   a) Establece y resuelve un sistema de ecuaciones lineales para hallar los flujos posibles f_1, f_2, f_3, f_4 y f_5.
   b) ¿Cuáles son los posibles flujos mínimo y máximo en cada tubería?
   c) Supongamos que DC está cerrado. ¿Qué amplitud de flujo necesitará ser mantenida a través de DB?

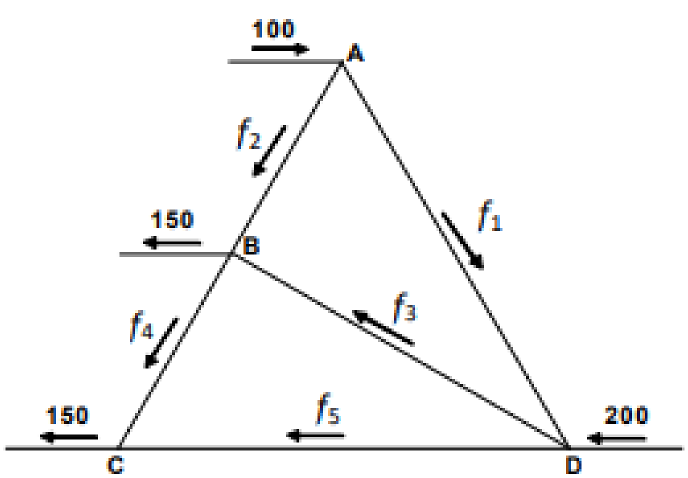

Figura 1

35. Si $M = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, K = \begin{pmatrix} -8 & 16 \\ 0 & 24 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$ Encuentra la matriz Y tal que $MYN - K = 0$

36. Encuentra el determinante de la matriz B

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & -2 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

37. La suma de las tres cifras de un número es 10. La suma de la cifra de las centenas y la cifra de las decenas excede en 4 a la cifra de las unidades, y la suma de la cifra de las centenas y la cifra de las unidades excede en 8 a la cifra de las decenas. ¿Cuál es el número?

    a) Plantea el sistema de ecuaciones
    b) Escribe el sistema en forma matricial
    c) Encuentra la solución utilizando la inversa de la matriz de coeficientes.

38. Dado el sistema de ecuaciones lineales $ax + by = 0, \quad cx + dy = 0$

    a) Muestra que si $x = x_0,\ y = y_0$ es una solución, entonces para todo k, $x = kx_0,\ y = ky_0$ también es solución
    b) Muestra que si $x = x_0,\ y = y_0$ y $x = x_1,\ y = y_1$ son dos soluciones, entonces $x = x_0 + x_1,\ y = y_0 + y_1$ también es solución

39. Usando las propiedades encuentra el determinante de la siguiente matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

40. Problema

    a) Aplicando Gauss-Jordan, resolver

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 7 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 &= 4 \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

    b) Considere el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= a \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 &= b \\ -5x_1 - 5x_2 + 21x_3 &= c \end{aligned}$$

    Demuestre que este sistema es inconsistente si se cumple que $c \neq 2a - 3b$.

41. Problema

a) Calcular el siguiente determinante, empleando el desarrollo de los cofactores

$$\begin{vmatrix} 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & 0 & 4 \\ -28 & 0 & -13 & 6 \\ -10 & -4 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

b) Determinar si la matriz es invertible, de ser así calcule su inversa empleando Gauss-Jordan

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & -2 \\ -1 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

42. Problema
Aplicando la fórmula $A^{-1} = \frac{1}{\det A} AdjA$, siendo la matriz A

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 9 \\ 6 & -10 & 4 \\ 10 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

Calcule A^{-1} y verifique que $AA^{-1} = I$. Desarrolle todos los pasos necesarios.

43. Problema
Tres rectas que no son paralelas, por pares determinan un triángulo en el plano. Suponga que las rectas están dadas por

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13} &= 0 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23} &= 0 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33} &= 0 \end{aligned}$$

Demuestre que el área determinada por las rectas es

$$\frac{\pm 1}{A_{13}A_{23}A_{33}} \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix}$$

44. Problema

 a) Aplicando Gauss-Jordan, resolver el siguiente Sistema de Ecuaciones Lineales.

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= 10 \\ 6x_1 + x_2 + 8x_3 &= 12 \\ 3x_1 - 2x_2 - 4x_3 &= -3 \end{aligned}$$

 b) Aplicando la fórmula $A^{-1} = \frac{1}{\det A} AdjA$, siendo la matriz A

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -12 & 5 \\ 2 & 10 & 3 \\ -2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

 I) Calcule A^{-1} y además
 II) Verifique que se cumple: $AA^{-1} = I$

45. Resuelve

 a) Define que es la inversa de una matriz cuadrada.
 b) Aplica el método de Gauss-Jordan para calcular A^{-1}

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

 c) Usando el resultado en b). Resolver el siguiente sistema como función de α, β.

$$\begin{array}{ccccccc} 2x & + & 4y & - & 4z & = & \alpha \\ 3x & - & y & & & = & \beta \\ x & - & y & - & 6z & = & -\alpha\beta \end{array}$$

46. Se dan los vértices de un paralelogramo $ABCD$ con $A = (0, 1, -1)$, $B = (1, 0, 2)$ y $C = (2, 3, 0)$.

 a) ¿Como se define el producto interno y como se usa para medir el ángulo entre dos vectores?
 b) calcular las coordenadas de $D = (x_0, y_0, z_0)$ considerando que $\vec{AD}$ es paralelo a $\vec{BC}$. Calcular los ángulos internos del vértice A
 c) Calcular el plano que contiene al paralelogramo.
 d) Encontrar el conjunto intersección del plano en iii) y el plano $x + y + z = 2$

47. a) Obtener la forma escalonada reducida de la matriz A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

b) ¿Que nos aporta la forma escalonada reducida de una matriz? Define que es el rango de una matriz.

c) Calcula el rango de A

d) Calcula el conjunto solución del sistema $A\vec{x} = \vec{0}$

48. Para el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & - & 2x_2 & + & ax_3 & = & 1 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ 2x_1 & & & + & ax_3 & = & 3 \end{array}$$

a) Usando la regla de Cramer, resolver el sistema para $a = 2$

b) Encontrar los valores para los cuales el sistema no tiene soluciones.

49. Aplicando las propiedades de los determinantes calcular $\det(A)$, $\det(AA^T)$, $\det(A - \frac{1}{2}A)$ si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

50. Se dan los vértices de un paralelogramo $ABCD$ con $A = (1, 0, -2)$, $C = (0, 1, 3)$ y $D = (2, -1, 1)$.

a) ¿Como se define el producto interno y como se usa para medir el ángulo entre dos vectores?

b) calcular las coordenadas de $B = (x_0, y_0, z_0)$ considerando que $\vec{AD}$ es paralelo a $\vec{BC}$. Calcular los ángulos internos del vértice A.

c) Calcular el plano que contiene al paralelogramo.

d) Encontrar el conjunto intersección del plano en iii) y el plano $x + y + z = 2$

51. a) Resolver por Gauss-Jordan y obtener la forma escalonada reducida de la matriz A

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & & & + & 4x_3 & - & x_3 & = & 0 \end{array}$$

b) ¿Que nos aporta la forma escalonada reducida de una matriz?

c) Usando a) encontrar el rango de la matriz asociada al sistema.

52. Para el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & + & \lambda x_3 & = & 2 \\ x_1 & + & \lambda x_2 & + & x_3 & = & -1 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & -1 \end{array}$$

   a) Usando la regla de Cramer, resolver el sistema para $\lambda = 2$
   b) Encontrar los valores para los cuales el sistema no tiene solución, tiene una única solución y tiene una infinidad de soluciones. Considerar los casos $\lambda = 1$ y $\lambda \neq 1$ a parte.

53. Calcular $\det(A)$, $\det(AA^T)$, $\det(A + \frac{1}{2}A)$ si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & -2 & -2 \\ 3 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

54. Sean A, B y P tres matrices invertibles tales que $B = P^{-1}AP$. Demostrar que:

$$\text{adj}(B) = |A|B^{-1}$$

55. Sean A, B y P tres matrices invertibles tales que $A = PBP^{-1}$. Demostrar que:

$$\text{adj}(A) = |B|A^{-1}$$

56. Considera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} kx + y + z - 1 &= 0 \\ x + ky + z - 1 &= 0 \\ x + y + kz - 1 &= 0 \end{aligned}$$

   ¿Qué valores deben tomar el parámetro k para que el sistema:

   a) Tenga solución única
   b) Tenga un conjunto infinito de soluciones
   c) No tenga solución

57. Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones lineales y muestre con el resultado la ley de los cosenos, donde $a, b, c \neq 0$, son números reales.

$$\begin{aligned} c\cos\alpha + a\cos\gamma &= b \\ b\cos\alpha + a\cos\beta &= c \\ c\cos\beta + b\cos\gamma &= a \end{aligned}$$

58. Encuentre el determinante de la siguiente matriz, utilizando únicamente las propiedades.

$$B = \begin{pmatrix} a_1^2 & a_1 & 1 \\ a_2^2 & a_2 & 1 \\ a_3^2 & a_3 & 1 \end{pmatrix}$$

59. Determine la inversa de la matriz D.

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

60. Considere la siguiente matriz A, ¿para qué valores del parámetro k, la matriz es invertible?

$$A = \begin{pmatrix} k+3 & -1 & 1 \\ 5 & k-3 & 1 \\ 6 & -6 & k+4 \end{pmatrix}$$

61. La suma de las tres cifras de un número es 6. Si el número se divide por la suma de la cifra de las centenas y la cifra de las decenas, el cociente es 41, y si al número se le añade 198, las cifras se invierten. Encontrar el número.

   a) Plantea el sistema de ecuaciones
   b) Escribe el sistema en forma matricial
   c) Encuentra la solución utilizando la inversa de la matriz.

62. Determina los valores de a, b y c de manera que el sistema:

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= a \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 &= b \\ -5x_1 - 5x_2 + 21x_3 &= c \end{aligned}$$

   a) Tenga solución única
   b) Tenga un conjunto infinito de soluciones
   c) No tenga solución

63. Demuestra que en general no se cumple que $|A + B| = |A| + |B|$

64. Encuentra el determinante de la matriz B:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

65. Usando el método de Gauss-Jordan calcule la inversa de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1/2 & -1 & 1/2 \\ 1/6 & 2/3 & 1/6 \\ -1/6 & -2/3 & 5/6 \end{pmatrix}$$

66. Considere el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} -4x + y &= b_1 \\ -3x + 2y + z &= b_2 \\ 3x - y + z &= b_3 \end{aligned}$$

a) Escriba el sistema en su representación matricial.

b) Encuentra las soluciones (x, y, z) del sistema cuando $(b_1, b_2, b_3) = (2, 6, 12)$.
Nota: Puede hacerlo por cualquier método: Gauss-Jordan, Regla de Cramer o a través de la inversa de la matriz de coeficientes. También puede dar por hecho el problema anterior.

67. Considerar el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ 2x + \lambda y + z &= 2 \\ x + y + \lambda z &= \lambda - 1 \end{aligned}$$

a) Determinar el valor de λ para que el sistema sea incompatible.

b) Resolver el sistema para $\lambda = 1$.

68. *a*) Simplificar la expresión $(A^{-1}B + B^{-1}A)(B^{-1}A + A^{-1}B)$.

b) Comprobar el resultado para $A = \begin{bmatrix} -5 & -8 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 9 & -7 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$.

69. Demostrar que el conjunto de matrices $S = \left\{ B \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \mid B = \begin{bmatrix} x & y \\ y & z \end{bmatrix} \right\}$ que conmutan con la matriz $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ fija, satisfacen la ecuación del plano $\mathfrak{P} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid bx + (c - a)y - bz = 0\}$.

70. Decodificar el mensaje enviado vía la matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 8 \\ -2 & -2 & -11 \end{bmatrix}$ y las matrices columna $\vec{b}_{3\times 1}$: $\begin{bmatrix} 85 \\ 20 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 49 \\ 96 \\ -133 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 87 \\ 173 \\ -238 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 52 \\ 140 \\ -200 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ 41 \\ -63 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 109 \\ 178 \\ -238 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -69 \\ -46 \\ 46 \end{bmatrix}$.

71. Determine (si es posible) las condiciones para a, b y c tales que el sistema de ecuaciones lineales (a) no tenga solución, (b) tenga exactamente una solución y (c) tenga infinitas soluciones:

$$\begin{aligned} 2x + y + 3z &= a \\ 5x - 5y + 6z &= b \\ 4x - 3y + 5z &= c \end{aligned}$$

72. *a*) Simplificar la expresión $(A^{-1}B^{-1} - B^{-1}A^{-1})(AB + BA)$.

    b) Comprobar el resultado para $A = \begin{bmatrix} 5 & -11 \\ 4 & -9 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} -6 & -5 \\ -7 & -6 \end{bmatrix}$.

73. Utilice matrices elementales para encontrar la inversa de:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}, \quad c \neq 0$$

74. Una matriz cuadrada A se denomina antisimétrica si $A^T = -A$. Demostrar lo siguiente:

    a) Si A es una matriz antisimétrica invertible, entonces A^{-1} es antisimétrica.

    b) Si A y B son antisimétricas, entonces también lo son A^T, $A + B$, $A - B$ y kA para cualquier escalar k.

    c) Toda matriz cuadrada A se puede expresar como la suma de una matriz simétrica y una matriz antisimétrica.
    Sugerencia: Considerar la identidad $A = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T)$.

75. Decodifique el mensaje enviado vía la matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 1 \\ -4 & -1 & -7 \\ 6 & 1 & 10 \end{bmatrix}$ y las matrices columna:

$$\begin{bmatrix} -82 \\ 24 \\ -43 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 28 \\ 115 \\ -159 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -58 \\ -174 \\ 240 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -44 \\ -42 \\ 55 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -104 \\ -26 \\ 26 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -62 \\ -158 \\ 217 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -102 \\ -38 \\ 43 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 14 \\ 114 \\ -159 \end{bmatrix}.$$

76. La altura de un objeto, en un instante t, que se mueve en línea recta (vertical) con aceleración constante a, está dada por la ecuación de posición $s = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + s_0$. La altura s está medida en ft, la aceleración a en ft/s^2, t en s, v_0 es la velocidad inicial en $t = 0$ y s_0 es la altura inicial. Determine los valores a, v_0 y s_0, si $s = 52$ en $t = 1$, $s = 52$ en $t = 2$ y $s = 20$ en $t = 3$. Resolver el sistema ocupando Gauss-Jordan.

77. El sistema de ecuaciones obtenido en la pregunta anterior, tiene una forma matricial $AX = B$, donde A es una matriz 3×3. Escribir A^{-1} y A como un producto de matrices elementales.

78. Sea

$$A = \begin{pmatrix} \lambda - 1 & 1 & -1 \\ 0 & \lambda - 2 & 1 \\ \lambda & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

    a) Determinar los valores de λ para los que A es invertible.

    b) Considerando λ como el número de letras de tu primer nombre. Obtener adj(A) y A^{-1}.

