ANÁLISIS VECTORIAL

Unidad 1

1. Sean u, v, w vectores unitarios en $\mathbb{R}^3$ que son ortogonales entre sí. Si $a = \alpha u + \beta v + \gamma w$, mostrar que
$$\alpha = a \cdot u, \quad \beta = a \cdot v, \quad \gamma = a \cdot w$$
¿Cuál es la interpretación geométrica de los resultados anteriores?

2. Calcular el volumen del paralelepípedo cuyos vértices son $A(0,0,0)$, $B(3,0,0)$, $C(0,5,1)$, $D(2,0,5)$, $E(3,5,1)$, $F(5,0,5)$, $G(2,5,6)$, $H(5,5,6)$.

3. Determinar todos los valores de λ tales que:
   a) $u = (2,-1,3)$ y $v = (\lambda,-2,1)$ sean ortogonales.
   b) $u = (2,-1,1)$ y $v = (1,\lambda,2)$ forman un ángulo de $\frac{\pi}{3}$.

4. Sean $(2,3,-2)$, $(4,-1,-1)$ y $(3,1,2)$ las coordenadas de los puntos P, Q y R respectivamente. Obtener:
   a) La ecuación del plano que contiene los tres puntos.
   b) Ecuación de la recta perpendicular al plano y que pasa por el punto $(2,3,-2)$.
   c) La distancia del origen al plano.

5. Demostrar las siguientes relaciones:
   a) $\|\vec{A} \times \vec{B}\|^2 + |\vec{A} \cdot \vec{B}|^2 = \|\vec{A}\|^2 \|\vec{B}\|^2$
   b) $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) + \vec{B} \times (\vec{C} \times \vec{A}) + \vec{C} \times (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{0}$

6. Muestra que los puntos $P(3,5,6)$, $Q(1,2,7)$ y $R(6,1,0)$ son los vértices de un triángulo rectángulo.

7. Sean $\vec{a} = (4,5,-2)$, $\vec{b} = 3\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + 2\hat{k}$ y $\vec{c} = (-3,1,-2)$ vectores en $\mathbb{R}^3$. Calcular:
   a) $(\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{a} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{a}$
   b) $(\vec{a} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} - (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{a}$
   c) $Proy_{\vec{a}}(\vec{b}) \times Proy_{\vec{b}}(\vec{a})$

8. Considere una pecera que tiene vértices en el origen, $\vec{u} = \hat{\imath} + 10\hat{\jmath}$, $\vec{v} = 10\hat{\imath} + \hat{\jmath}$, $\vec{w} = 20\hat{k}$, $\vec{u}+\vec{v}$, $\vec{u}+\vec{w}$, $\vec{v}+\vec{w}$ y $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$. Dibuje dicha pecera y calcule su área y su volumen.

9. Demuestre que los vectores $(\vec{u}\times\vec{v})$ y $(3\vec{v}\times\vec{u})$ son siempre paralelos y los vectores $(\vec{u}\times\vec{v})$ y $3\vec{v}$ son siempre perpendiculares para cualquier par de vectores $\vec{u}, \vec{v}$.

10. Considere la recta $L_1 : \frac{x-3}{4} = \frac{y-2}{5} = \frac{z-2}{5}$ encuentre una recta L_2 que se intersecte con esta en un solo punto y sean perpendiculares entre sí.

11. Considere el plano P_1 que contiene a los vectores $(1,3,-2)$, $(2,4,5)$, $(2,2,-5)$. Y sea P_2 el plano que pasa por el $(3,2,-1)$ y paralelo al plano $2x - y + z = 3$. Hallar $P_1 \cap P_2$.

12. Considere la recta L que pasa por el punto $(9,1,-2)$ y perpendicular al plano yz, y considere el plano con intersección en los ejes dadas por $2\hat{\imath}, 2\hat{\jmath}, 2\hat{k}$ P. Hallar $P \cap L$.

13. Demostrar que la condición necesaria y suficiente para que $A\times(B\times C) = (A\times B)\times C$ es $(A\times C)\times B = 0$. Discutir los casos en los que $A\cdot B = 0$, o bien $B\cdot C = 0$.

14. Hallar el ángulo agudo formado por dos diagonales de un cubo.

15. a) Si $\vec{a}_1 = \hat{\imath} + 3\hat{\jmath} - \hat{k}$, $\vec{a}_2 = 2\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + \hat{k}$ y $\vec{a}_3 = 4\hat{\imath} + \hat{\jmath} - \hat{k}$, forman parte de un conjunto recíproco de vectores, obtener a los vectores $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$ y $\vec{b}_3$.
    b) Comprobar que $[\vec{a}_1\vec{a}_2\vec{a}_3] = \frac{1}{[\vec{b}_1\vec{b}_2\vec{b}_3]}$.

16. Hallar la ecuación de la recta $\mathscr{L}_2$ que pasa por el punto $A = (-3,5,-7)$ y es paralela a la recta $\mathscr{L}_1$, siendo $\mathscr{L}_1 = \mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2$, con

$$\mathscr{P}_1 = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 7x - 3y + 5z = -2\}$$
$$\mathscr{P}_2 = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 2x + 5y - z = 13\}$$

17. Hallar la ecuación de la esfera inscrita en el cubo $ABCDEFGH$, donde $A = (-2,3,2)$, $B = (-2,3,11)$, $C = (7,3,2)$, $D = (7,3,11)$, $E = (-2,12,11)$, $F = (-2,12,2)$, $G = (7,12,2)$ y $H = (7,12,11)$.

18. Use vectores para demostrar que un paralelogramo es un rectángulo si y sólo si sus diagonales son iguales en longitud.

19. a) Simplificar la expresión $(2\mathbf{A} - 3\mathbf{B} + 5\mathbf{C})\times(5\mathbf{A} + \mathbf{B} + 4\mathbf{C})\cdot(7\mathbf{A} - \mathbf{B} + 2\mathbf{C})$.
    b) Evaluar el resultado final, si $\mathbf{A} = 2\hat{\imath} - \hat{\jmath} + 5\hat{k}$, $\mathbf{B} = \hat{\imath} - 3\hat{\jmath} - 2\hat{k}$ y $\mathbf{C} = 4\hat{\imath} + 5\hat{\jmath} - \hat{k}$.