79. Sea C la matriz inversa de B. Mostrar que C es única.

80. En un cajero automático se introducen billetes de 10, 20 y 50 dólares. El número total de billetes es 130 y el total de dinero es 3000 dólares. Se sabe que el número de billetes de 10 dólares es k veces los billetes de 50 dólares.

    a) Calcula el número de billetes de cada tipo, suponiendo que $k = 2$.

    b) Para $k = 3$, ¿qué ocurre con la situación del cajero planteada?

81. Demuestre el determinante de Vandermonde:

$$\begin{vmatrix} a^2 & a & 1 \\ b^2 & b & 1 \\ c^2 & c & 1 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(b-c)$$

82. De ser posible encuentre la solución del sistema lineal mediante la matriz inversa usando la adjunta de la matriz de coeficientes:

$$\begin{aligned} 3x - 3y + 3z &= 9 \\ 2x - y + 4z &= 7 \\ 3x - 5y - z &= 7 \end{aligned}$$

83. En los siguientes enunciados escriba F si el enunciado es falso y V si es verdadero.

    a) En un sistema de ecuaciones lineales, si el determinante de la matriz de coeficientes es cero, quiere decir que el sistema tiene solución única.

    b) La operación de multiplicar un renglón por un número diferente de cero no es una operación elemental.

    c) El producto de dos matrices invertibles da como resultado una matriz invertible.

    d) A un sistema de ecuaciones lineales que no tiene solución se le llama sistema inconsistente.

    e) Un sistema homogéneo puede no tener ninguna solución.

    f) Si en un sistema lineal homogéneo hay más incógnitas que ecuaciones, el sistema tiene un número infinito de soluciones.

    g) Toda matriz cuadrada se puede escribir como suma de una matriz simétrica y una antisimétrica.

    h) El producto punto es asociativo.

84. Usando el método de Gauss-Jordan calcule la inversa de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 13 & -4 \\ -1/3 & -11/3 & 1 \\ 1/3 & 2/3 & 0 \end{pmatrix}$$

85. Considere el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}&-\tfrac{1}{3}y+\tfrac{1}{3}z=b_1\\&13x-\tfrac{11}{3}y+\tfrac{2}{3}z=b_2\\&-4x+y=b_3\end{aligned}$$

Encuentre todas las soluciones para

a) $(b_1,b_2,b_3)=(3,-3,3)$

b) $(b_1,b_2,b_3)=(0,-3,1)$

c) $(b_1,b_2,b_3)=(0,0,0)$

Puede hacerlo por cualquier método: Gauss-Jordan, Regla de Cramer o a través de la inversa de la matriz de coeficientes.

86. Sea $A=E_1E_2E_3E_4$, la matriz de tamaño 3×3 donde $E_1=\frac{1}{2}R_2$, $E_2=R_2-4R_1$, $E_3=P_{13}$ y $E_4=R_1+2R_2$. Determine A^{-1} como producto de matrices elementales.

87. Determinar para qué valores de k el sistema tiene solución

$$\begin{aligned}kx+y+z&=1\\x+ky+z&=1\\x+y+kz&=1\end{aligned}$$

88. Sean A y B las siguientes matrices. Calcule AB y escriba cada una de las columnas de AB como combinación lineal de las columnas de A.

$$A=\begin{pmatrix}7&1&4\\2&-3&5\end{pmatrix}\quad \text{y}\quad B=\begin{pmatrix}1&6\\0&4\\-2&3\end{pmatrix}$$

89. Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones utilizando el método de Gauss-Jordan.

$$\begin{aligned}x+y+z&=7\\2x+3y+z&=18\\-x+y-3z&=1\end{aligned}$$

90. Utiliza la matriz inversa para resolver el siguiente problema. Si $M=\begin{bmatrix}-3&5\\-1&2\end{bmatrix}$, $K=\begin{bmatrix}-8&16\\0&24\end{bmatrix}$, $N=\begin{bmatrix}2&-1\\-2&-3\end{bmatrix}$. Encuentra la matriz Y tal que $NYM-K=O_2$, donde O_2 es la matriz nula de dimensión 2×2.

91. Sean las matrices no cuadradas $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $C = (c_{ij})$ y $D = (d_{ij})$ tales que $D = A(B + C)$:

    a) ¿Escribe las dimensiones de las matrices A, B, C y D?

    b) Escribe usando sumatorias el elemento d_{st} de la matriz D y

    c) Las condiciones necesarias para s y t.

92. Utiliza únicamente las propiedades (indicando cada propiedad utilizada) para resolver el siguiente problema.

$$\text{Si } \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \delta$$

    Cuánto vale el determinante

$$\begin{vmatrix} 2a & -6b & 2c \\ -d & 3e & -f \\ g & -3h & i \end{vmatrix}$$

93. Utilice el método de Gauss-Jordan para resolver (si es posible) el siguiente sistema lineal

$$\begin{aligned} 3x - 3y + 3z &= 9 \\ 2x - y + 4z &= 7 \\ 3x - 5y - z &= 7 \end{aligned}$$

94. Utilizando la definición formal, encuentre el determinante de la TRANSPUESTA de la matriz de coeficientes dada en el problema anterior.

95. Escriba al AZAR, una matriz de 3×3. Encuentre su forma escalonada reducida por renglones. La forma escalonada reducida es probablemente la matriz identidad I_3!!! Explique esto.

96. Dado el sistema lineal

$$\begin{aligned} x + 2y &= 3 \\ 3x + 4y &= 1 \end{aligned}$$

    a) Escriba el sistema lineal en forma matricial.

    b) Encuentre la inversa de la matriz de coeficientes (G-J) y resuelva el sistema lineal.

97. Sea A una matriz de $n \times n$ y c un número real distinto de cero, verifique lo siguiente.

    a) Si una matriz B se obtiene de la matriz A multiplicando los elementos de un renglón por c, entonces $|B| = c|A|$

    b) Si una matriz B se obtiene de la matriz A intercambiando dos renglones entonces, $|B| = -|A|$

    c) Si una matriz B se obtiene de la matriz A sumando c veces un renglón a otro entonces, $|B| = |A|$

98. Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones usando su método preferido visto en clase

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 7, \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 &= 4, \\ 6x_1 + x_2 + 3x_3 &= 20. \end{aligned}$$

99. Sea $A = (a_{ij})$ una matriz de 3×3 tal que $\det A = 8$. Encuentre el determinante de las siguientes matrices

$$\begin{pmatrix} -3a_{11} & -3a_{12} & -3a_{13} \\ 2a_{31} & 2a_{32} & 2a_{33} \\ 5a_{21} & 5a_{22} & 5a_{23} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 2a_{11} - 3a_{21} & 2a_{12} - 3a_{22} & 2a_{13} - 3a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

100. Balancea la ecuación química de la siguiente reacción:

$$\mathrm{Na_2CO_3 + C + N_2 \longrightarrow NaCN + CO}$$

101. Para que valores de k la matriz B es singular.

$$B = \begin{pmatrix} k & -k & 3 \\ 0 & k+1 & 1 \\ k & -8 & k-1 \end{pmatrix}$$

102. Encuentra el determinante de la siguiente matriz utilizando las propiedades.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

103. Calcula el siguiente determinante

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & -2 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

104. Representa en forma matricial el siguiente sistema de ecuaciones y resuélvelo mediante el método de Gauss-Jordan.

$$\begin{aligned} 4x - y + z &= 4 \\ 2y - z + 2x &= 2 \\ 6x + 3z - 2y &= 12 \end{aligned}$$

105. Determina la matriz inversa de A mediante su adjunta

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

106. Utiliza propiedades de determinantes para calcular

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

107. Dadas las matrices

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

calcula

$$E^2 - 3DC.$$

108. Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones lineales y muestre con el resultado la ley de los cosenos, donde a, b, $c \neq 0$, son números reales.

$$\begin{aligned} c\cos\alpha + a\cos\gamma &= b \\ b\cos\alpha + a\cos\beta &= c \\ c\cos\beta + b\cos\gamma &= a \end{aligned}$$

109. Encuentre el determinante de la siguiente matriz, utilizando únicamente las propiedades.

$$B = \begin{pmatrix} a_1^2 & a_1 & 1 \\ a_2^2 & a_2 & 1 \\ a_3^2 & a_3 & 1 \end{pmatrix}$$

110. Determine la inversa de la matriz D.

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

111. a) Define que es la inversa de una matriz cuadrada.

b) Aplica el método de Gauss-Jordan para calcular A^{-1}

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

c) Usando el resultado en b). Resolver el siguiente sistema como función de α. (Usar b))

$$\begin{aligned} 9x + 3y - 3z &= 3 \\ 4x + 2y &= 0 \\ x + 2y + 4z &= \alpha \end{aligned}$$

112. Para las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Calcular $\det(AB^2)$, $\det(A^{-1}B^T)$ y $\det(2A^2 \cdot B^3)$

113. a) Si $a \in \mathbb{R}$, calcular el determinante de la matriz A

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & a \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & a \end{vmatrix}$$

b) Usando la regla de Cramer, resolver el sistema para $a = 2$

$$\begin{aligned} x - 2y + az &= 1 \\ 3x + 2y + z &= 2 \\ 2x + az &= 3 \end{aligned}$$

114. Para el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{array}{ccccccc} & \lambda 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = -6\alpha \\ 2x_1 & + & x_2 & + & (\beta+1)x_3 & & = 4 \\ & \beta x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & = 2\alpha \end{array}$$

a) Encontrar los valores de β y α para los cuales el sistema tiene solución única, soluciones infinitas y para cuales es inconsistente.

115. Contestar los siguientes incisos explicando su razonamiento de manera clara. Suponga que A es una matriz de orden n, $A \in M^{n,n}(\mathbb{R})$.

a) Definir a la matriz transpuesta.

b) Si $B = A^T A$, explicar por que B es simétrica.

c) Explicar por qué si A es invertible entonces B invertible

116. a) Define que es la inversa de una matriz cuadrada.

b) Aplica el método de Gauss-Jordan para calcular A^{-1}

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Usando el resultado en b). Resolver el siguiente sistema como función de α, β.

$$\begin{aligned} 2x + 2y + 3z &= \alpha \\ 2x - 2y &= 2\beta \\ x - 2y - z &= \alpha - \beta \end{aligned}$$

y calcular la norma de la solución $\tilde{\mathbf{x}}(\alpha, \beta)$.

117. Calcular para que valores del siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \lambda x + y + z &= 1 \\ x + \lambda y + z &= 1 \\ x + y + \lambda z &= 1 \end{aligned}$$

   a) Se tiene una solución única
   b) Se tiene una infinidad de soluciones
   c) El sistema es inconsistente

118. Si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & a \end{pmatrix}, \qquad \text{con } a \neq 0$$

calcular, usando inducción matemática, la matriz A^n. (Recordar la siguiente factorización $a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \cdots + a + 1)$).

119. Sabiendo que A es simétrica e invertible

   a) Demostrar que A^{-1} también es simétrica.
   b) Explicar por que $\det(A^{-1}) \neq 0$.
   c) Demostrar usando las propiedades del determinante que A^n también es invertible y $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$
   d) Si B es una matriz invertible, explicar por que $M = B \cdot B^T$ es invertible y $\det(M) > 0$.

120. Hallar los valores de k para que el sistema

$$\begin{aligned} x + 2y + kz &= 2 \\ kx + (k+2)y - kz &= 5k \\ 3x + (k+4)y + (2k+3)z &= 4k + 5 \end{aligned}$$

   a) Tenga solución única.
   b) No tenga solución.
   c) Tenga infinidad de soluciones.

121. a) Si las matrices A y B son invertibles, despejar a la matriz C de la siguiente ecuación matricial:

$$3AB - 7ACB + 5BA = (A - B)(A + B)$$

   b) Comprobar el resultado para

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ -3 & -7 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & 11 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$$

122. Demuestre que no existen matrices $A, B \in M_{n\times n}$ tales que

$$AB - BA = I.$$

Sugerencia: Demuestre que $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

123. Demostrar que las matrices simétricas 2×2 de la forma

$$\begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix}$$

que conmutan con la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

fija, satisfacen la ecuación del plano

$$\mathcal{P} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid Ax + By + Cz = 0\}$$

Donde $A = b, B = c - a \quad y \quad C = -b$.

124. Decodificar el mensaje enviado vía la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 3 & -4 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

y las matrices columna $\vec{b}_{3\times 1}$

$$\begin{pmatrix} 52 \\ -83 \\ -26 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -19 \\ 10 \\ 12 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -100 \\ 80 \\ 60 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -71 \\ 28 \\ 46 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -79 \\ 38 \\ 51 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -19 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -132 \\ 184 \\ 72 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 39 \\ -78 \\ -20 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 11 \\ -41 \\ -5 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -32 \\ 43 \\ 16 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -50 \\ 44 \\ 29 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -90 \\ 164 \\ 45 \end{pmatrix}.$$

125. Hallar lo valores de k para que el sistema

$$\begin{aligned} x + 3y + kz &= -5 \\ kx + (2k+3)y - kz &= k + 2 \\ 2x + (k+3)y + 10z &= 3k + 5 \end{aligned}$$

a) Tenga solución única.
b) No tenga solución.
c) Tenga infinidad de soluciones.

126. a) Si las matrices A y B son invertibles, despejar a la matriz C de la siguiente ecuación matricial:

$$5AB + 2ACB - 7BA = (A+B)(A-B)$$

b) Comprobar el resultado para

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -9 \\ 3 & -7 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 13 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$$

127. Dar las condiciones para los elementos de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

De modo que $A^{-1} = A^T$.

128. Hallar por lo menos una matriz B simétrica 2×2 tal que

$$(A+B)(A-B) = A^2 - B^2,$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -7 \\ -7 & 4 \end{bmatrix}.$$

129. Decodificar el mensaje enviado vía la matriz

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

y las matrices columna $\vec{b}_{3\times 1}$

$$\begin{bmatrix} 10 \\ -35 \\ -13 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 38 \\ -19 \\ 15 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 30 \\ -16 \\ 11 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 12 \\ 17 \\ 17 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 26 \\ -15 \\ 10 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 24 \\ 12 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -48 \\ 46 \\ -11 \end{bmatrix}.$$

130. Sean $A_1, A_2, \cdots, A_k$ matrices invertibles del mismo tamaño. Demostrar que

$$\operatorname{adj}(A_1 A_2 \cdots A_k) = \operatorname{adj}(A_k)\operatorname{adj}(A_{k-1})\cdots\operatorname{adj}(A_2)\operatorname{adj}(A_1)$$

131. Para el sistema:

$$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ 2x - z = -1 \\ 2y + 3z = 3 \end{cases}$$

a) Escribe su representación matricial.
b) Encuentra la inversa de la matriz de coeficientes.
c) Verifica que la matriz que encontraste en b) es en efecto la inversa solicitada.
d) Resolvuelve el sistema usando el inciso b).
e) Verifica tu resultado.

132. Si $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \delta$ Utiliza las propiedades (indicando cual utilizas) para decir cuánto vale el determinante:

$$\begin{vmatrix} a & -b & c \\ -d & e & -f \\ g & -h & i \end{vmatrix}$$

133. Demuestra que $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$ con $n \in \mathbb{Z}^+$

134. Llena el siguiente cuadro:

Matriz	**Definición**	**Ejemplo**
Nilpotente		
Simétrica		
No singular		

135. Con base en la matriz escalonada reducida por renglones ¿Cómo se sabe cuál es la solución de un sistema de ecuaciones lineales no homogéneo? ¿Y si el sistema es homogéneo?