20. a) Si $\vec{a}_1 = 3\hat{\imath} - \hat{\jmath} + 2\hat{k}$, $\vec{a}_2 = \hat{\imath} - 4\hat{\jmath} + 3\hat{k}$ y $\vec{a}_3 = \hat{\imath} - \hat{\jmath} + \hat{k}$, forman un conjunto recíproco de vectores, obtener a los vectores $\vec{b}_1, \vec{b}_2$ y $\vec{b}_3$.
    b) Comprobar que $\vec{a}_1 \times \vec{b}_1 + \vec{a}_2 \times \vec{b}_2 + \vec{a}_3 \times \vec{b}_3 = \vec{0}$

21. Hallar la distancia entre los planos

$$\mathscr{P}_1 : \begin{cases} x = 2u - 3v + 5 \\ y = u + 4v - 1 \\ z = 3u - 2v + 4 \end{cases} \quad \text{y} \quad \mathscr{P}_2 : \begin{cases} x = 2u - 3v - 9 \\ y = u + 4v + 7 \\ z = 3u - 2v - 2 \end{cases}$$

22. Hallar la distancia del punto $P_1 = (-2, 7, -5)$ de la recta $\mathscr{L}$, donde $\mathscr{L} = \mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2$, con

$$\mathscr{P}_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 3x + 2y - z = -4\}$$
$$\mathscr{P}_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 7x + 4y + 2z = 11\}$$

23. Hallar la ecuación de la esfera inscrita en el cubo $ABCDEFGH$, donde $A = (-5, -2, 7)$, $B = (-5, -2, -1)$, $C = (-5, 6, -1)$, $D = (-5, 6, 7)$, $E = (3, 6, -1)$, $F = (3, -2, -1)$, $G = (3, 6, 7)$ y $H = (3, -2, 7)$.

24. Hallar las componentes $\hat{\imath}$ y $\hat{\jmath}$ del vector $\vec{v}$, dada su magnitud y el ángulo que forman con el eje X positivo.
    a) $\|\vec{v}\| = 4; \theta = 30°$
    b) $\|\vec{v}\| = 6; \theta = \frac{\pi}{3}$

25. Dos fuerzas con magnitud de 500 N y 420 N actúan sobre un gancho a ángulos de $30°$ y $-45°$, respectivamente. Hallar la dirección y magnitud de la fuerza resultante.

26. El trabajo W realizado al mover un objeto de $(0, 0)$ a $(7, 3)$ sujeto a una fuerza $\vec{F}$ es $W = \vec{F} \cdot \vec{r}$ donde $\vec{r}$ es el vector que va de $(0, 0)$ a $(7, 3)$. Las unidades son en metros y kilogramos.
    a) Suponiendo que la fuerza $\vec{F} = 10 \cos \theta \hat{\imath} + 12 \operatorname{sen} \theta \hat{\jmath}$. Halla W en términos de θ.
    b) Suponiendo que la fuerza $\vec{F}$ tiene magnitud de 19 N y forma un ángulo de $\pi/3$ con la horizontal, apuntando a la derecha. Halla W.

27. Hallar la ecuación de la recta que pasa por $(0, -1, 1)$ y $(0, 1, 0)$.

28. Hallar la ecuación general del plano, en cada caso.
    a) Contiene a los puntos $(-2, 7, 7)$, $(0, 4, 7)$ y $(2, 1, 4)$
    b) Pasa por el punto $(1, 2, 3)$ y es paralelo al plano XZ.

29. Halla el volumen del paralelepípedo generado por los vectores $(1, 0, 1)$, $(-1, 1, 1)$ y $(-3, 2, 0)$.

30. ¿Cuál es el volumen del paralelepípedo con aristas en los vectores $\vec{a} = 2\hat{\imath} + 5\hat{\jmath} - 3\hat{k}$ y $\vec{c} = \hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + \hat{k}$?

31. Hallar la ecuación general del plano que: pasa por el punto $(1, 2, 3)$ y es paralelo al plano XY.

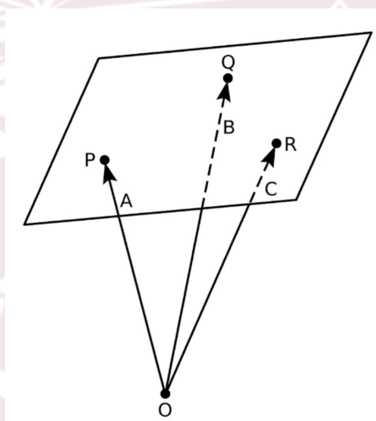
32. Hallar las componentes $\hat{\imath}$ y $\hat{\jmath}$ del vector $\vec{v}$, dada su magnitud y el ángulo que forma con el eje X positivo.
$$\|\vec{v}\| = 3; \quad \theta = 45^\circ$$

33. Demuestre que la recta que une los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralela al tercero y tiene la mitad de su magnitud.

34. Pruebe la ley de los cosenos de la trigonometría:
$$\|c\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2 - 2\|a\|\|b\| \cos\theta$$

35. Si $a + b + c = 0$, prueba que $a \times b = b \times c = c \times a$, e interpreta el resultado de manera trigonométrica.

36. Hallar una ecuación vectorial que represente el plano que pasa por tres puntos dados cuyos vectores de posición son A, B, C.



Desarrolle y simplifique su respuesta al máximo, poniéndola en términos del triple producto escalar cuando sea posible.

37. Si $\hat{u}$ y $\hat{v}$ son vectores unitarios con direcciones diferentes, demostrar que el vector $\hat{u} + \hat{v}$ biseca internamente el ángulo entre $\hat{u}$ y $\hat{v}$. ¿Es $(\hat{u} + \hat{v})/2$ un vector unitario?

Formulario:
$$\sin\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$$
$$\cos\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$$

38. Dos fuerzas con magnitud de 600 N y 520 N actúan sobre un gancho a ángulos de $30°$ y $-45°$ respectivamente. Hallar la dirección y magnitud de la fuerza resultante.

39. ¿Cuál es el volumen del paralelepípedo con aristas en los vectores $\vec{a} = 2\hat{\imath}+\hat{\jmath}-\hat{k}$, $\vec{b} = 5\hat{\imath}-3\hat{k}$ y $\vec{c} = \hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + \hat{k}$?

40. Se dice que un triángulo con vértices $A(3,0,0)$, $B(0,2,0)$ y $S(0,0,6)$ pertenece a un plano. Determine la ecuación de dicho plano.

41. Para los vectores propuestos $\vec{u} = \langle 3, -2\rangle$ y $\vec{v} = \langle 4, \lambda\rangle$ determine los valores de λ para que dichos vectores sean:

    a) paralelos,
    b) perpendiculares.

42. Demuestre que: $(\vec{A} + \vec{B}) \cdot (\vec{B} + \vec{C}) \times (\vec{C} + \vec{A}) = 2\vec{A} \cdot \vec{B} \times \vec{C}$.

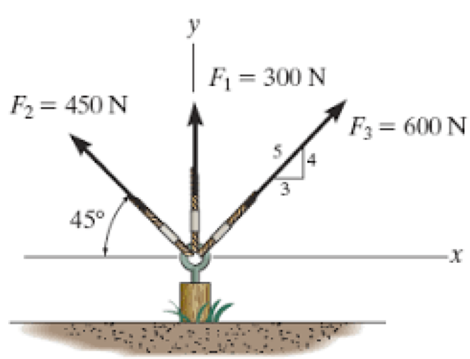
43. Para un punto dado P en el espacio y un vector $\vec{L}$ que representa la directriz de una recta en $\mathbb{R}^3$, demuestre que la distancia del punto a la recta se puede determinar por $d = \frac{||\vec{PA}\times\vec{L}||}{||\vec{L}||}$, donde A es un punto de la recta.

44. Muestre que los vectores $\vec{A} = 3\hat{\imath} + \hat{\jmath} - 2\hat{k}$, $\vec{B} = -\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} + 4\hat{k}$ y $\vec{C} = 4\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} - 7\hat{k}$ pueden formar los lados de un triángulo, de ser cierto, determine la longitud de las medianas de dicho triángulo.

45. Demuestre que para cualquier vector constante $\vec{A}$, el vector $\vec{A}\times\vec{r}$ siempre es perpendicular al vector $\vec{A}$. El vector $\vec{r}$ es un vector de posición medido desde el origen.

46. Para los vectores $\vec{A} = 2\hat{\imath} + \hat{k}$, $\vec{B} = \hat{\imath} + \hat{\jmath} + \hat{k}$ y $\vec{C} = 4\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} - 6\hat{k}$, determine el vector $\vec{R}$ para que se cumpla que $\vec{R} \times \vec{B} = \vec{C} \times \vec{B}$ y $\vec{R} \cdot \vec{A} = 0$, de ser posible.

47. Usando la disposición de las fuerzas del siguiente dibujo, escriba F_3 en término de F_2 y F_1.



48. Si $a = 2\hat{\imath} + \hat{\jmath} - 3\hat{k}$, $b = \hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + \hat{k}$, hallar un vector de módulo 5 perpendicular a los vectores a y b.

49. Hallar el volumen del paralelepípedo cuyas aristas son $a = 6\hat{\imath} - 9\hat{\jmath} + 12\hat{k}$, $\vec{b} = 2\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} - 2\hat{k}$ y $\vec{c} = 6\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} + 6\hat{k}$.

50. Demostrar que el área de un paralelogramo de los lados $\vec{a}$ y $\vec{b}$ es $|\vec{a} \times \vec{b}|$. Haga un dibujo en el plano.

51. Hallar los ángulos que forma el vector $\vec{a} = 3\hat{\imath} - 5\hat{\jmath} + 4\hat{k}$ con los ejes coordenados.

52. Hallar el área del triángulo cuyos vértices son los puntos $a = 3\hat{\imath} - \hat{\jmath} + 2\hat{k}$, $b = \hat{\imath} - \hat{\jmath} - 3\hat{k}$ y $c = 4\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} + \hat{k}$. Recuerda que el área de un triángulo es la mitad del área de un paralelogramo.

53.
    a) Simplificar la expresión $(3A - 5B + 4C) \cdot (2A - B + 3C) \times (A - 3B + 2C)$.
    b) Comprobar el resultado para $A = [-3, 2, -1]$, $B = [5, 4, -3]$ y $C = [1, -1, -7]$.

54. Hallar la distancia del punto $p_1 = (2, -1, 5)$ al plano P, donde $P = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^3 : \vec{v} = \alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \vec{v}_3, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\}$ donde $\vec{v}_1 = [1, 3, -1]$, $\vec{v}_2 = [4, 1, -2]$ y $\vec{v}_3 = [5, 4, -3]$.

55. Si $\vec{a}_1 = 2\hat{\imath}+3\hat{\jmath}-\hat{k}$, $\vec{a}_2 = \hat{\imath}-\hat{\jmath}+4\hat{k}$ y $\vec{a}_3 = 2\hat{\imath}-3\hat{\jmath}-\hat{k}$, forman un conjunto recíproco de vectores. (a) Obtener a los vectores $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$ y $\vec{b}_3$. (b) Comprobar que $[\vec{a}_1\vec{a}_2\vec{a}_3] = 1/[\vec{b}_1\vec{b}_2\vec{b}_3]$.

56. Hallar la ecuación de la recta $\mathfrak{L}_2$ que pasa por el punto $B = (5, -3, -2)$ y es paralela a la recta $\mathfrak{L}_1$, donde $\mathfrak{L}_1 = P_1 \cap P_2$, con $P_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 7x - y + 2z = -5\}$ y $P_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + 5y - z = -9\}$.

57.
    a) Simplificar la expresión $(2A + 3B - 5C) \cdot (3A - 2B + 4C) \times (2A - B + 5C)$.
    b) Comprobar el resultado para $A = [4, -1, 2]$, $B = [2, 1, -3]$ y $C = [5, 1, -1]$.

58. Hallar la ecuación del plano P_2 que dista 13 unidades del plano P_1, donde $P_1 = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^3 : \vec{v} = \alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \vec{v}_3, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\}$ donde $\vec{v}_1 = [1, -3, -2]$, $\vec{v}_2 = [5, -3, -1]$ y $\vec{v}_3 = [6, 2, -5]$.

59. Si $\vec{a}_1 = \hat{\imath}-3\hat{\jmath}-\hat{k}$, $\vec{a}_2 = 2\hat{\imath}+\hat{\jmath}-2\hat{k}$ y $\vec{a}_3 = 4\hat{\imath}+\hat{\jmath}-3\hat{k}$ forman un conjunto recíproco de vectores. (a) Obtener a los vectores $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$ y $\vec{b}_3$. (b) Comprobar que $[\vec{a}_1\vec{a}_2\vec{a}_3] = 1/[\vec{b}_1\vec{b}_2\vec{b}_3]$.