136. Explica brevemente qué representa un sistema de ecuaciones lineales 2x2 y cómo se identifica su solución de manera gráfica.

137. Escribe los pasos del método de Gauss-Jordan indicando cuáles son las operaciones renglón.

138. Sea $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ ¿Es el $gen(S)$ un s.e.v? Demuestra que lo es o presenta un contraejemplo para mostrar que no lo es.

139. Para el sistema:

$$\begin{cases} x - 3y + z = 0 \\ -2x + 2y - 3z = 0 \\ 4x - 8y + 5z = 0 \end{cases}$$

a) Determina una base para el espacio nulo.
b) ¿Qué es geométricamente el espacio nulo?
c) Encuentra el $ran(A)$ y la nulidad de la matriz A.

140. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & \alpha+1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ \beta \\ 3 \end{pmatrix}$$

¿Cuándo el sistema $Ax = b$ tiene solución única, infinidad de soluciones, no tiene solución?

141. Calcular el determinante de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta \\ 0 & \alpha & 0 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 & \alpha & 0 \\ \beta & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

142. Pablo y Alicia llevan entre los dos 160 €. Si Alicia le da 10 € a Pablo, ambos tendrán la misma cantidad. ¿Cuánto dinero lleva cada uno?

143. Invertir la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & -1 \\ \beta & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

144. Considere el sistema. ¿Para qué valor de k tendrá soluciones no triviales?

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0 \\ -x_1 + 7x_2 - x_3 = 0 \\ 4x_1 - 11x_2 + kx_3 = 0 \end{cases}$$

145. Obtener los valores x_1, x_2 y x_3 del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 25000 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 40000 \\ 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 65000 \end{cases}$$

146. Considere los puntos que forman una imagen en dos dimensiones, $a = (5, 2)$, $b = (9, 2)$, $c = (9, 6)$, $d = (5, 2)$, realizar las siguientes operaciones: 1.- rotar $\frac{\pi}{2}$, 2.- reducir la imagen a la mitad y 3.- trasladar la esquina inferior derecha de la imagen al punto de origen. ¿Cuáles son los puntos resultantes?

147. Considere la siguiente matriz, ¿para qué valores de α no tiene inversa?

$$\begin{pmatrix} -\alpha & \alpha - 1 & \alpha + 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 - \alpha & \alpha + 3 & \alpha + 7 \end{pmatrix}$$

148. Una economía regional está compuesta por tres sectores principales: Agricultura, Industria, Servicios. Durante un año de observación, se recogen los siguientes datos de consumo intersectorial (es decir, lo que cada sector compra de los otros para su propia producción):

    a) Para producir 100 unidades de agricultura, se requieren: 30 unidades de agricultura, 20 unidades de Industria, 10 unidades de Servicios.
    b) Para producir 100 unidades de industria, se requieren: 20 unidades de agricultura, 40 unidades de Industria, 20 unidades de servicios.
    c) Para producir 100 unidades de servicios, se requieren: 20 unidades de agricultura, 10 unidades de Industria, 30 unidades de servicios.

    La demanda externa (consumo de los hogares, exportaciones, gobierno, etc.) es de: 80 unidades de Agricultura, 90 unidades de Industria, 100 unidades de Servicios.

149. a) Desarrollar y simplificar la expresión

$$(A^{-1}B + B^{-1}A)(B^{-1}A + A^{-1}B)$$

    b) Comprobar el resultado para

$$A = \begin{bmatrix} -5 & -8 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 9 & -7 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$$

150. a) Determinar para qué valores de α la matriz es invertible. b) Aplica el método de Gauss-Jordan para calcular A^{-1} para el resto de casos:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & \alpha \end{bmatrix}$$

151. Encontrar los valores de λ tales que a) Existe una solución única. b) El sistema es consistente pero no hay solución única. c) El sistema es inconsistente:

$$\begin{cases} \lambda x + y + z = 1 \\ x + \lambda y + z = \lambda \\ x + y + \lambda z = \lambda^2 \end{cases}$$

152. Aplicar la regla de Cramer para resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x + 4y - 3z = -1 \\ x + y - 3z = 2 \\ 3x + 5y + 5z = 3 \end{cases}$$

153. Sea el plano que intersecta a los ejes en $A(2, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$ y $C(0, 0, 2)$.
a) Calcular el ángulo en el vértice C.
b) Calcular la distancia del plano al punto $Q(2, 2, 2)$.
c) Encontrar la ecuación del plano y la intersección con el plano $\Pi_2 : x + 4y - 6z = 1$.

154. Suponga que $a \neq 0$. a) Calcular el determinante, aplicando las propiedades de los determinantes:

$$D(x) = \begin{vmatrix} x & a & a & a \\ a & x & a & a \\ a & a & x & a \\ a & a & a & x \end{vmatrix}$$

b) Resolver $D(x) = 0$.

155. Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones con el método de Gauss-Jordan:

$$\begin{cases} 3x + 2y - 3z = 1 \\ -2x + 5y + 8z = 7 \\ x + y - 3z = 10 \end{cases}$$

156. Dadas las matrices D y E, realiza la operación $D^2 - 3E$:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

157. Utiliza propiedades de determinantes y calcula el valor de:

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & -6 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & 1 \\ 4 & -1 & 5 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

158. Determina la matriz adjunta y con ella la inversa de la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Unidad 2

1. Determine si el conjunto de vectores dado es linealmente independiente o dependiente:

$$\mathcal{P}_4 : 2x, x^3 - x^2, x^4 - x, x + x^2$$

2. Para qué valores de alfa son linealmente dependientes los vectores:

$$(2, 3, 1), (4, -6, 2), (1, 2, \alpha)$$

3. Considere la ecuación diferencial homogénea

$$y'''(x) + y''(x) + y'(x) = 0$$

   Demuestre que la ecuación diferencial es un espacio vectorial bajo las reglas usuales para las sumas de funciones y multiplicación por un escalar.

4. Demostrar que los vectores

$$u_1 = (1, 0, 1), u_2 = (1, -2, -1), u_3 = (0, 3, 2)$$

   forman una base para $\mathbb{R}^3$. Expresar cada uno de los vectores de la base canónica como combinación lineal de u_1, u_2 y u_3.

5. Encuentre una base ortonormal $\mathbb{R}^4$ que incluya los vectores:

$$u_1 = (1, 1, 2, 1) \text{ y } u_2 = (3, 0, 4, 1)$$

6. Para el sistema homogéneo

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 &= 0 \\ 3x_1 + 12x_2 + 6x_3 + 3x_4 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 &= 0 \\ x_2 + 3x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

   Determina:

   a) Una base para el espacio solución del sistema.

   b) La nulidad y el rango de la matriz de coeficientes.

7. Usando el método de Gram-Schmidt determine una base ortonormal para

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$$

8. Hallar una matriz ortogonal cuyos dos primeros renglones sean múltiplos escalares, respectivamente, de la matriz dada:

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

9. Construya una base ortonormal en $\mathbb{R}^3$ comenzando con la base $\{v_1, v_2, v_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

10. Encuentre el núcleo, imagen, rango y nulidad de la transformación lineal dada.

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; \quad T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x + y$$

11. Determine si el subconjunto dado H del espacio vectorial V es un subespacio de V:

$$V = \mathbb{R}^3; \quad H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x + 2y - z = 0 \right\}$$

12. En $\mathbb{R}^3$: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$

    a) Determine si el conjunto de vectores es linealmente independiente o linealmente dependiente (use sólo definición).

    b) Determine si el conjunto de vectores genera el espacio vectorial dado (use sólo definición).

    c) Con los resultados obtenidos en los incisos a) y b) determine si el conjunto de vectores es una base para el espacio a que se refiere. Justifique su respuesta.

    d) En caso de que el conjunto de vectores sea una base ¿Cuánto vale la dimensión del espacio a que se refiere? Justifique su respuesta.

13. Escriba $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ en términos de la base dada: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

14. Determine si el conjunto de todas las matrices cuadradas A, $n \times n$ tales que $\det(A) = 0$ es un subespacio de $\mathbb{M}_{n\times n}$.

15. Determine si el conjunto

$$S = \{1 + 3x + 2x^2 + x^3, 1 + 2x + 3x^2 - 2x^3, 3 - 2x - x^2 + x^3, 6 - 5x - x^2 - x^3\}$$

es una base de P_3.

16. Encuentre (a) una base para el espacio columna de A, (b) una base para el espacio renglón de A, (c) rango(A), una base para el espacio nulo de A y (d) nulidad(A) si

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ -5 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

17. Sean $\mathcal{B}_1 = \{(1,-2,1),(1,1,1),(3,-1,2)\}$ y $\mathcal{B}_2 = \{(1,-4,-3),(1,-1,-1),(2,1,1)\}$ dos bases de $\mathbb{R}^3$. Obtenga las matrices de coordenadas de los vectores con respecto a la base 2, si sus matrices de coordenadas con respecto a la base $\mathcal{B}_1$ son:

$$[\vec{u}_1]_{\mathcal{B}_1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -108 \\ -30 \\ 102 \end{bmatrix}, [\vec{u}_2]_{\mathcal{B}_1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -17 \\ 44 \\ 15 \end{bmatrix}, [\vec{u}_3]_{\mathcal{B}_1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -210 \\ -369 \\ 219 \end{bmatrix},$$

$$[\vec{u}_4]_{\mathcal{B}_1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -226 \\ -440 \\ 246 \end{bmatrix}, [\vec{u}_5]_{\mathcal{B}_1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -236 \\ -370 \\ 252 \end{bmatrix}, [\vec{u}_6]_{\mathcal{B}_1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 101 \\ 154 \\ -108 \end{bmatrix},$$

$$[\vec{u}_7]_{\mathcal{B}_1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -40 \\ 22 \\ 39 \end{bmatrix}, [\vec{u}_8]_{\mathcal{B}_1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 8 \\ 22 \\ -9 \end{bmatrix}, [\vec{u}_9]_{\mathcal{B}_1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -201 \\ -372 \\ 213 \end{bmatrix},$$

$$[\vec{u}_{10}]_{\mathcal{B}_1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -48 \\ -18 \\ 48 \end{bmatrix}, [\vec{u}_{11}]_{\mathcal{B}_1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -91 \\ -188 \\ 93 \end{bmatrix}$$

18. Si A es una matriz cuadrada $n \times n$ e invertible, obtener una fórmula para adj(adj(adj(A))).

19. Determine si el conjunto

$$S = \{4 - x + 3x^2 + 2x^3, -5 + 2x - 4x^2 - 3x^3, -1 + x - 2x^2 - x^3, 1 + 5x - 3x^2 - 3x^3\}$$

es una base de P_3.

20. Encuentre (a) una base para el espacio columna de A, (b) una base para el espacio renglón de A, (c) rango(A), una base para el espacio nulo de A y (d) nulidad(A) si

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -5 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \\ -3 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

21. Sean $\mathcal{B}_1 = \{(1,1,1),(5,11,12),(-2,3,4)\}$ y $\mathcal{B}_2 = \{(1,-1,1),(3,-2,-2),(-2,2,-3)\}$ dos bases de $\mathbb{R}^3$. Obtenga las matrices de coordenadas de los siguientes vectores con respecto a la base 2, si sus matrices de coordenadas con respecto a la base $\mathcal{B}_1$ son:

$$[\vec{u}_1]_{\mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} -2166 \\ 295 \\ -366 \end{bmatrix}, [\vec{u}_2]_{\mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} 349 \\ -47 \\ 54 \end{bmatrix}, [\vec{u}_3]_{\mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} -2802 \\ 378 \\ -444 \end{bmatrix},$$

$$[\vec{u}_4]_{\mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} 2148 \\ -289 \\ 333 \end{bmatrix}, [\vec{u}_5]_{\mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} 1676 \\ -224 \\ 248 \end{bmatrix}, [\vec{u}_6]_{\mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} 1043 \\ -140 \\ 159 \end{bmatrix}$$

22. Obtener una base ortonormal a partir de la base $\beta_1 = \{(2,-1,-1),(1,3,-2),(1,1,1)\}$.

23. Sea V el conjunto de todas las funciones de un conjunto no vacío X en un cuerpo K. Para todo par de funciones $f, g \in V$ y cualquier escalar $k \in K$, con la suma y producto por escalar definido como:
$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
y
$$(kf)(x) = kf(x)$$
para todo $x \in K$. Demostrar que V es un espacio vectorial sobre K.

24. Escriba a la matriz $E = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ como combinación lineal de las matrices:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

25. Considere la siguiente base de $\mathbb{R}^2$: $S = \{u_1 = (1,2), u_2 = (2,3)\}$ y $P = \{v_1 = (1,3), v_2 = (1,4)\}$. Hallar:
   a) La matriz cambio de base de S a P
   b) La matriz cambio de base de P a S

26. Sea V el conjunto de los pares ordenados (a,b) de números reales con suma en V y producto por escalar en V definidos como:
$$(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)$$
$$k(a,b) = (ka, 0)$$
Demuestre que V satisface los axiomas de un espacio vectorial, salvo por uno de ellos, mencione cuál.

27. Probar que los polinomios $(1-x)^3$, $(1-x)^2$, $1-x$ y 1 generan el espacio $P_3(x)$ de todos los polinomios de grado menor o igual a 3.

28. Calcular la matriz cambio de base P desde la base canónica de $\mathbb{R}^2$ hasta la base $S = \{(1,2),(3,5)\}$, la matriz cambio de base Q desde la base S hasta la base canónica y el vector coordenado $v = (a,b)$ relativo a S.

29. Sea V el conjunto de sucesiones infinitas $(a_1, a_2, \ldots)$ en un cuerpo k. Donde la suma y el producto por escalar están definidos por:
$$(a_1, a_2, \ldots) + (b_1, b_2, \ldots) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots)$$
$$k(a_1, a_2, \ldots) = (ka_1, ka_2, \ldots)$$
donde $a_i, b_i \in K$. Probar que V es un espacio vectorial sobre k.

30. Sea U y W los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^4$:

    a) $U = \{(a, b, c, d) \mid b - 2c + d = 0\}$

    b) $W = \{(a, b, c, d) \mid a = d, b = 2c\}$

    hallar una base y la dimensión de a) U, b) W y c) $U \cap W$.

31. Calcular la matriz cambio de base P desde la base canónica de $\mathbb{R}^2$ hasta la base $S = \{(2, 5), (3, 7)\}$, la matriz cambio de base Q desde la base S hasta la base canónica y el vector coordenado $v = (a, b)$ relativo a S.

32. Considere el subespacio U de $\mathbb{R}^4$ generado por:

$$v_1 = (1, 1, 1, 1) \qquad v_2 = (1, 2, 4, 5) \qquad v_3 = (1, -3, -4, -2)$$

    Halle una base ortonormal de U.