60. Hallar la distancia entre las rectas $\mathfrak{L}_1$ y $\mathfrak{L}_2$. Donde $\mathfrak{L}_1 = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : [x, y, z] = [2 - 5t, 4 - t, 9 - 3t], t \in \mathbb{R}\}$ y $\mathfrak{L}_2 = P_1 \cap P_2$ con $P_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + 3y - z = 5\}$ y $P_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 5x - y + 2z = -6\}$.

61. Considerar los vectores $\vec{u} = 3\hat{\imath} + 4\hat{\jmath}$ y $\vec{v} = \hat{\imath} + \alpha\hat{\jmath}$. Determinar α de tal manera que:

    a) $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean ortogonales.

    b) $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean paralelos.

    c) $\vec{u}$ y $\vec{v}$ formen un ángulo de $\frac{\pi}{4}$.

62. Sean $\vec{a}' = \frac{\vec{b}\times\vec{c}}{\vec{a}\cdot\vec{b}\times\vec{c}}$, $\vec{b}' = \frac{\vec{c}\times\vec{a}}{\vec{a}\cdot\vec{b}\times\vec{c}}$ y $\vec{c}' = \frac{\vec{a}\times\vec{b}}{\vec{a}\cdot\vec{b}\times\vec{c}}$ con $\vec{a}\cdot\vec{b}\times\vec{c} \neq 0$, vectores en $\mathbb{R}^3$. Obtener:

    a) $\vec{a}'\cdot\vec{a}$

    b) $\vec{b}'\cdot\vec{c}$

    c) De acuerdo con el resultado anterior, ¿que ángulo forman entre sí los vectores $\vec{b}'$ y $\vec{c}$?

63. Encuentre una ecuación del plano perpendicular al vector $\vec{A} = 2\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} + 6\hat{k}$ y que pasa por el punto terminal del vector $\vec{B} = \hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 3\hat{k}$.

64. Encuentre la ecuación paramétrica de la recta que pasa por el punto terminal del vector $\vec{B} = \hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 3\hat{k}$ y el origen.

65. Obtener la distancia del plano obtenido en el primer punto y el origen.

66. Determinar la fórmula para obtener la distancia de cualquier punto $P(x_1, y_1, z_1)$ a la recta $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(v_x, v_y, v_z)$.

67. Sean $\vec{u} = \hat{\imath} - 6\hat{\jmath} + 2\hat{k}$, $\vec{v} = 2\hat{\jmath} + 7\hat{k}$ y $\vec{w} = -2\hat{\imath} + 12\hat{\jmath} - 4\hat{k}$. Determinar si $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente independientes o dependientes.

68. Encuentre los ángulos internos de un triángulo en el que dos de sus lados están formados por los vectores $\vec{A} = -2\hat{\imath} + 5\hat{\jmath} + 6\hat{k}$ y $\vec{B} = 3\hat{\imath} + \hat{\jmath} + 2\hat{k}$.

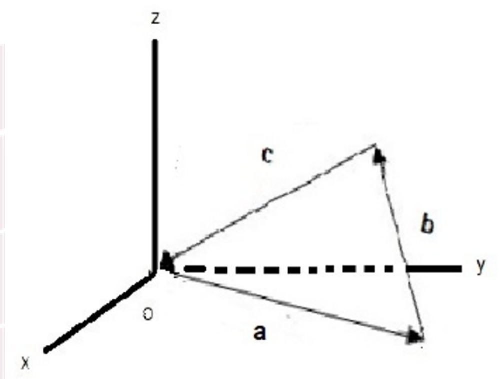
69. Sean $P(1, 0, 1)$, $A(6, 1, -3)$ y $B(2, 3, -1)$ puntos en $\mathbb{R}^3$. Obtener:

    a) La ecuación paramétrica de la recta que pasa por A y B, así como la distancia de la recta al origen.

    b) El punto más cercano al punto P sobre la recta.

70. Sean $r_1 = x_1\hat{\imath} + y_1\hat{\jmath} + z_1\hat{k}$, $r_2 = x_2\hat{\imath} + y_2\hat{\jmath} + z_2\hat{k}$, $r_3 = x_3\hat{\imath} + y_3\hat{\jmath} + z_3\hat{k}$ los vectores de posición de los puntos P_1, P_2 y P_3. Encontrar una ecuación para el plano que contiene P_1, P_2 y P_3.

71. Dada la siguiente configuración de tres vectores $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ en el espacio $\mathbb{R}^3$, diga si son linealmente dependientes o independientes escribiendo la ecuación de la combinación lineal de los vectores y los escalares correspondientes. Justifique su respuesta.



72. Considere un rectángulo de lados vectoriales. Calcule la longitud de cada una de las dos diagonales del rectángulo y diga si tienen la misma longitud o no, demostrándolo por cálculo directo. Dibuje el esquema geométrico asociado al problema.

73. Dados dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$, ¿qué condición deben de cumplir $\vec{A}$ y $\vec{B}$ para que el valor del producto punto sea igual al del producto cruz? Justifique su respuesta analíticamente y trace el diagrama ilustrativo.

74. *a*) En el espacio tridimensional $\mathbb{R}^3$ halle una ecuación para el plano XY que pasa por el origen de coordenadas O, siendo $\mathbf{r} = (x, y, z)$ un punto cualquiera sobre el plano. ¿Cuál es el vector normal? Justifique analíticamente su respuesta.

    b) En el espacio tridimensional $\mathbb{R}^3$ halle una ecuación para la recta conocida como eje X que pasa por el origen de coordenadas O, siendo $\mathbf{r} = (x, y, z)$ un punto cualquiera sobre dicho eje. ¿Cuál es un vector paralelo al eje X? Justifique analíticamente su respuesta.

Figura 2: Eje X y plano XY en el espacio $\mathbb{R}^3$.

75. Las diagonales del paralelogramo son los vectores $\mathbf{A} = (3, -4, -1)$ y $\mathbf{B} = (2, 3, -6)$, demuestre que el paralelogramo es un rombo y determine la longitud de sus lados y ángulos.