33. Si W_1 y W_2 son subespacios vectoriales de V y $W_1 + W_2$ es el conjunto de todos los vectores $v \in V$ tales que $v = w_1 + w_2$ donde $w_1 \in W_1$ y $w_2 \in W_2$. Demuestra que $W_1 + W_2$ es un subespacio vectorial de V.

34. Sean $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ y $T = \{w_1, w_2, w_3\}$ dos bases del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$, donde $w_1 = (3, 2, 0)$, $w_2 = (2, 1, 0)$ y $w_3 = (3, 1, 3)$. Si

$$P_{T \to S} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

    ¿Cuáles son los vectores de la base S?

35. Sean $S = \{(-1, 2, 1), (0, 1, 1), (-2, 2, 1)\}$ y $T = \{(-1, 1, 0), (0, 1, 0), (0, 1, 1)\}$ dos bases para el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$. Si $[v]_s = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

    a) Encuentra $T_{T \to S}$ y $T_{S \to T}$

    b) Usando a) encuentra $[v]_T$

    c) ¿Quién es v?

36. Considera el siguiente sistema homogéneo:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_4 &= 0 \\ -2x_1 - 2x_2 + x_3 - 5x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 &= 0 \\ 4x_1 + 4x_2 - x_3 + 9x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Determina:

a) Una base para el espacio solución del sistema

b) La nulidad y el rango de la matriz de coeficientes

37. Construye una base ortonormal para $\mathbb{R}^3$ a partir de los vectores $v_1 = (1, -1, 1)$, $v_2 = (-2, 3, -1)$, $v_3 = (-3, 5, -1)$ y $v_4 = (1, 2, -4)$

38. Problema

a) Determinar si el siguiente conjunto de vectores en $\mathbb{R}^3$ de la forma (x, x, x), genera un espacio vectorial, de no ser así, indique que propiedades de las 10 no se cumplen y justifique adecuadamente

b) Determine si el siguiente conjunto de vectores es linealmente dependiente o independiente

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

c) Encuentre el rango y la nulidad de la siguiente Matriz, justificando los pasos para llegar a ello

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & -2 \\ -3 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

39. Problema

a) Escriba $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, de manera general en términos de la base

$$\begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

40. Problema

    a) Determinar si el siguiente conjunto de vectores en $\mathbb{R}^3$ de la forma (x, x, x), genera un espacio vectorial, de no ser así, indique que propiedades de las 10 no se cumplen y justifique adecuadamente

    b) Determine si el siguiente conjunto de vectores es linealmente dependiente o independiente

    $$\begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 9 \\ -12 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \\ -18 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -23 \\ 25 \\ 0 \\ -56 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}$$

    c) Encuentre el rango y la nulidad de la siguiente Matriz, justificando los pasos para llegar a ello

    $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & -2 \\ -3 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

41. Problema

    a) Escriba $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, de manera general en términos de la base

    $$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

42. Problema
    Encuentre una base Ortonormal para $P_3[0, 1]$, sug. parta de la base canónica $\{1, x, x^2, x^3\}$

43. Problema
    Construir el conjunto Ortonormal asociado, al siguiente conjunto de vectores $\{3 - 4x + 3x^2, -1 + 2x - x^2, 2 + x + 2x^2\}$ en $P_2[0, 1]$

44. Problema

    a) En $\mathbb{R}^3$ suponga que $(X)_{B_1} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, donde $B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$, escriba X, en términos de la base $B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix} \right\}$

    b) Dada la siguiente transformación Lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x + 2y \\ -5x - 4y \end{pmatrix}$, y considerando $B_1 = B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Calcular: $nu(T), im(T), \rho(T), \nu(T)$

45. Si W_1 y W_2 son s.e.v de un e.v V y $W = \{w \in V \mid w = x + y \text{ con } x \in W_1, y \in W_2\}$ ¿Es W un s.e.v de V? Utiliza las dos propiedades de cerradura para averiguar la respuesta.

46. Para el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{aligned} x - 3y + z &= 0 \\ x{-}2x + 2y - 3z &= 0 \\ 4x - 8y + 5z &= 0 \end{aligned}$$

a) Encuentra el espacio nulo o espacio solución.
b) Encuentra una base para el espacio solución del sistema homogéneo.
c) ¿Cuál es la dimensión del espacio nulo?
d) ¿Geométricamente qué es el espacio nulo?

47. Calcula el vector v si se sabe que $[v]_s = (0, 1, 0, 2)$ y

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

48. Sean $S = \{(-1, 2, 1), (0, 1, 1), (-2, 2, 1)\}$ y $T = \{(-1, 1, 0), (0, 1, 0), (0, 1, 1)\}$ bases para $\mathbb{R}^3$.

a) Sabiendo que $[v]_s = (2, 0, 1)$ encuentra $[v]_T$.
b) Encuentra la matriz de transición de la base T a la base S.
c) Encuentra $[(-4, 6, 3)]_s$ usando la matriz del inciso b)

49. Sea H el conjunto solución del sistema

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{matrix} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \end{matrix} \right\}$$

a) Probar que H es un subespacio
b) Calcular una base para H.
c) Obtener una matriz A (rectangular) tal que $Ker(A) = H$.

50. a) Define a $ER(A)$ y $EC(A)$ de una matriz A. ¿Son un subespacio?
b) Calcular una base para $EC(A)$ si A es

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Determinar si $v = e_1 - e_2 - e_3 + e_4$ y $u = -25e_1 + 6e_2 + 7e_3 + 7e_4$ están en $N(A)$
d) Calcular el rango y la nulidad de A.
e) Calcular una base para $N(A)$

51. a) Definir el concepto de conjunto generador de un espacio vectorial
    b) Considere a

$$\mathcal{A} = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\end{pmatrix}\right\}$$

    Determinar la dimensión del subespacio generado por los vectores.
    c) La base obtenida en b) no es una base de $\mathbb{R}^4$, extenderla a una base de todo el espacio $\mathbb{R}^4$.

52. Sea $W_1 = \left\{\begin{pmatrix}a & b\\ c & -a\end{pmatrix}, a, b, c \in \mathbb{R}\right\}$ y $W_2 = \left\{\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} \in \mathcal{M}^{2,2} : a = 0, b = -c\right\}$. Calcular una base y la dimensión de $W_1 \cap W_2$ y W_1.

53. Sea $V = \mathbb{R}^3$, y $v_1 = (1, -2, 1)$, $v_2 = (3, -1, 2)$, $v_3 = (2, 1, 2)$.
    a) ¿Son linealmente independientes?
    b) ¿Forman una base de $\mathbb{R}^3$?
    c) Sea $\mathcal{B}' = \{v_1, v_2, v_3\}$. Calcular la matriz cambio de base de $\mathcal{B} = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$ a la nueva base.
    d) Obtener las coordenadas de $\mathbf{v} = (-2, 1, 3)$ en la nueva base.

54. Uno de los vectores $v_1 = (7, 2, 5)$, $v_2 = (7, 2, -5)$ se puede expresar como combinación lineal del espacio columna de la matriz

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ 1 & 1 & 4\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

    a) Determinar la combinación lineal.
    b) Determinar una ecuación o conjunto de ecuaciones que cumple el espacio generado por las columnas de la matriz.

55. Sea H el conjunto solución del sistema

$$\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : \begin{aligned} x + 2y + z - 2t &= 0\\ 2x + 4y + 4z - 3t &= 0\\ 3x + 6y + 7z + 4t &= 0\end{aligned}\right\}$$

    a) Probar que H es un subespacio
    b) Calcular una base para H.
    c) Obtener una matriz A (rectangular) tal que $Ker(A) = H$.

56. a) Define a $ER(A)$ y $EC(A)$ de una matriz A. ¿Son un subespacio?

    b) Calcular una base para $EC(A)$ y $ER(A)$ si A es

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 6 \\ 3 & -1 & 4 & -2 \\ 6 & -1 & 10 & -1 \end{pmatrix}$$

    c) Determinar si $v = e_2 + e_3 - e_4$ y $u = e_1 - e_4$ están en $N(A)$

    d) Calcular una base para $N(A)$.

    e) Calcular la nulidad y el rango de A.

57. a) Definir el concepto de conjunto generador de un espacio vectorial

    b) Considere a

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

    Mostrar que $\mathcal{A}$ genera a $\mathbb{R}^3$, y encontrar una base de $\mathbb{R}^3$ contenida en $\mathcal{A}$.

    c) Calcular la matriz cambio de base de la base canónica $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ a la base encontrada en $\mathcal{A}$.

    d) Expresar a $v = (-3, 1, 2)$ en la nueva base en b).

58. Para que valores de a son linealmente independientes los siguientes vectores

$$(a, -1, -1) \quad (-1, a, -1) \quad (-1, -1, a)$$

Sugerencia: Use la regla de Cramer.

59. a) Encontrar una base para el plano formado por todos los vectores perpendiculares a $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

    b) Encuentre una base para la recta perpendicular al plano generado por

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} \right\}$$

60. Una matriz es antisimétrica si $A^T = -A$. Suponga que $A \in \mathcal{M}^{3,3}(\mathbb{R})$.

    a) Explicar por que si una matriz es antisimétrica entonces su diagonal es cero.

    b) Explicar por que el conjunto de matrices antisimétricas es un subespacio.

    c) Calcular la dimensión del subespacio de matrices antisimétricas $\Pi = \{A \in \mathcal{M}^{3,3}(\mathbb{R}) : A \text{ es antisimétrica}\}$

61. Determinar si el conjunto de todas las soluciones a la ecuación diferencial lineal homogénea de orden dos con coeficientes constantes $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$ es un subespacio de $C^2(-\infty, \infty)$.

62. Determine si el conjunto $S = \{7 - x + 4x^2 - 2x^3, 2 - 9x + 5x^2 - x^3, 1 + 5x - x^2 - x^3, -3 - 2x + 5x^2 - 7x^3\}$ es una base de P_3.

63. Encuentre (a) una base para el espacio columna de A, (b) una base para el espacio renglón de A, (c) rango(A), (d) una base para el espacio nulo de A y (e) nulidad(A) si:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & -3 \\ 4 & 5 & 8 \\ -3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

64. Sean $\mathfrak{B}_1 = \{(3, 4, -1), (1, 2, 0), (-2, -3, 1)\}$ y $\mathfrak{B}_2 = \{(3, 2, -1), (-1, 1, -2), (1, 2, -2)\}$ dos bases de $\mathbb{R}^3$. Decodifique el mensaje vía las matrices de coordenadas de los vectores con respecto a la base $\mathfrak{B}_1$, si las matrices de coordenadas de los vectores respecto a la base $\mathfrak{B}_2$ son:

$$[\vec{u}_1]_{\mathfrak{B}_2} = \begin{bmatrix} 36 \\ 62 \\ -94 \end{bmatrix}, \quad [\vec{u}_2]_{\mathfrak{B}_2} = \begin{bmatrix} -27 \\ -38 \\ 53 \end{bmatrix}, \quad [\vec{u}_3]_{\mathfrak{B}_2} = \begin{bmatrix} -8 \\ -10 \\ 11 \end{bmatrix},$$

$$[\vec{u}_4]_{\mathfrak{B}_2} = \begin{bmatrix} -155 \\ -210 \\ 290 \end{bmatrix}, \quad [\vec{u}_5]_{\mathfrak{B}_2} = \begin{bmatrix} -58 \\ -80 \\ 111 \end{bmatrix}, \quad [\vec{u}_6]_{\mathfrak{B}_2} = \begin{bmatrix} -161 \\ -223 \\ 306 \end{bmatrix}, \quad [\vec{u}_7]_{\mathfrak{B}_2} = \begin{bmatrix} -261 \\ -358 \\ 503 \end{bmatrix}$$

65. Determine si el conjunto $S = \{-5+4x-3x^2+6x^3, 3-3x+2x^2-5x^3, 7-x+2x^2+x^3, 6-x+x^2-x^3\}$ es una base de P_3.

66. Encuentre (a) una base para el espacio columna de A, (b) una base para el espacio renglón de A, (c) rango(A), (d) una base para el espacio nulo de A y (e) nulidad(A) si:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 6 & 3 \\ 5 & -7 & 7 \\ -4 & 6 & -4 \end{bmatrix}$$

67. Sean $\mathfrak{B}_1 = \{(3, 4, -1), (1, 2, 0), (-2, -3, 1)\}$ y $\mathfrak{B}_2 = \{(3, 2, -1), (-1, 1, -2), (1, 2, -2)\}$ dos bases de $\mathbb{R}^3$. Decodifique el mensaje vía las matrices de coordenadas de los vectores con respecto a la base $\mathfrak{B}_2$, si las matrices de coordenadas de los vectores respecto a la base $\mathfrak{B}_1$ son:

$$[\vec{u}_1]_{\mathfrak{B}_1} = \begin{bmatrix} -60 \\ -45 \\ -134 \end{bmatrix}, \quad [\vec{u}_2]_{\mathfrak{B}_1} = \begin{bmatrix} 40 \\ -30 \\ 23 \end{bmatrix}, \quad [\vec{u}_3]_{\mathfrak{B}_1} = \begin{bmatrix} -55 \\ -10 \\ -88 \end{bmatrix},$$

$$[\vec{u}_4]_{\mathfrak{B}_1} = \begin{bmatrix} -76 \\ -15 \\ -123 \end{bmatrix}, \quad [\vec{u}_5]_{\mathfrak{B}_1} = \begin{bmatrix} 12 \\ -33 \\ -20 \end{bmatrix}, \quad [\vec{u}_6]_{\mathfrak{B}_1} = \begin{bmatrix} -84 \\ 56 \\ -56 \end{bmatrix}$$

68. Sean $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ y $T = \{w_1, w_2, w_3\}$ dos bases del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$, donde $w_1 = (5, 3, 0)$, $w_2 = (9, 5, 3)$ y $w_3 = (3, 1, 3)$. Si la matriz de cambio de la base T a la base S está dada por:

$$P_{T\to S} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

¿Cuáles son los vectores de la base S?

69. Considera las siguientes bases del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$, $B = \{(0, -2, 3), (0, 1, 1), (1, 1, 0)\}$ y $C = \{(0, -1, 1), (0, 3, 0), (1, -1, 1)\}$. Sean $[u]_C = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $[v]_B = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, dos vectores escritos en términos de las bases B y C respectivamente.

   a) Determinar la matriz de transición de la base C a la base B.
   b) Determinar la matriz de transición de la base B a la base C.
   c) Utilizando cambio de base, encuentra $[u]_B$.
   d) Utilizando cambio de base, encuentra $[v]_C$.
   e) ¿Quiénes son u y v?

70. Construya una base ortonormal en $\mathbb{R}^3$ comenzando con la base:

$$\{v_1, v_2, v_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

71. Sea $V = \mathbb{R}^3$ y W el subconjunto de V dado por

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + 3y - z = 0 \right\}$$

   a) Demuestre que W es un subespacio vectorial de V.
   b) Encuentre una base ortonormal para W.

72. En $M_{2\times 2}$, escriba la matriz $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ en términos de la base:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \right\}$$

73. En $\mathbb{R}^2$, sea $(x)_{B_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ donde $B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$. Escriba x en términos de la base $B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.