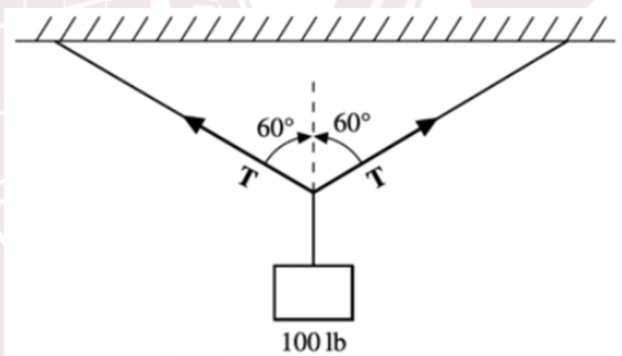
76. Sea $P = (3, 1, 2)$ y $Q = (1, -2, -4)$:a) Encuentre una ecuación del plano que pasa por Q y es perpendicular a PQ.b) Calcule la distancia del punto $(-1, 1, 1)$ al plano.

77. Encuentre el área del triángulo con vértices:

    a) $(3, -1, 2)$, $(1, -1, -3)$ y $(4, -3, 1)$
    b) $(2, -3, -2)$, $(-2, 3, 2)$ y $(4, 3, -1)$

78. Sea $P = (3, -2, -1)$, $Q = (1, 3, 4)$ y $R = (2, 1, -2)$ y el origen $O = (0, 0, 0)$, encuentre la distancia de P al plano OQR.

79. Un peso de 100 libras está suspendido de su centro por medio de una cuerda formando ángulos de $60°$ con la vertical en cada extremo. Determine la tensión T en la cuerda.



80. Demostrar el teorema de Pitágoras para un triángulo rectángulo cualquiera $c^2 = a^2 + b^2$, con a y b la longitud de los catetos y c la longitud de la hipotenusa.

81. El parámetro continuo t puede tomar todos los valores reales. Trazar la curva cuyas ecuaciones paramétricas son: $x = at$, $y = bt$, $z = 0$. ¿Qué representa la gráfica?

82. Si el ángulo entre los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ es de $60°$ y $\|\mathbf{a}\| = \|\mathbf{b}\| = 3$, demostrar que $\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| = 3$.

83. a) Desarrollar y simplificar la expresión:

$$(2\mathbf{A} - 3\mathbf{B} + 5\mathbf{C}) \cdot (-2\mathbf{A} + \mathbf{B} - 4\mathbf{C}) \times (6\mathbf{A} + \mathbf{B} - 5\mathbf{C})$$

    b) Comprobar el resultado para $\mathbf{A} = [3, -5, 4]$, $\mathbf{B} = [2, -1, -4]$ y $\mathbf{C} = [7, -1, 2]$.

84. a) Demostrar que la distancia d entre los planos $\mathcal{P}_1 : Ax + By + Cz = D_1$ y $\mathcal{P}_2 : Ax + By + Cz = D_2$ es:

$$d = \frac{|D_2 - D_1|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

    b) Usar el resultado anterior para hallar la distancia entre los planos:

$$\mathcal{P}_1 : \begin{cases} x = 3u - v + 5 \\ y = u - 5v + 2 \\ z = 4u - 3v - 1 \end{cases} \quad \text{y} \quad \mathcal{P}_2 : \begin{cases} x = 3u - v - 7 \\ y = u - 5v + 3 \\ z = 4u - 3v + 2 \end{cases}$$

85. Hallar la ecuación de la recta $\mathcal{L}_2$ que pasa por el punto $A = (-7, 3, -5)$ y que es paralela a las recta $\mathcal{L}_1$, donde $\mathcal{L}_1 = \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$ es la intersección de los planos $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$, con:

$$\mathcal{P}_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 7x - 2y + 5z = -4\} \quad \text{y} \quad \mathcal{P}_2 : \begin{cases} x = 2u + v - 3 \\ y = 5u - v + 1 \\ z = 3u - 2v - 4 \end{cases}$$

86. Si $\vec{a}_1 = 3\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - 5\hat{k}$, $\vec{a}_2 = 4\hat{\imath} - \hat{\jmath} - \hat{k}$ y $\vec{a}_3 = 5\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + \hat{k}$, forman un conjunto recíproco de vectores. (a) Obtener a los vectores $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$ y $\vec{b}_3$. (b) Para el vector $\vec{d} = 7\hat{\imath} - 4\hat{\jmath} + 3\hat{k}$, comprobar que:

$$\vec{d} = (\vec{d} \cdot \vec{b}_1)\vec{a}_1 + (\vec{d} \cdot \vec{c}b_2)\vec{a}_2 + (\vec{d} \cdot \vec{b}_3)\vec{a}_3$$

87. a) Utilice métodos vectoriales para hallar las ecuaciones de las alturas del triángulo ΔPQR donde $P = (-5, 2)$, $Q = (2, -2)$ y $R = (4, 7)$. b) Calcule el área de dicho triángulo.

88. a) Desarrollar y simplificar la expresión:

$$(3\mathbf{A} - \mathbf{B} + 4\mathbf{C}) \cdot (5\mathbf{A} + \mathbf{B} - 6\mathbf{C}) \times (7\mathbf{A} - \mathbf{B} - 2\mathbf{C})$$

b) Comprobar el resultado para $\mathbf{A} = [5, -1, 4]$, $\mathbf{B} = [3, 2, -1]$ y $\mathbf{C} = [6, 1, -2]$.

89. Hallar la ecuación del plano $\mathcal{P}_2$ que dista 13 unidades del plano $\mathcal{P}_1$, donde:

$$\mathcal{P}_1 = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{v} = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3\}$$

con $\mathbf{v}_1 = [-5, 3, -2]$, $\mathbf{v}_2 = [4, 1, -1]$ y $\mathbf{v}_3 = [1, -4, 2]$.