74. Determinar una condición sobre los números a y b tales que formen una base ortonormal en $\mathbb{R}^2$:

$$\left\{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}\right\} \quad \text{y} \quad \left\{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}\right\}$$

75. Sea $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz = 0\}$. Determinar si el conjunto V es un subespacio de $\mathbb{R}^3$, la operación suma y multiplicación por un escalar es la usual en $\mathbb{R}^3$.

76. ¿El conjunto $\{(1, 2, 3), (-1, 2, 3), (5, 2, 3)\}$ es un conjunto generador de $\mathbb{R}^3$? Justificar su respuesta. En caso de que su respuesta sea no, podría dar un conjunto generador de $\mathbb{R}^3$.

77. Encontrar una base para el espacio de solución del siguiente sistema homogéneo:

$$\begin{aligned} 2x + 3y - 4z &= 0 \\ x - y + z &= 0 \\ 2x + 8y - 10z &= 0 \end{aligned}$$

78. Determinar el rango y nulidad de la matriz A:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

79. Expresar el polinomio $2x^3 - 3x^2 + 5x - 6$ en términos de la base $B_2 = \{1, 1+x, x+x^2, x^2+x^3\}$.

80. Construir una base ortonormal para el conjunto $\{(x, y, z) \mid 3x - 2y + 6z = 0\}$.

81. Mostrar que la siguiente matriz es ortogonal, considerar que λ es cualquier real:

$$A = \begin{pmatrix} \sin(\lambda) & \cos(\lambda) \\ \cos(\lambda) & -\sin(\lambda) \end{pmatrix}$$

82. Obtener la $\text{proy}_H(\vec{v})$. Donde $H = \{(x, y, z, w) \mid x = y; w = 3y\}$, considerar que $\vec{v} = (-1, 2, 3, 1)$.

83. Obtener una base ortonormal a partir de la base $\beta_1 = \{(1, 1, 0), (3, 1, -1), (2, 1, -1)\}$.

84. Obtener una base ortonormal a partir de la base $\beta_1 = \{(1, 0, -1), (3, 1, -2), (1, -1, 2)\}$.

85. Determine si el conjunto de todas las ternas ordenadas de números reales, junto con las operaciones dadas, es un espacio vectorial. Si no lo es, enumere las propiedades que no se cumplen.

$$(x_1, y_1, z_1) \oplus (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$
$$c \odot (x, y, z) = (x, 1, z)$$

86. Determine una base para el espacio solución de $Ax = 0$ donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

87. Sean $S = \{(1,2),(0,1)\}$ y $T = \{(1,1),(2,3)\}$ bases para $\mathbb{R}^2$. Sean $v = (1,5)$ y $w = (5,4)$.

   a) Determine los vectores de coordenadas de v y w con respecto a la base T.

   b) ¿Cuál es la matriz de transición $P_{S \leftarrow T}$ de la base T a la base S?

   c) Determine los vectores de coordenadas de v y w con respecto a S utilizando $P_{S \leftarrow T}$.

88. Determine el rango de la matriz A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ -1 & -1 & -4 & -2 \\ 3 & 4 & 11 & 8 \end{pmatrix}$$

89. Proporcione una base para el espacio generado por: $f(x) = 2x + 3$, $g(x) = x - 1$ y $H(x) = -x - 4$.

90. Exprese al vector $u(x) = \frac{1}{3}x - 1$ en la base obtenida en el problema anterior, en la base canónica y obtenga la matriz cambio de base.

91. Sea $V = \mathbb{R}^3$. Determine si el subconjunto dado es un subespacio vectorial. De serlo, encuentre una base para dicho subespacio y determine su dimensión.

   a) $W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - z = 0 \right\}$

   b) $W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x = 1 - 3t, y = 2 - 4t, z = 5t \right\}$

92. Determine si el conjunto de matrices genera el espacio vectorial $V = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

   a) Explique si el conjunto anterior forma una base para $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Si su respuesta es no, indique cuáles de ellos constituyen una base para V.

93. Sean $B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, $B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ y $B_3 = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ bases para $\mathbb{R}^2$. . Demuestre lo siguiente:

   a) B_1, B_2 y B_3 forman bases para $\mathbb{R}^2$. Justifique su respuesta.

   b) Encuentre las matrices A, B, C y D de cambio de base de B_1 a B_2, de B_2 a B_3, de B_1 a B_3 y de B_3 a B_1.

   c) Sea $x \in \mathbb{R}^2$ tal que $(x)_{B_2} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix}$. Determine $(x)_{B_1}$ y $(x)_{B_3}$.

94. Sea A la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} -15 & 3 & -15 \\ 1 & -1 & 5 \\ -5 & 1 & -5 \\ -11 & 3 & -15 \end{pmatrix}$$

   a) Determine el subespacio imagen de A: Im(A).
   b) Determine el subespacio nulo de A: N_A.
   c) Determine la nulidad $\nu(A)$ y el rango $\rho(A)$ de la matriz A.
   d) ¿El vector $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ pertenece al espacio nulo N_A de A? (Justifique su respuesta)
   e) ¿El vector $\begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ pertenece a la Im(A)? (Justifique su respuesta)

95. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & 6 \\ -1 & 2 & -4 & -3 \\ 3 & 0 & 1 & 10 \end{pmatrix}$$

   Determine si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos.

   a) Los vectores columna son linealmente independientes.
   b) Los vectores filas generan a $\mathbb{R}^4$.
   c) La dimensión del espacio generado por los vectores columna es menor que 4.
   d) A puede ser una matriz de cambio de base.
   e) El espacio nulo de A es el espacio trivial $\{0\}$.

96. Sea $S = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n\}$ ¿Es gen(S) un s.e.v? Demuestra o presenta un contraejemplo según sea el caso.

97. Sean A y B dos conjuntos de vectores en el espacio vectorial V, tales que $A \subset B$. Escribe F para falso, V para verdadero y N para no necesariamente, según corresponda.

   a) ( ) El gen(A) y el gen(B) son e.v de dimensión igual a la dimensión de V.
   b) ( ) Si los vectores en A son l.i, entonces los vectores de B también son l.i.
   c) ( ) Si los vectores en A son l.d no hay manera de que los vectores de B sean l.i.
   d) ( ) Todo vector en V se escribe como una c.l única de los vectores de A.

98. Demuestre que el conjunto de números reales positivos forma un espacio vectorial bajo las operaciones

$$x + y = xy \qquad \text{y} \qquad \alpha x = x^{\alpha}.$$

99. Sea $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ un conjunto de vectores linealmente independiente. Determine si el siguiente conjunto de vectores

$$\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2,\ \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3, \ldots, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \cdots + \mathbf{v}_n$$

es linealmente independiente o linealmente dependiente. Justifique su respuesta.

100. Encuentre a) el rango, b) la nulidad y c) una base para la imagen y el espacio nulo de la siguiente matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

101. En P_3 exprese el polinomio $4x^2 - x + 5$ en términos de la base

$$\{1, 1 - x, (1 - x)^2, (1 - x)^3\}.$$

102. Construya una base ortonormal para el espacio dado por

$$\Omega = \{(x, y, z) : 3x - 2y + 6z = 0\}.$$

103. Dados los subespacios H y K de un espacio vectorial V, la suma de H y K es el conjunto de todos los vectores en V que pueden escribirse como la suma de dos vectores, uno en H y otro en K; esto es,

$$H + K = \{w \mid w = u + v \text{ con } u \in H \text{ y } v \in K\}$$

¿Es el conjunto $H + K$ un s.e.v de V? Si lo es prueba las condiciones necesarias y si no lo es propón un contraejemplo.

104. Sean

$$S = \{(2, 0, 1), (1, 2, 0), (1, 1, 1)\} \quad \text{y} \quad T = \{(6, 3, 3), (4, -1, 3), (5, 5, 2)\}$$

dos bases para $\mathbb{R}^3$.

a) Encuentra la matriz de transición de la base T a la base S.
b) Encuentra el vector de coordenadas de $v = (4, -9, 5)$ utilizando la matriz de transición que encontraste en el inciso anterior.

105. a) Si A es una matriz de 7×5, ¿Cuál es el mayor valor posible para el rango de A? Explica tu respuesta.
b) ¿Cuál es la relación que existe entre la nulidad y el rango de la matriz $A_{m\times n}$?

106. a) Si A es una matriz de 7×5, ¿Cuál es el mayor valor posible para el rango de A? Explica tu respuesta.

b) ¿Cuál es la relación que existe entre la nulidad y el rango de la matriz $A_{m\times n}$?

107. Se dan los vértices de un paralelogramo $ABCD$ con

$$A = (0, 1, -1), \qquad B = (1, 0, 2) \qquad \text{y} \qquad C = (2, 3, 0).$$

a) Calcular las coordenadas de $D = (x_0, y_0, z_0)$ considerando que $\overrightarrow{AD}$ es paralelo a $\overrightarrow{BC}$. Calcular los ángulos internos del vértice A.

b) Calcular el plano que contiene al paralelogramo.

c) Encontrar el conjunto intersección del plano en ii) y el plano $x + y + z = 2$.

108. Determine si el conjunto de todas las funciones continuas $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$, tales que

$$\int_a^b f(x)\, dx = 0,$$

son un subespacio de $C(-\infty, \infty)$.

109. Determine si el conjunto

$$S = \left\{1 - x - 3x^2 + 2x^3,\ -1 + 3x + 4x^2 - 3x^3,\ -1 - 3x + 5x^2,\ 1 - x + 5x^2 + 2x^3\right\}$$

es una base de P_3.

110. Encuentre (a) una base para el espacio columna de A, (b) una base para el espacio renglón de A, (c) rango(A), una base para el espacio nulo de A y (d) nulidad(A) si

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -1 \\ -3 & 5 & 3 \\ -5 & 6 & -2 \end{bmatrix}.$$

111. Sean $\mathcal{B}_1 = \left\{-1 - 3x - 4x^2,\ 1 + 2x + x^2,\ -3 - 5x - x^2\right\}$ y

$$\mathcal{B}_2 = \left\{-4 + 3x + 4x^2,\ 1 - x + x^2,\ -2 + 2x - x^2\right\}$$

dos bases de P_2. Decodifique el mensaje enviado vía las matrices de coordenadas de los vectores con respecto a la base $\mathcal{B}_2$, si

$$[r_1(x)]_{\mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} -101 \\ -563 \\ -161 \end{bmatrix}, \qquad [r_2(x)]_{\mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} 356 \\ 1985 \\ 567 \end{bmatrix}, \qquad [r_3(x)]_{\mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} 27 \\ 148 \\ 42 \end{bmatrix},$$

$$[r_4(x)]_{\mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} 437 \\ 2549 \\ 740 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad [r_5(x)]_{\mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} -392 \\ -2380 \\ -700 \end{bmatrix}.$$

112. Determine si el conjunto

$$S = \{-1 - 3x + 5x^2 - 4x^3,\ 1 + 3x - 4x^2 + 4x^3,\ -1 - x - x^2 - 2x^3,\ -2 - x^2 - 2x^3\}$$

es una base de P_3.

113. Encuentre (a) una base para el espacio columna de A, (b) una base para el espacio renglón de A, (c) rango(A), una base para el espacio nulo de A y (d) nulidad(A) si

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -2 & 5 & 1 \\ -4 & 8 & -4 \end{bmatrix}.$$

114. Sean $\mathcal{B}_1 = \{-1 - 3x - 4x^2,\ 1 + 2x + x^2,\ -3 - 5x - x^2\}$ y

$$\mathcal{B}_2 = \{-4 + 3x + 4x^2,\ 1 - x + x^2,\ -2 + 2x - x^2\}$$

dos bases de P_2. Decodifique el mensaje enviado vía las matrices de coordenadas de los vectores con respecto a la base $\mathcal{B}_1$, si

$$[r_1(x)]_{\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} 35 \\ -194 \\ -153 \end{bmatrix}, \qquad [r_2(x)]_{\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} 168 \\ -2078 \\ -1346 \end{bmatrix}, \qquad [r_3(x)]_{\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} 45 \\ -573 \\ -369 \end{bmatrix},$$

$$[r_4(x)]_{\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} -180 \\ 1987 \\ 1315 \end{bmatrix}.$$

115. Sea W el conjunto de vectores que son ortogonales a $w = (-1, 2, 1)$.

a) Explicar por que el conjunto $W \subset \mathbb{R}^3$ es el conjunto solución de un sistema de ecuaciones.
b) Demostrar que W es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.
c) Calcular una base para W y su dimensión.

116. Construir una base ortonormal para $\mathbb{R}^3$ a partir del siguiente conjunto de vectores

$$A = \{v_1 = (1, -1, 1),\ v_2 = (-2, 3, 1),\ v_3 = (-3, 5, 1),\ v_4 = (1, 2, -4)\}.$$

117. Para qué valores de k, de los siguientes vectores

$$A = \{(1, 2, 3), (3, k, k + 3), (2, 4, k)\}.$$

a) son linealmente independientes,
b) generan una recta.
c) un plano.

118. Considere el subespacio W de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores

$$A = \{v_1 = (0, 1, -3, 2),\ v_2 = (1, -1, 0, 1),\ v_3 = (3, 0, 1, -1) \text{ y } v_4 = (3, 0, 1, -1, 13)\}.$$

a) ¿Es A una base de $\mathbb{R}^4$?
b) Extraer una base de W y su dimensión.
c) Obtener la ecuación o sistema de ecuaciones que describan al subespacio W.

119. Sea $V = M^{2,2}(\mathbb{R})$ y

$$W_1 = \left\{A \in M^{2,2}(\mathbb{R}) \ : \ A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\right\}, \qquad W_2 = \left\{A \in M^{2,2}(\mathbb{R}) \ : \ A = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & c \end{pmatrix}\right\}.$$

Demostrar que W_1 y W_2 son subespacios de V y encontrar las dimensiones de W_1, W_2 y $W_1 \cap W_2$.

120. En el espacio M de matrices 2×2 se tiene el conjunto de matrices con la forma

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}.$$

Demuestra que es un subespacio vectorial de M.

121. Comprueba si el conjunto de polinomios

$$B = \{t^2 - 2t + 1,\ 2t + 1,\ -1\}$$

es una base del espacio vectorial P_2. Escribe el polinomio $(3t + 1)^2$ como combinación lineal de los vectores en B.

122. Dado el producto interno

$$\langle u \mid v \rangle = 3u_1v_1 + 2u_2v_2 + u_3v_3,$$

determina la distancia entre los vectores $(1, 2, -1)$ y $(2, 4, 3)$, así como la norma de v.

123. Utiliza el método de Gram-Schmidt para determinar la base ortonormal asociada a la base

$$B = \{(1, 0, 1), (1, 0, 2), (1, 1, -1)\}.$$

124. Sean $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ y $T = \{w_1, w_2, w_3\}$ dos bases del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$, donde

$$w_1 = (0,1,1), \qquad w_2 = (1,0,0) \qquad \text{y} \qquad w_3 = (1,1,0).$$

Si la matriz de cambio de la base T a la base S está dada por:

$$P_{T\to S} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

¿Cuáles son los vectores de la base S?