90. Hallar la distancia del punto $P_1 = (-7, 1, -5)$ a la recta $\mathcal{L}$ donde $\mathcal{L} = \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$ es la intersección de los planos $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$, con:

$$\mathcal{P}_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 5x - y + 3z = -2\} \quad \text{y} \quad \mathcal{P}_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x - 7y + 2z = 9\}$$

91. Sea el triángulo ΔPQR donde $P = (x_1, y_1)$, $Q = (x_2, y_2)$ y $R = (x_3, y_3)$. Demostrar que el área de dicho triángulo es igual al valor absoluto de:

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

92. Si $\vec{a}_1 = \hat{\imath} - 5\hat{\jmath} + 2\hat{k}$, $\vec{a}_2 = 3\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} - \hat{k}$ y $\vec{a}_3 = 4\hat{\imath} - \hat{\jmath} + 2\hat{k}$, forman un conjunto recíproco de vectores. (a) Obtener a los vectores $\vec{b}_1, \vec{b}_2$ y $\vec{b}_3$. (b) Comprobar que:

$$\vec{a}_1 \times \vec{b}_1 + \vec{a}_2 \times \vec{b}_2 + \vec{a}_3 \times \vec{b}_3 = \vec{0}$$

93. Utilice métodos vectoriales para hallar las ecuaciones de las bisectrices del triángulo ΔPQR donde $P = (-7, -3)$, $Q = (5, 1)$ y $R = (-2, 8)$.

94. *a*) Desarrollar y simplificar la expresión $(5A - 2B + 4C) \cdot \left[(2A - B + 3C) \times (A - 5B + 7C)\right]$

    b) Comprobar el resultado para $A = [1, -3, 2]$, $B = [4, 1, -1]$ y $C = [5, 3, -4]$

95. Sean dos rectas $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ en el plano xy con pendientes m_1 y m_2 respectivamente. Si

$$\alpha = \angle(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2)$$

es el ángulo entre las rectas $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$. Demostrar que

$$\tan\alpha = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}.$$

96. Hallar la distancia del punto

$$P_1 = (-7, 3, -4)$$

al plano $\mathscr{P}$, donde

$$\mathscr{P} : \begin{cases} x = 4u - 3v - 1 \\ y = 3u + v - 2 \\ z = u - 5v + 3 \end{cases}$$

97. Hallar la ecuación de la recta $\mathcal{L}_2$ que pasa por el punto

$$A = (2, -4, 1)$$

y que es paralela a la recta $\mathcal{L}_1$, donde $\mathcal{L}_1 = \mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2$ es la intersección de los planos $\mathscr{P}_1$ y $\mathscr{P}_2$, con

$$\mathscr{P}_1 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x - y + 5z = 8\right\} \qquad \text{y} \qquad \mathscr{P}_2 : \begin{cases} x = u - v + 3 \\ y = 2u - 3v - 1 \\ z = -u - 4v + 2 \end{cases}$$

98. Dados los vectores

$$\vec{a}_1 = \hat{\imath} - \hat{\jmath} - 3\hat{k}, \qquad \vec{a}_2 = 2\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} - 4\hat{k} \qquad \text{y} \qquad \vec{a}_3 = -\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - \hat{k}.$$

    a) Comprobar que son no coplanares.
    b) Obtener con dichos vectores a los vectores $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$ y $\vec{b}_3$.
    c) Para el vector
    $\vec{d} = 4\hat{\imath} + 5\hat{\jmath} - 7\hat{k}$, comprobar que $\vec{d} = (\vec{d} \cdot \vec{b}_1)\vec{a}_1 + (\vec{d} \cdot \vec{b}_2)\vec{a}_2 + (\vec{d} \cdot \vec{b}_3)\vec{a}_3$

99. a) Desarrollar y simplificar la expresión

$$(3A - B + 5C) \cdot \left[(2A + 3B - C) \times (4A + B - 5C)\right]$$

b) Comprobar el resultado para

$$A = [-1, 2, -5], \qquad B = [1, -4, 3] \qquad \text{y} \qquad C = [3, -1, 1].$$

100. Sean dos rectas $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ en el plano xy con pendientes no nulas m_1 y m_2 respectivamente. Demostrar que

$$\mathcal{L}_1 \perp \mathcal{L}_2,$$

$\mathcal{L}_1$ es perpendicular a $\mathcal{L}_2$, si

$$m_2 = -\frac{1}{m_1}.$$

101. Hallar la ecuación del plano $\mathscr{P}_2$ que dista 10 unidades del plano $\mathscr{P}_1$, donde

$$\mathscr{P}_1 : \begin{cases} x = 4u - 3v - 1 \\ y = 3u + v - 2 \\ z = u - 5v + 3 \end{cases}$$

102. Hallar la distancia del punto

$$P_1 = (3, -7, 1)$$

a la recta $\mathcal{L}$, donde

$$\mathcal{L} = \mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2$$

es la intersección de los planos $\mathscr{P}_1$ y $\mathscr{P}_2$, con

$$\mathscr{P}_1 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - 3y + 5z = -1\right\} \qquad \text{y} \qquad \mathscr{P}_2 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - z = 4\right\}$$

103. Dados los vectores

$$\vec{a}_1 = -\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - \hat{k}, \qquad \vec{a}_2 = 3\hat{\imath} - \hat{\jmath} - \hat{k} \qquad \text{y} \qquad \vec{a}_3 = -4\hat{\imath} + \hat{\jmath} + \hat{k}.$$

a) Comprobar que son no coplanares.

b) Obtener con dichos vectores a los vectores $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$ y $\vec{b}_3$.

c) Para el vector

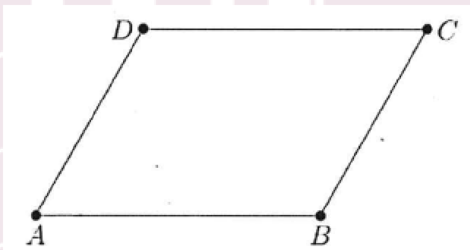
$$\vec{d} = -7\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} + 2\hat{k},$$

comprobar que

$$\vec{d} = (\vec{d} \cdot \vec{b}_1)\vec{a}_1 + (\vec{d} \cdot \vec{b}_2)\vec{a}_2 + (\vec{d} \cdot \vec{b}_3)\vec{a}_3.$$

104. Dos ciudades A y B están situadas una frente a otra en las dos orillas de un río de 9 km de ancho, siendo la velocidad del agua de 6 km/h. Un hombre en A quiere ir a la ciudad C que se encuentra a 7 km aguas arriba de B y en su misma ribera. Si la embarcación que utiliza tiene una velocidad máxima de 12 km/h y desea llegar a C en el menor tiempo posible, ¿qué dirección debe tomar y cuánto tiempo emplea en conseguir su propósito?

105. Dado el siguiente paralelogramo pruebe que $\overrightarrow{BO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$.