125. Construya una base ortonormal en $\mathbb{R}^3$ comenzando con la base

$$\{v_1, v_2, v_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

126. Obtener una base ortonormal a partir de la base

$$\mathcal{B}_1 = \{(-1,1,1), (3,1,-1), (2,-1,-1)\}.$$

127. Obtener una base ortonormal a partir de la base

$$\mathcal{B}_1 = \{(2,-1,1), (1,-1,-1), (1,-3,1)\}.$$

128. Sean $S = \{(2,0,1), (1,2,0), (1,1,1)\}$ y $T = \{(6,3,3), (4,-1,3), (5,5,2)\}$ dos bases para $\mathbb{R}^3$.
a) Encuentra la matriz de transición de la base T a la base S.
b) Encuentra el vector de coordenadas de $v = (4,-9,5)$ utilizando el inciso anterior.

129. Sean A y B dos conjuntos de vectores en el espacio vectorial V, tales que A es un subconjunto de B. Escribe **F** para falso, **V** para verdadero y **N** para no necesariamente, según corresponda.

a)	El $gen(A)$ y el $gen(B)$ son e.v de dimensión igual a la dimensión del e.v V.	
b)	Si los vectores en A son l.i, entonces los vectores de B también son l.i.	
c)	Si los vectores en B son l.d, entonces los vectores en A también son l.d.	
d)	Todo subconjunto de un e.v es también un e.v.	

130. Determine si el subconjunto dado H del espacio vectorial V es un subespacio de V:

$$V = \mathbb{R}^2; H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 0\}$$

131. En $\mathbb{R}^3$: $\left\{\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix}\right\}$

   a) Determine si el conjunto de vectores es linealmente independiente o linealmente dependiente (use sólo definición).
   b) Determine si el conjunto de vectores genera el espacio vectorial dado (use sólo definición).
   c) Con los resultados obtenidos en los incisos a) y b) determine si el conjunto de vectores es una base para el espacio a que se refiere. Justifique su respuesta.
   d) En caso de que el conjunto de vectores sea una base ¿Cuánto vale la dimensión del espacio a que se refiere? Explique su respuesta.

132. Escriba $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ en términos de la base dada: $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\3\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-3\\2\\3\end{pmatrix}\right\}$

133. Construya una base ortonormal en $\mathbb{R}^3$ comenzando con la base $\{v_1, v_2, v_3\} = \left\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$.

134. Encuentre el núcleo, imagen, nulidad y rango de la transformación lineal dada:

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; \quad T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = x$$

135. Sea S_{nn} el espacio vectorial de matrices simétricas de $n \times n$. Demuestre que S_{nn} es un subespacio de M_{nn} y que $\dim S_{nn} = \frac{n(n+1)}{2}$.

136. Encuentre la matriz de cambio de base de B_1 a B_2 de los vectores $B_1 = \{(3,4),(1,2)\}$ y $B_2 = \{(3,0),(7,1)\}$. Exprese $(8,3)$ en términos de la base B_1 y use la matriz de cambio de base para expresarla en B_2.

137. Encuentre el rango y la nulidad así como las dimensiones de estas de la siguiente matriz:

$$\begin{pmatrix}7 & -1 & 2\\3 & 1 & 4\\5 & -1 & 8\end{pmatrix}$$

138. Utiliza el procedimiento de Gram-Schmidt para encontrar, a partir de la base dada, una base ortonormal para cada uno de los espacios vectoriales siguientes: $\{(1,0,-2),(0,2,1),(-1,1,0)\}$.

139. Sea el conjunto

$$W = \left\{A = \begin{pmatrix}a & b & c\\b & d & e\\f & e & -a\end{pmatrix} \in M_{3\times3}(\mathbb{R}) \mid a+d=0, c+f=0\right\}$$

   a) ¿Es W un subespacio vectorial de $M_{3\times3}(\mathbb{R})$?
   b) Escribe la forma general de una matriz de W.
   c) Encuentra una base de W.
   d) Determina la dimensión de W.

140. Sean los conjuntos A y B en $\mathbb{R}^3$, Determinar si $A \cap B$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$, en caso de ser afirmativo, encontrar una base, sus dimensiones y su forma generadora.

$$A = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a + b = 2c\}, \quad B = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid 3a - b + c = 0\}$$

141. Encuentre una base para el espacio columna de A, rango(A), base generadora de espacio columna de A, una base para el espacio nulo de A y nulidad(A) y determinar si el vector $\bar{w}$ pertenece al espacio columna de A:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 9 \end{bmatrix} \quad \bar{w} = (8, 18, 47)$$

142. Sea las siguientes bases del espacio $\mathbb{R}^3$, Base $B = \{(1, 0, 2), (0, 1, -1), (2, 1, 1)\}$ y base $C = \{(1, 2, 1), (0, 1, 1), (-1, 0, 2)\}$.
a) Encuentre la matriz de cambio de base M_C^B.
b) Realizar el cambio de base del vector $(2, -1, 3)$.

143. Obtener la base ortogonal y ortonormal de B_1 y B_2:
a) $B_1 = \{(-1, 2, 2), (1, 0, 2), (-1, 0, 3)\}$
b) $B_2 = \{(1, 2, 1, 0), (-1, 0, 1, 2), (2, 0, -2, 2), (1, -1, 1, 0)\}$

144. Demostrar que los elementos x, y y z del conjunto de matrices $S = \left\{B \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \mid B = \begin{bmatrix} x & y \\ y & z \end{bmatrix}\right\}$ que conmutan con la matriz $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ fija, satisfacen la ecuación del plano

$$\mathcal{P} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid bx + (c - a)y - bz = 0\}$$

145. Decodificar el mensaje enviado vía la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 8 \\ -2 & -2 & -11 \end{bmatrix}$$

y las matrices columna $\vec{b}_{3\times 1}$:

$$\begin{bmatrix} 85 \\ 20 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 49 \\ 96 \\ -133 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 87 \\ 173 \\ -238 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 52 \\ 140 \\ -200 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ 41 \\ -63 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 109 \\ 178 \\ -238 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -69 \\ -46 \\ 46 \end{bmatrix}$$

146. Sean $A_1, A_2, \ldots, A_k$ matrices cuadradas e invertibles del mismo tamaño. Demostrar que:

$$\text{adj}(A_1 A_2 \ldots A_k) = \text{adj}(A_k)\text{adj}(A_{k-1}) \ldots \text{adj}(A_2)\text{adj}(A_1)$$

147. Determine si el conjunto

$$S = \{7 - x + 5x^2 - 4x^3, 4 - x + 2x^2 - x^3, 1 + x + x^2 - x^3, 7 + 6x + 3x^2 - x^3\}$$

es una base de P_3.

148. Encuentre (a) una base para el espacio columna de A, (b) una base para el espacio renglón de A, (c) rango(A), una base para el espacio nulo de A y (d) nulidad(A) si:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 5 & -1 \\ 2 & -2 & 6 \\ -5 & 9 & 1 \end{bmatrix}$$

149. Sean $\mathfrak{B}_1 = \{5+3x+x^2, -2-x-x^2, 4+2x+x^2\}$ y $\mathfrak{B}_2 = \{1+2x+x^2, 1-x-3x^2, 4+4x-x^2\}$ dos bases de P_2. Decodifique el mensaje enviado vía las matrices de coordenadas de los vectores con respecto a la base $\mathfrak{B}_2$, si:

$$[r_1(x)]_{\mathfrak{B}_1} = \begin{bmatrix} -53 \\ 270 \\ 220 \end{bmatrix}, \quad [r_2(x)]_{\mathfrak{B}_1} = \begin{bmatrix} 23 \\ 27 \\ -8 \end{bmatrix}, \quad [r_3(x)]_{\mathfrak{B}_1} = \begin{bmatrix} 108 \\ -36 \\ -136 \end{bmatrix}$$

$$[r_4(x)]_{\mathfrak{B}_1} = \begin{bmatrix} 103 \\ 46 \\ -81 \end{bmatrix}, \quad [r_5(x)]_{\mathfrak{B}_1} = \begin{bmatrix} -6 \\ 173 \\ 111 \end{bmatrix}, \quad \text{y } [r_6(x)]_{\mathfrak{B}_1} = \begin{bmatrix} 141 \\ -296 \\ -328 \end{bmatrix}$$

150. Obtener una base ortonormal a partir de la base $\mathfrak{B}_1 = \{(2,0,-1), (-1,1,-1), (1,3,-1)\}$.

151. a) Encuentra el valor de k para que los siguientes vectores sean linealmente independientes:

$$v_1 = (k,-1,-1), \quad v_2 = (-1,k,-1), \quad v_3 = (-1,-1,k)$$

b) ¿Para qué valores de k generan una recta?

152. Si $V = \mathbb{R}^3$, $W \subset V$:
a) Defina qué es un subespacio vectorial.
b) Considere a $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + y = z\}$. Demuestre que es un subespacio vectorial.
c) Obtenga una base de W.
d) Extienda la base de W a una base de $\mathbb{R}^3$.

153. Del siguiente conjunto $\mathcal{A} = \{(1,-2,1), (2,-4,2), (1,0,2), (1,4,4), (5,-2,9)\}$:
a) Usando la escalonada reducida, determine si genera a $\mathbb{R}^3$.
b) Si a) es afirmativo, elija una base de $\mathbb{R}^3$.

154. Aplique el proceso de Gram-Schmidt para obtener una base ortonormal de $\beta_1 = (1,1,-2)$, $\beta_2 = (1,2,-1)$, $\beta_3 = (1,1,1)$.

155. a) Determinar la matriz cambio de base de $\mathcal{B}_1 = \{\mathbf{e}_1 = (1,0,0), \mathbf{e}_2 = (0,1,0), \mathbf{e}_3 = (0,0,1)\}$ a $\mathcal{B}_2 = \{\mathbf{e}_1 = (1,1,-2), \mathbf{e}_2 = (1,2,-1), \mathbf{e}_3 = (1,1,1)\}$.
b) Obtener las coordenadas bajo la base $\mathcal{B}_2$ de $(v)_{\mathcal{B}_1} = (1,1,4)_{\mathcal{B}_1}$ y de $(v)_{\mathcal{B}_1} = (3,0,-2)_{\mathcal{B}_1}$.

156. Demuestre que si W_1 y W_2 son subespacios de un espacio con producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, entonces:
a) $W_1 \cap W_2$ es un subespacio.
b) $W_1 + W_2$ es un subespacio.
c) $W_1^{\perp}$ es un subespacio.

157. Dado el espacio vectorial $\mathbb{R}^4$, verifica que el conjunto de vectores de la forma $(x, 0, y, x - y)$ forman un subespacio vectorial y determina una base para el mismo.

158. Comprueba si el conjunto $B = \{t^2 + t, t + 2, 3\}$ es una base del espacio vectorial P_2. Escribe al polinomio $(3t + 2)^2$ como combinación lineal de la base B.

159. Determina la matriz de cambio de base entre $B = \{(1, 2, 0), (1, 0, 2), (0, 1, 2)\}$ y $B' = \{(1, 1, -1), (1, -1, 1), (-1, 1, 1)\}$.

160. Utiliza la siguiente definición de un producto interno en $\mathbb{R}^3$ para calcular el ángulo que forman los vectores $(1, 2, -3)$ y $(2, -2, 1)$ así como la distancia entre ellos:

$$\langle u, v\rangle = u_1v_1 + 2u_2v_2 + 3u_3v_3$$

161. Utiliza el método de Gram-Schmidt para determinar una base ortonormal a partir de $B = \{(1, 2, 0), (1, 0, 2), (0, 1, 2)\}$.

Unidad 3

1. Determine si la transformación de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ dada es lineal.

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2; \quad T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y+1 \end{pmatrix}$$

2. Para la transformación lineal

$$T(a + bx + cx^2) = \begin{pmatrix} 3a - 2b + c \\ 5a + b - 3c \\ a + b - 5c \end{pmatrix}$$

y las bases $\beta_1 = \{1-3x+x^2, 2+x-x^2, 3-2x+4x^2\}$, $\beta_2 = \{(1,-1,1), (3,1,-2), (-2,1,-3)\}$.

   a) Determine $[T]_{\beta_1\beta_2}$ la matriz de la transformación lineal respecto a dichas bases.
   b) Compruebe el resultado con el vector $r(x) = 5 - 2x + 7x^2$.
   c) ¿Es T un isomorfismo?

3. Para la siguiente transformación lineal

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7x_1 + x_2 + 2x_3 \\ -2x_1 - x_2 - x_3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \end{pmatrix}$$

Calcular Im(T), Ker(T) así como sus respectivas bases y dimensiones $\rho(T)$ y $\nu(T)$.

4. Para la transformación lineal

$$T(a + bx + cx^2) = \begin{pmatrix} a + 2b - 3c \\ 3a + 2b + c \\ 5a - b - c \end{pmatrix}$$

y las bases $\beta_1 = \{1 - x^2, 2 + 3x - x^2, 1 + x + x^2\}$, $\beta_2 = \{(2,-1,1), (1,-3,-1), (1,1,-2)\}$.

   a) Determine $[T]_{\beta_1\beta_2}$ la matriz de la transformación lineal respecto a dichas bases.
   b) Compuebe el resultado con el vector $r(x) = -3 + 7x - 5x^2$.
   c) ¿Es T un isomorfismo?

5. Para la siguiente transformación lineal

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5x_1 + 3x_2 + 4x_3 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 \\ -4x_1 + x_2 + 3x_3 \end{pmatrix}$$

Calcular Im(T), Ker(T) así como sus respectivas bases y dimensiones $\rho(T)$ y $\nu(T)$.

6. Sea $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal definida por:

$$F(x, y, z, t) = (x - y + s + t, x + 2s - t, x + y + 3s - 3t)$$

   a) Encuentre una base y la dimensión de la imagen de F.
   b) Encuentre una base y la dimensión del núcleo de F.

7. Problema

   a) Dada la siguiente transformación Lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y + 2z \\ 3x + y + 4z \\ 5x - y + 8z \end{pmatrix}$, y considerando $B_1 = B_2 =$ bases canónicas. Calcular: $nu(T), im(T), \rho(T), \nu(T)$
   b) Dada la siguiente transformación Lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x + 2y \\ -5x - 4y \end{pmatrix}$, y considerando $B_1 = B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Calcular: $nu(T), im(T), \rho(T), \nu(T)$
   c) En $\mathbb{R}^3$ suponga que $(X)_{B_1} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, donde $B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$, escriba X, en términos de la base $B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix} \right\}$

8. Sea $L : P_1 \to P_2$ una $t.l$ definida como $L(a + bx) = b + ax - ax^2$

   a) Averigua si es o no un isomorfismo.
   b) Encuentra la matriz que representa a la $t.l$ respecto a las bases $S = \{1 + x, -1 + x\}$ y $T = \{-x + x^2, 1 + x, x\}$.
   c) Evalúa $L(5 - 2x)$ directamente y empleando la matriz del inciso anterior y las bases S y T.

9. Si se sabe que la traza de la matriz $A_{2\times 2}$ es 8 y su determinante es 12, encuentra su polinomio característico y sus valores propios.