106. ¿Para qué valores de a son

$$\vec{A} = \hat{\imath} + a\hat{\jmath} - 2\hat{k} \qquad \text{y} \qquad \vec{B} = -4\hat{\imath} + 2a\hat{\jmath} + a\hat{k}.$$

107. Hallar el área de un triángulo cuyos vértices son los puntos

$$P(-1,2,3), \qquad Q(1,3,2) \qquad \text{y} \qquad R(2,-1,1).$$

108. Si θ es el ángulo entre los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, mostrar

$$\operatorname{Proy}_{\vec{u}} \vec{v} \cdot \operatorname{Proy}_{\vec{v}} \vec{u} = (\vec{u} \cdot \vec{v}) \cos^2(\theta)$$

109. Obtener la ecuación segmentaria para la recta de intersección de los planos $3x-2y+z = 1$, $2x + y - 3z = 3$ y el ángulo entre los planos.

110. Sea L_1 la recta que pasa por el origen y el punto $P(2,0,-1)$, L_2 la recta cuyas ecuaciones paramétricas son

$$x = 1 + 3t, \qquad y = -1 + 2t, \qquad z = 1 + 2t.$$

Obtener la distancia entre L_1 y L_2.

111. Determine la ecuación del plano que contiene a los puntos

$$P(3,0,-1), \qquad Q(-2,-2,3) \qquad \text{y} \qquad R(7,1,-4).$$

112. Deducir una fórmula para determinar la distancia entre una recta L y un punto P en $\mathbb{R}^3$.

113. Sean $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ y $\vec{D}$ vectores en $\mathbb{R}^3$. Mostrar que se cumplen las siguientes identidades.

   a) $|\vec{A}\times\vec{B}|^2 = |\vec{A}|^2|\vec{B}|^2 - (\vec{A}\cdot\vec{B})^2$

   b) $(\vec{A}\times\vec{B})\cdot(\vec{C}\times\vec{D}) = (\vec{A}\cdot\vec{C})(\vec{B}\cdot\vec{D}) - (\vec{B}\cdot\vec{C})(\vec{A}\cdot\vec{D})$

114. Obtener la ecuación segmentaria para la recta de intersección de los planos $x+y+z=1$, $x+2y+2z=1$ y obtener el ángulo entre los planos.

115. Determine la ecuación de la recta que pasa por $(-6,2,3)$ y es paralela a la recta

$$\frac{1}{2}x = \frac{1}{3}y = z+1,$$

además obtener la distancia del origen a dicha recta.

116. Determine la ecuación del plano que contiene a los puntos

$$P(x_0,y_0,z_0), \qquad Q(x_1,y_1,z_1) \qquad \text{y} \qquad R(x_2,y_2,z_2).$$

117. Deducir una fórmula para determinar la distancia entre un plano y un punto P en $\mathbb{R}^3$.

118. Se tienen los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ demostrar la ley del paralelogramo

$$\|\vec{a}+\vec{b}\|^2 + \|\vec{a}-\vec{b}\|^2 = 2\|\vec{a}\|^2 + 2\|\vec{b}\|^2$$

Su interpretación geométrica dice que la suma de los cuadrados de las longitudes de las diagonales del paralelogramo determinado por $\vec{a}$ y $\vec{b}$ es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los cuatro lados.

119. Sea π el plano en $\mathbb{R}^3$ con un vector normal $\mathbf{n}$ que pasa por el punto A con vector de posición $\mathbf{a}$. Si $\mathbf{b}$ es el vector de posición de un punto B en $\mathbb{R}^3$, determine que la distancia D entre B y π está dada por:

$$D = \frac{|\mathbf{n}\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a})|}{\|\mathbf{n}\|}$$

120. Encuentre la ecuación de los planos (π_1,π_2) que son paralelos al plano

$$\pi:\ x+2y-2z=1,$$

los cuales se encuentran a una distancia de 2 unidades del plano π.

121. Determinar si las rectas L_1 y L_2 son paralelas, perpendiculares, secantes o alabeadas, en el caso que se corten en un punto encontrar el punto de intersección.

$$L_1:\ \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{4}, \qquad L_2:\ \frac{x}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+2}{3}$$

122. Realizar las operaciones solicitadas.

    a) $[(-2\hat{\imath} + \hat{\jmath} - 3\hat{k}) \times \hat{\imath}] \times [\hat{k} + \hat{\jmath}]$
    b) $[(\hat{\imath} - \hat{\jmath}) \times (\hat{\jmath} - \hat{k})] \times [\hat{\imath} + 5\hat{k}]$
    c) $[2\hat{\imath} + \hat{\jmath}] \cdot [(\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} + \hat{k}) \times (4\hat{\imath} + \hat{k})]$

123. Sea L la recta determinada por $P_1(1, -1, 2)$ y $P_2(-2, 3, 1)$ y sea π el plano determinado por $Q_1(2, 0, -4)$, $Q_2(1, 2, 3)$, $Q_3(-1, 2, 1)$. Encontrar, cuando exista el punto de intersección de L y π.

124. Resolver cada inciso.

    a) Si tenemos que $\|\vec{a}\| = 3$, $\|\vec{b}\| = 4$ calcular $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$
    b) $\text{proy}_{\vec{b}}\ x\vec{a} = \alpha\ \text{proy}_{\vec{b}}\ \vec{a},\ \forall\, \alpha \in \mathbb{R}$

125. Sea la recta parametrizada por

$$L = \begin{cases} x = t \\ y = mt + b, \\ z = 0 \end{cases}$$

en el plano xy, y sea el punto $P(x_0, y_0, z_0)$, demostrar que la distancia entre el punto y la recta está dada por:

$$d_{P_0,L} = \sqrt{\frac{(1 + m^2)z_0^2 + [y_0 - (mx_0 + b)]^2}{1 + m^2}}$$

126. Establecer las ecuaciones paramétricas para la recta que pasa por el punto $Q(0, 1, 2)$ y es paralelo al plano $\pi : x + y + z = -2$ y es perpendicular a la recta

$$L : \vec{r}(t) = (1, 1, 0) + t(1, -1, 2)$$

127. Realizar la operación solicitada. $[(-2\hat{\imath} + \hat{\jmath} - 3\hat{k}) \times \hat{\imath}] \times [(\hat{\imath} + \hat{\jmath})]$

128. Demostrar que

$$(\vec{A} - \vec{B}) \times (\vec{A} + \vec{B}) = 2\vec{A} \times \vec{B},$$

de una interpretación geométrica.