10. Bosqueja la gráfica de la cónica $x^2 - y^2 + 2\sqrt{3}xy + 6x = 0$

11. Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

   a) Determinar los valores propios de A
   b) Determinar los vectores propios de A
   c) Determinar si es diagonalizable
   d) Si lo es, encontrar las matrices P y P^{-1} que diagonalizan a la matriz

12. a) Determinar si la transformación T es invertible:

$$T(x, y, z) = (3x, x - y, 2x + y + z)$$

   Ver si es posible calcular $[T^{-1}]$

   b) Calcular la matriz cambio de base $Q_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$ y $Q_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}}$ en la nueva base $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$.
   c) Calcular $[T]_{\mathcal{B}'}$ la representación matricial de T en la nueva base $\mathcal{B}'$

13. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal

$$T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y - 3z \\ 2x + y - z \\ -3x - 2y - 4z \end{pmatrix}$$

   a) Hallar $[T]_{\mathcal{B}}$ la matriz asociada a T con respecto a la base canónica.
   b) Usando la matriz en a). Encontrar una base para $Ker(T)$.
   c) Encontrar la nulidad de T y el rango de T.
   d) Encontrar una base para $Im(T)$.

14. Sean T y S transformaciones lineales definidas por

$$T\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - 3x_2 + 5x_3 \\ 3x_1 - 8x_2 + 2x_3 \\ 5x_1 - 2x_2 + 4x_3 \end{pmatrix} \quad y \quad S\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 - y_2 \\ 2y_1 + y_2 + y_3 \\ -y_1 + y_3 \end{pmatrix}$$

   a) Hallar TS y ST.
   b) Si $\mathcal{B}$ es la base canónica, hallar $[T]_{\mathcal{B}}$, $[S]_{\mathcal{B}}$ y $[TS]_{\mathcal{B}}$
   c) Verificar que $[TS]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}}[S]_{\mathcal{B}}$

15. a) Sea $A = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$. Explicar si A es diagonalizable.
    b) Usando la diagonalización o de otra forma, calcular A^6.
    c) Encontrar una matriz tal que $B^3 = A$

16. Considere la matriz
$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -4 & 5 & 0 \\ -4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$
    a) Determinar los valores propios de A
    b) Determinar los vectores propios de A
    c) Determinar si es diagonalizable
    d) Si lo es, encontrar las matrices P y P^{-1} que diagonalizan a la matriz

17. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por
$$T(x, y, z) = \begin{pmatrix} x + y + z \\ 2x - y - z \\ x + 2y - z \end{pmatrix}$$
    a) Calcular la matriz que representa T en la base canónica.
    b) Obtener una base para el $Ker(T)$.
    c) Calcular $T^{-1}(x, y, z)$.
    d) Resolver la ecuación $T(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$
    e) Obtener la nulidad y el rango de T

18. Sean T y S transformaciones lineales definidas por
$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ 2x_1 - x_2 \\ 3x_1 - 2x_3 \end{pmatrix} \quad y \quad S\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y_1 + y_2 \\ 3y_2 - y_3 \\ y_1 - y_2 + y_3 \end{pmatrix}$$
    a) Hallar TS y ST.
    b) Si $\mathcal{B}$ es la base canónica, hallar $[T]_{\mathcal{B}}$, $[S]_{\mathcal{B}}$ y $[TS]_{\mathcal{B}}$
    c) Verificar que $[TS]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}}[S]_{\mathcal{B}}$

19. Sea $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$. Sea $\mathcal{B}' = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ con $\alpha_1 = (-2, 1, 0)$, $\alpha_2 = (2, 0, 1)$ y $\alpha_3 = (-1, 1, 0)$. Si $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es tal que

$$T(\alpha_1) = 2\alpha_1, \quad T(\alpha_2) = 2\alpha_2, \quad T(\alpha_3) = -\alpha_3$$

   a) Expresar a e_i como combinación lineal de $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.
   b) Encontrar la transformación lineal $T(x, y, z)$ en la base canónica. Sugerencia: hallar $T(e_i)$.
   c) Hallar la matriz $[T]_{\mathcal{B}}$ en la base canónica.
   d) Hallar las matrices cambio de base $Q_{\mathcal{B}' \to \mathcal{B}}$ y $Q_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'}$.
   e) Encontrar $[T]_{\mathcal{B}'}$ la representación matricial de T en la base $\mathcal{B}'$

20. a) Sea $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Explicar si A es diagonalizable.
   b) Usando la diagonalización o de otra forma, calcular A^6.
   c) Encontrar una matriz compleja tal que $B^2 = A$

21. Determine si la transformación dada de $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ es lineal.

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2; \quad T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + y \\ 3y - 4z \end{pmatrix}$$

22. Encuentre el núcleo, imagen, rango y nulidad de la transformación lineal dada. Una vez que determine el rango y la nulidad, justifique su respuesta con palabras sobre sus resultados.

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; \quad T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x + y$$

23. Considera la siguiente transformación lineal $T : P_3 \to M_{2\times 2}$ definida como:

$$T(a + bx + cx^2 + dx^3) = \begin{pmatrix} a + c + 2d & 2a + b + c + 4d \\ 2a + b + c + 3d & a + b + 2d \end{pmatrix}$$

   a) Es un isomorfismo o no, demuestre.
   b) Encontrar la representación matricial de la transformación, respecto a las bases canónicas de P_3 y de $M_{2\times 2}$.

24. Considere la siguiente transformación lineal $T : P_1 \to P_2$ definida como:

$$T(p(x)) = x \cdot p(x) + p(0)$$

   a) Determine el kernel y la imagen de la transformación, y mencione qué dimensión tiene cada uno de ellos; así como si es isomorfismo o no.
   b) Encuentre la representación matricial de la transformación respecto a las siguientes bases: $B_1 = \{x+1, x-1\}$ y $B_2 = \{x^2+1, x-1, x+1\}$.
   c) Verificar la relación $[T(u)]_{B_2} = M_T[u]_{B_1}$ para el vector $u = 3x - 2$.

25. Sea $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal dada por

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ 2x-z \\ y-w \end{pmatrix}$$

Sean $B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ y $B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ bases de $\mathbb{R}^4$ y $\mathbb{R}^3$ respectivamente.

   a) Encuentre la matriz asociada a T respecto a las bases dadas.
   b) Sea $v \in \mathbb{R}^4$ tal que $(v)_{B_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, encuentre $(T(v))_{B_2}$.

26. Determinar si T es una transformación lineal, en caso afirmativo, obtener su representación matricial, la imagen y el núcleo de la transformación.

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+y+z \\ y-3z \end{pmatrix}$$

27. Determinar si T es una transformación lineal, en caso de que la respuesta sea afirmativa, determinar el núcleo, imagen, rango y nulidad de la transformación lineal.

$$T((a,b)) = a + bx + (a+b)x^2 + (a-b)x^3$$

28. Repetir el ejercicio anterior, utilizando la representación matricial de la transformación lineal, donde

$$T((x,y,z,w)) = (ax+by, cz+dw)$$

29. Para la transformación lineal

$$T(a+bx+cx^2) = \begin{bmatrix} a-2b+4c \\ 3a-b-2c \\ 2a+3b-c \end{bmatrix}$$

y las bases $\beta_1 = \{1-3x+x^2, 2+x-x^2, 3-2x+4x^2\}$, $\beta_2 = \{(1,-1,1), (3,1,-2), (-2,1,-3)\}$.

a) Determine $[T]_{\beta_1\beta_2}$ la matriz de la transformación lineal respecto a dichas bases.

b) Compruebe el resultado con el vector $r(x) = 4-x+5x^2$.

c) ¿Es T un isomorfismo?

30. Para la siguiente transformación lineal

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 5x_1+2x_2-x_3 \\ 2x_1+x_2+x_3 \\ -x_1-x_2-4x_3 \end{bmatrix}.$$

Calcular Im(T), Ker(T) así como sus respectivas bases y dimensiones $\rho(T)$ y $\nu(T)$.

31. Para la transformación lineal

$$T(a+bx+cx^2) = \begin{bmatrix} 2a-b+3c \\ a-5b+c \\ 3a-b-4c \end{bmatrix}$$

y las bases $\beta_1 = \{1-x^2, 2+3x-x^2, 1+x+x^2\}$, $\beta_2 = \{(2,-1,1), (1,-3,-1), (1,1,-2)\}$.

a) Determine $[T]_{\beta_1\beta_2}$ la matriz de la transformación lineal respecto a dichas bases.

b) Compruebe el resultado con el vector $r(x) = -1+5x-2x^2$.

c) ¿Es T un isomorfismo?

32. Para la siguiente transformación lineal

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x_1+x_2+3x_3 \\ x_1+x_2-2x_3 \\ -4x_1-3x_2+x_3 \end{bmatrix}.$$

Calcular Im(T), Ker(T) así como sus respectivas bases y dimensiones $\rho(T)$ y $\nu(T)$.

33. Sea $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida como $L(x,y) = (x, x+y, y)$.

a) Determine el núcleo (L).

b) ¿L es uno a uno?

c) ¿L es sobre?

34. Determine si las siguientes transformaciones son lineales

    a) $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2;\quad T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y+z\end{pmatrix}$

    b) $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R};\quad T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = xy$

35. Sea $T:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal dada por $T\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x+y\\2x-z\\y-w\end{pmatrix}$. Sean $B_1 = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}$ y $B_2 = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\right\}$ bases de $\mathbb{R}^4$ y $\mathbb{R}^3$, respectivamente.

    a) Encuentre la matriz asociada a T respecto a las bases dadas.

    b) Sea $v \in \mathbb{R}^4$ tal que $(v)_{B_1} = \begin{pmatrix}0\\2\\1\\-1\end{pmatrix}$, encuentre $(T(v))_{B_2}$.

36. Sea $L:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $L(x,y,z) = (x+y, y-z)$, encuentra la matriz que representa a la transformación lineal respecto a las bases $S = \{(1,0,1),(0,1,1),(1,1,1)\}$ y $T = \{(1,2),(-1,1)\}$.

37. Sea $T:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$T\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\\\delta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha-\beta+2\gamma+3\delta\\ \beta+4\gamma+3\delta\\ \alpha+6\gamma+6\delta\end{pmatrix}.$$

    Demuestre que T es una transformación lineal.

38. De la transformación anterior encuentre:

    a) $\mathrm{nu}(T)$, $\nu(T)$,

    b) $\mathrm{Im}(T)$, $\rho(T)$, y

    c) su representación matricial.

    d) ¿Es T un isomorfismo? (justifique su respuesta).

39. Sea $V = P_4$ y $W = \{p \in P_5 : p(0) = 0\}$. Demuestre que V es isomorfo a W.

40. Sea $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una t.l para la cual

$$L\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Encuentra:

a) $\mathrm{Ker}(L)$, una base para el $\ker(L)$ y $\dim(\ker(L))$
b) $\mathrm{Im}(L)$, una base para $\mathrm{Im}(L)$ y $\dim(\mathrm{Im}(L))$
c) ¿Es una t.l uno-uno? ¿Por qué?
d) ¿Es sobre? ¿Por qué?
e) ¿Es un isomorfismo? ¿Por qué?

41. Encuentre la representación matricial de la transformación respecto a las siguientes bases:

$$B_1 = \{x+1,\ x-1\} \qquad B_2 = \{x^2+1,\ x-1,\ x+1\}.$$

42. Determina la imagen del vector $v(1,1,-2)$ y la preimagen de $w(4,4,4)$ bajo la transformación lineal

$$T(x,y,z) = (x-y,\ y-z,\ x-z).$$

Determina la matriz estándar de T así como el kernel y rango de la misma (subconjuntos de $\mathbb{R}^3$).

43. Dada la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

calcula una base para el kernel y otra para el rango de la transformación, así como las dimensiones de estos. Determina una representación de A si las bases que se utilizan son

$$\{(1,0,1), (1,1,0), (0,1,1)\}$$

para el dominio y

$$\{(1,0,-1), (1,-1,0), (0,1,-1)\}$$

para el rango.

44. Para la siguiente transformación lineal

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 - 4x_2 + x_3 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 \\ -2x_1 + 3x_2 + x_3 \end{pmatrix}$$

Calcular $\mathrm{Im}(T)$, $\mathrm{Ker}(T)$ así como sus respectivas bases y dimensiones $\rho(T)$ y $\nu(T)$. ¿Es T un isomorfismo?

45. Decodifique el mensaje enviado vía los vectores $\vec{v}_i = T^{-1}(\vec{w}_i)$ en donde

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 \end{pmatrix}$$

y

$$\vec{w}_1 = \begin{bmatrix} 87 \\ 18 \\ 44 \end{bmatrix}, \quad \vec{w}_2 = \begin{bmatrix} 39 \\ 10 \\ 18 \end{bmatrix}, \quad \vec{w}_3 = \begin{bmatrix} -11 \\ -43 \\ 29 \end{bmatrix}, \quad \vec{w}_4 = \begin{bmatrix} 108 \\ -10 \\ 83 \end{bmatrix}, \quad \vec{w}_5 = \begin{bmatrix} 87 \\ 21 \\ 41 \end{bmatrix}.$$

$$\vec{w}_6 = \begin{bmatrix} 78 \\ 35 \\ 23 \end{bmatrix}, \quad \vec{w}_7 = \begin{bmatrix} 62 \\ -21 \\ 61 \end{bmatrix}, \quad \vec{w}_8 = \begin{bmatrix} 93 \\ 19 \\ 47 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \vec{w}_9 = \begin{bmatrix} 162 \\ -17 \\ 128 \end{bmatrix}.$$

46. Para la siguiente transformación lineal

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - 3x_2 - 5x_3 \\ -3x_1 + 3x_2 - 3x_3 \\ x_1 - x_2 + x_3 \end{pmatrix}$$

Calcular $\mathrm{Im}(T)$, $\mathrm{Ker}(T)$ así como sus respectivas bases y dimensiones $\rho(T)$ y $\nu(T)$. ¿Es T un isomorfismo?

47. Decodifique el mensaje enviado vía los vectores $\vec{v}_i = T^{-1}(\vec{w}_i)$ en donde

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - 5x_2 + 2x_3 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 \\ 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 \end{pmatrix}$$

y

$$\vec{w}_1 = \begin{bmatrix} -80 \\ -4 \\ -53 \end{bmatrix}, \quad \vec{w}_2 = \begin{bmatrix} -38 \\ -2 \\ -25 \end{bmatrix}, \quad \vec{w}_3 = \begin{bmatrix} 57 \\ 57 \\ 94 \end{bmatrix}, \quad \vec{w}_4 = \begin{bmatrix} -63 \\ 13 \\ -28 \end{bmatrix}, \quad \vec{w}_5 = \begin{bmatrix} -83 \\ 5 \\ -44 \end{bmatrix}.$$

$$\vec{w}_6 = \begin{bmatrix} -93 \\ -17 \\ -73 \end{bmatrix}, \quad \vec{w}_7 = \begin{bmatrix} -19 \\ 17 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \vec{w}_8 = \begin{bmatrix} -85 \\ 3 \\ -48 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \vec{w}_9 = \begin{bmatrix} -94 \\ -30 \\ -99 \end{bmatrix}.$$

48. Si $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es la transformación lineal definida por

$$T(x, y, z) = \begin{pmatrix} x + y + z \\ 2x - y - z \\ x + 2y - z \end{pmatrix}$$

a) Obtener la matriz que representa a T en la base canónica, $[T]_C$.

b) Obtener $\mathrm{Ker}(T)$ y calcular la nulidad y el rango de la transformación.

c) Sea

$$B' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Calcular la matriz cambio de base (o de transición) de $C \to B'$ con C la base canónica de $\mathbb{R}^3$. Calcular $[T]_{B'}$.

d) Usando c), si

$$v = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

coordenadas en la base canónica. Calcular las coordenadas de Tv con respecto a la base B', $[Tv]_{B'}$.

49. Considera la transformación lineal $T : P_2 \to P_1$ definida como:

$$T(ax^2 + bx + c) = (a + 2b)x + (b + c)$$

a) Determina si es un isomorfismo. Justifica tu resultado.

b) Encuentra una base para el Kernel de la transformación.

c) Encuentra una base para la imagen de la transformación.

50. Determine si la transformación dada de $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ es lineal:

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2; \quad T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$$

51. Sea el espacio vectorial $V = P_2$ (polinomios de grado ≤ 2). Dado el conjunto:

$$p_1(x) = 1 + x + x^2, \quad p_2(x) = 1 + 2x + 4x^2, \quad p_3(x) = 1 + 3x + 9x^2, \quad p_4(x) = x + 2x^2$$

a) Verificar si el conjunto $\{p_1, p_2, p_3\}$ es base de un subespacio. Si no, encuentra una base.
b) Determinar la dimensión del subespacio generado por $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$.
c) Sea la base $B' = \{p_1, p_4, 1\}$, expresa el polinomio $q(x) = 3x + 5x^2$ en coordenadas respecto a B'.

52. Verificar que es una transformación lineal, en caso de ser una transformación, encontrar la transformación de los siguientes vectores $v_1 = (1, 2, 3)$ y $v_2 = (4, 3, 2, 1)$:

a) $T(x, y, z) = \begin{bmatrix} 2x - y + z & x + 3y \\ xy & 4z - y \end{bmatrix}$

c) $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 - x_3 \\ 3x_2 + 4x_3 \\ x_1 - x_2 + x_4 \end{pmatrix}$

53. Define la transformación: $T : \mathbb{R}^3 \to P^4$ dado por:

$$T(a, b, c) = (a + 2b) + (b - c)x + (a - c)x^2 + (3a + b + 2c)x^3 + (5a - b + c)x^4$$

Calcular el núcleo, Imagen, base, dimensiones.

54. Sea las matrices $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ son semejantes, calcular los valores faltantes de la matriz:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ a & 1 & b \\ c & d & 1 \end{bmatrix}$$

55. Decodifique el mensaje enviado vía los vectores $\vec{v}_i = T^{-1}(\vec{w}_i)$ en donde

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ -3x_1 + x_2 - x_3 \\ -x_1 + 2x_2 + 4x_3 \end{pmatrix}$$

y los vectores $\vec{w}_i$:

$$\vec{w}_1 = \begin{bmatrix} 79 \\ 62 \\ 66 \end{bmatrix}, \vec{w}_2 = \begin{bmatrix} -34 \\ -61 \\ -12 \end{bmatrix}, \vec{w}_3 = \begin{bmatrix} 47 \\ 19 \\ 49 \end{bmatrix}, \vec{w}_4 = \begin{bmatrix} 29 \\ -16 \\ 44 \end{bmatrix}, \vec{w}_5 = \begin{bmatrix} 28 \\ -54 \\ 58 \end{bmatrix}, \vec{w}_6 = \begin{bmatrix} 56 \\ 84 \\ 28 \end{bmatrix}$$

56. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y + z \\ 2x - y - z \\ x + 2y - z \end{pmatrix}$$

a) Calcular $[T]_C^C$ con C la base canónica.
b) Encontrar una base para $\ker(T)$ y $\operatorname{Im}(T)$.
c) Calcular el rango de T y nulidad(T). Determinar si T es una transformación invertible, explicar.

57. Sea $T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x-y\\x+y-z\end{pmatrix}$

a) Obtener $[T]_{C_3}^{C_2}$, con C_3 y C_2 las bases canónicas en $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$ respectivamente.

b) Si $\mathcal{B}_3 = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$ y $\mathcal{B}_2 = \left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right\}$, calcular $[T]_{\mathcal{B}_3}^{\mathcal{B}_2}$.

c) Calcular $(Tv)_{\mathcal{B}_2}$ si $(v)_{\mathcal{B}_3} = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$.

d) Sea $\mathcal{B} = \left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right\}$ encontrar $Q_{C\to\mathcal{B}}$, la matriz cambio de base de C a $\mathcal{B}$.

e) Calcular $[T]_{\mathcal{B}}$.

f) Usando c) calcular las coordenadas de Tv en la base $\mathcal{B}$ si $(v)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$.

58. Sea $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por:

$$S(x, y, z) = (x + 2y - z, 3x - y + 2z, 2x + y + z)$$

a) Determina una base para el kernel de S.
b) ¿Cuál es el rango de S?

59. Dado el triángulo con vértices en $P(2, 0, 0)$, $Q(0, 2, 0)$ y $R(0, 0, 2)$:
a) Aplica una rotación de $180°$ alrededor del eje y, y encuentra las nuevas coordenadas.
b) Aplica ahora una rotación de $60°$ alrededor del eje z, encuentra sus coordenadas finales.

Unidad 4

1. Calcule las raíces características de la siguiente matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 9 \\ 2 & 1 & 6 & 8 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

2. Hallar una matriz diferente de cero P tal que $AP = PD$.

$$4(x+y)^2 - (2x-t)^2 - x(y-z)$$

3. Úsense transformaciones elementales que incluyan solamente números racionales para hallar formas cuadráticas diagonales equivalentes a cada una de las formas cuadráticas siguiente:

$$5x^2 - 2xz + 4xt + y^2 - 4yz + 2yt - 2z^2 - 2zt - t^2$$

4. Hallar una rotación de ejes que lleve $f(x,y,z)$ a una forma cuadrática diagonal $g(x',y',z')$. Pruébelo.

$$f(x,y,z) = 3x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2xz - 2yz$$

5. Hallar una matriz P que diagonalice a la matriz

$$A = \begin{bmatrix} -7 & -2 & 0 \\ 9 & 4 & 0 \\ 5 & -8 & 5 \end{bmatrix}$$

6. Hallar una matriz P que diagonalice ortogonalmente a la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

7. Hallar una matriz P que diagonalice a la matriz

$$A = \begin{bmatrix} -7 & -5 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ -3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

8. Hallar una matriz P que diagonalice ortogonalmente a la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

9. Sea $T : P_3 \to P_2$ una transformación lineal definida por:

$$T(ax^3 + bx^2 + cx + d) = (a - b)x^2 + (b - d)x + (c + d)$$

   a) Determina el kernel, la imagen, el rango y la nulidad de la transformación.
   b) ¿Es T un isomorfismo? Justifica tu respuesta.
   c) Encuentra la representación matricial de la transformación respecto a las siguientes bases: $B_1 = \{x^3 - 1, x^2 - 1, x + 1, x - 1\}$ y $B_2 = \{x^2 + 1, x - 1, x + 1\}$.
   d) Verifica la relación $[T(u)]_{B_2} = A[u]_{B_1}$ para el vector $u = 2x^3 - 3x - 2$.

10. Encuentra la matriz Q que diagonaliza ortogonalmente a la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

y verifica que $Q^{-1}BQ = D$, donde D es una matriz diagonal cuyas componentes diagonales son los valores propios de B.

11. Para la matriz B del problema anterior utiliza la diagonalización para calcular B^6

12. Problema
Calcular los valores característicos, así como sus vectores característicos de las siguientes Matrices

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} 13 & 3 & 1 \\ -56 & -13 & -4 \\ -14 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

13. a) Obtener la factorización LU de la siguiente matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

   b) Usando la factorización en A resolver los sistemas

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & - & 3z & = & 1 \\ & & y & - & z & = & 0 \\ 3x & & & + & 2z & = & 0 \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & - & 3z & = & 1 \\ & & y & - & z & = & -1 \\ 3x & & & + & 2z & = & 1 \end{array}$$

14. a) Obtener la factorización LU de la siguiente matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

b) Usando la factorización en A resolver los sistemas

$$\begin{array}{rcrcl} 3x & - & y & = & 1 \\ -x & + & 2y & = & 0 \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{rcrcl} 3x & - & y & = & 0 \\ -x & + & 2y & = & 1 \end{array}$$

c) Con lo hecho en b), obtener (sin cálculos adiciones) la inversa de A.

15. Encuentra la matriz Q que diagonaliza ortogonalmente a la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

y verifica que $Q^{-1}AQ = D$, donde D es una matriz diagonal cuyas componentes diagonales son los valores propios de A. Para la matriz A anterior utiliza la diagonalización para calcular A^4.

16. Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 0 & -2 \\ 0 & -4 & 0 \\ -2 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

a) Determine el polinomio característico de A.

b) Encuentre los valores y vectores propios de A.

c) Calcule el espacio característico asociado a cada valor propio λ de A.

d) Diagonalice la matriz A, encontrando una matriz Q y una matriz diagonal D tal que $D = Q^t AQ$.

e) Calcule A^6.

17. Hallar una matriz P que diagonalice a la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -8 & -1 & 0 \\ 4 & -3 & -2 \end{bmatrix}.$$

18. Hallar una matriz P que diagonalice a la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & -5 \end{bmatrix}.$$

19. Determine una matriz diagonal semejante a la matriz dada.

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

20. Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

a) Determine el polinomio característico de A.

b) Encuentre los valores y vectores propios de A.

c) Calcule el espacio característico asociado a cada valor propio λ de A.

d) Diagonalice la matriz A, encontrando una matriz Q y una matriz diagonal D tal que $D = Q^t AQ$.

e) Calcule A^5.

21. Diagonaliza ortogonalmente la matriz

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

22. La matriz de rotación en tres dimensiones al rededor del eje y está dada por

$$R_y = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

a) Encuentre la factorización LU de la matriz R_y, b) exprese R_y como un producto de matrices elementales, c) encuentre la inversa de R_y y d) encuentre el determinante de R_y expandiendo por cofactores sobre la tercera columna.

23. Una matriz A se llama ortogonal si A es invertible y $A^{-1} = A^t$. Demuestre que si A es ortogonal entonces $\det(A) = \pm 1$.

24. Si

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

y $tr(A) = 8$ y $|A| = 12$.

Encuentra los valores propios de A.

25. Utiliza la diagonalización para demostrar que

$$A^6 = \begin{pmatrix} 2^{12} & 0 \\ 0 & 2^{12} \end{pmatrix}$$

sabiendo que

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

26. Diagonaliza ortogonalmente la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

(Verifica tu resultado).

27. Si A es la matriz del sistema

$$\begin{aligned} 2x_2 - 3x_3 &= 2 \\ x_2 + 4x_3 &= 4 \end{aligned}$$

a) Obtener la factorización $PA = LU$.

b) Resolver el sistema usando la factorización $PA = LU$

28. a) Obtener las matrices elementales que transforman a A en una matriz triangular.

b) Usar a) para obtener la factorización $PA = LU$ de la matriz asociada al sistema

$$\begin{aligned} 2y + 2z &= 4 \\ -x + 2y - 4z &= 4 \\ 2x - 5y + z &= -8 \end{aligned}$$

c) Resolver el sistema usando la factorización $PA = LU$

29. Calcula los valores y vectores propios asociados a la matriz

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

30. Calcula los valores y vectores propios asociados a la matriz

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

y diagonalízala.

31. Hallar una matriz P que diagonalice a la matriz

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 0 & -3 \\ 2 & -4 & -1 \\ 3 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

32. Hallar una matriz P que diagonalice ortogonalmente a la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

33. Hallar una matriz P que diagonalice a la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 3 \\ -4 & -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

34. Hallar una matriz P que diagonalice ortogonalmente a la matriz

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -36 \\ 0 & -3 & 0 \\ -36 & 0 & -23 \end{bmatrix}.$$

35. Considere la matriz

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Define que es la inversa de una matriz cuadrada y aplica el método de Gauss-Jordan para calcular A^{-1}.
b) Calcular los valores propios y vectores propios de A.
c) Determinar si la matriz es diagonalizable.
d) Si b) es afirmativa, obtener la base B' que diagonaliza a la matriz.
e) Calcular a las matrices tal que $P^{-1}AP$ es una matriz diagonal.

36. Sea T la transformación lineal en $\mathbb{R}^2$ dada por $Tv = Av$ con

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

   a) Determinar si la transformación es diagonalizable.
   b) Calcular A^5.
   c) Calcular $B = A^{1/3}$, es decir, B es una matriz tal que $B^3 = A$.

37. Encuentra la matriz Q que diagonaliza ortogonalmente a la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

   y verifica que $Q^{-1}AQ = D$, donde D es una matriz diagonal cuyas componentes diagonales son los valores propios de A.

38. Para la matriz A del problema anterior utiliza la diagonalización para calcular

$$A^3$$

39. Sea $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ ¿Es el $gen(S)$ un s.e.v? Demuestra que lo es o presenta un contraejemplo para mostrar que no lo es.

40. De la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & -1 \\ -2 & 6 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

   Calcular:
   a) Valores propios
   b) Vectores propios
   c) Diagonalizar ortogonalmente
   d) Verificar que $A = QDQ^T$
   e) Calcular A^{10}

41. Supongamos que, en un circuito eléctrico, las corrientes x_1, x_2, x_3 en tres mallas están relacionadas por las siguientes ecuaciones (ley de Kirchhoff): (Uso de la factorización LU)

$$\begin{cases} 10x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 = -8 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 = 6 \end{cases}$$

42. Hallar una matriz P que diagonalice ortogonalmente a la matriz:

$$D = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

43. Para la siguiente transformación lineal

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x_1 + 2x_2 - 7x_3 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 \\ -2x_1 - x_2 + 2x_3 \end{pmatrix}$$

Calcular Im(T), Ker(T) así como sus respectivas bases y dimensiones $\rho(T)$ y $\nu(T)$. ¿Es T un isomorfismo?

44. Hallar una matriz P que diagonalice a la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 0 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 11 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

45. Sea la matriz A

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ -2 & 6 & -2 \\ -4 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Calcular los valores y vectores propios de A.
b) Obtener una diagonalización ortogonal, encontrando una base ortogonal que diagonaliza a A.
c) Encontrar Q y verificar que $Q^T AQ$ es diagonal.

46. Sea $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ a) Calcular los valores propios y vectores propios de A y determinar si es diagonalizable, explicar.
b) Si es el caso, encontrar una base (de vectores propios) bajo la cual A se diagonaliza y la matriz Q que diagonaliza a A (es decir, tal que $Q^{-1}AQ$ es diagonal).
c) Encontrar A^6 usando la diagonalización, también encontrar B tal que $B^3 = A$.

47. Dada la matriz:

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Calcula sus valores propios.
b) Encuentra los vectores propios asociados.

48. Dada la matriz:

$$D = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

a) Verifica si es diagonalizable.
b) Si lo es, encuentra su matriz P y la inversa que la diagonalizan.