129. En un paralelogramo, la recta que une el vértice superior izquierdo con el punto localizado a un cuarto en el lado opuesto divide a la diagonal del paralelogramo, encuentre la razón de proporcionalidad.

130. Si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son vectores unitarios y θ es el ángulo entre ellos, demostrar que:

$$\frac{1}{2}\|\vec{a} - \vec{b}\| = \left|\sin\left(\frac{1}{2}\theta\right)\right|$$

131. Dados los conjuntos de vectores $C_1 = \{[1, 1, 0], [0, 1, 1], [1, 0, 1]\}$ y el conjunto $C_2 = \{[1, -6, 2], [0, 2, 7], [-2, 12, -4]\}$, determine cual es linealmente independientes y utilicelo para escribir al vector $\vec{A} = [5, 3, -1]$ como una combinación lineal.

132. Demuestre la propiedad:
$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times (\mathbf{c} + \mathbf{b})$$

133. Encuentre las ecuaciones simétricas para la recta que pasa por (-4,5,2) y es paralela al plano xy y al plano yz.

134. Para los vectores propuestos $\vec{u} = \langle 3, -2, 1\rangle$ y $\vec{v} = \langle 4, \lambda_1, \lambda_2\rangle$ determine los valores de λ's para que dichos vectores sean:

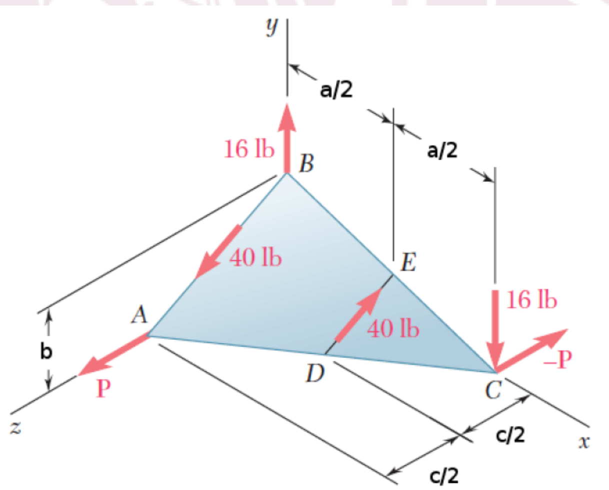
    a) paralelos,

    b) perpendiculares.

    Si es que existen dichas λ's.

135. Los puntos $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$ y $C(0, 0, c)$ pertenecen a un plano. Determine las coordenadas sobre dicho plano que tienen la menor distancia al origen.

136. Una canica diminuta golpea la siguiente rampa,



Lo hace con velocidad $\vec{v} = (-2\hat{\imath} - \hat{\jmath} - 2\hat{k})$m/s y exactamente en el centro de la figura. Si se considera la pelota como puntual, el golpe totalmente elástico y sin efecto, determine las coordenadas del punto de contacto y la ecuación del plano del rebote. Se sabe que $a = 0{,}8$ m, $b = 0{,}1$ m y $c = 0{,}4$ m.

137. Una recta R_1 pasa por los puntos $(2, 5, 9)$ y $(6, 0, 10)$. Otra recta R_2 tiene como ecuación vectorial $\vec{R}_2 = \langle 8, 8, 0\rangle + t\langle 2, 1, -3\rangle$. Muestre de forma analítica si las siguientes afirmaciones son correctas o no:

    a) uno de los puntos mencionados es la intersección de las rectas,

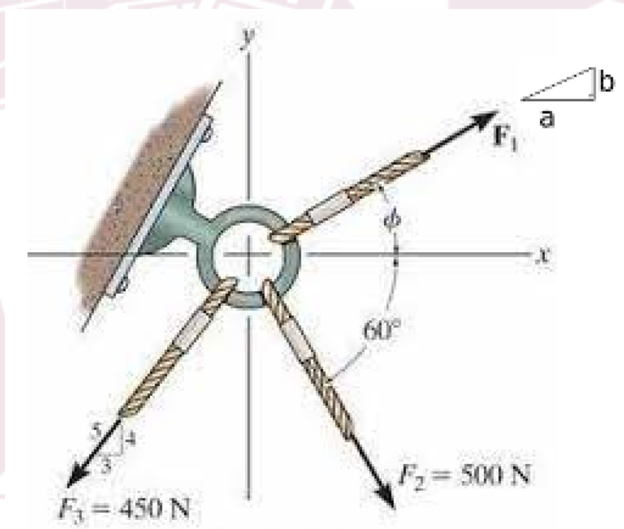
    b) las rectas son perpendiculares.

138. Los puntos $A(3, 0, -1)$ y $B(-1, -2, 4)$ son vértices de un paralelogramo y $M(1, -1, 3)$ es su centro. Determine los otros vértices de dicha figura.

139. Usando desarrollos vectoriales apropiados, demuestre que la distancia de un punto (x_o, y_o) a la recta $ax + by + c = 0$, se puede escribir como:

$$d = \frac{|ax_o + by_o + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

140. En la siguiente figura,



$||\vec{F}_1|| = 200$ N, $a = 8$ y $b = 6$. Usando esta información, escriba a $\vec{F}_3$ usando a $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ como base.

141. Sean $\hat{v}_1$, $\hat{v}_2$, $\hat{v}_3$ tres vectores unitarios en $\mathbb{R}^3$ y ortogonales entre sí. Si $\vec{v} = \alpha\hat{v}_1 + \beta\hat{v}_2 + \gamma\hat{v}_3$, con α, β y γ números reales. Mostrar que:

    a) $\alpha = \vec{v} \cdot \hat{v}_1$

    b) $\beta = \vec{v} \cdot \hat{v}_2$

    c) $\gamma = \vec{v} \cdot \hat{v}_3$

¿Puede dar una interpretación geométrica de los resultados anteriores?

142. Hallar el volumen del paralelepípedo determinado por los vértices $(0,1,0)$, $(1,1,1)$, $(0,2,0)$ y $(3,1,2)$.

143. Considere los puntos $P(1,3,2)$ y $Q(-1,-1,-3)$. Determine los puntos de intersección de la recta que pasa por P y Q con los planos coordenados, si es que existen.

144. Calcule la distancia del punto $P(3,1,-1)$ al plano $2x+y-z=6$ y determine el punto Q sobre el plano, que es el más cercano a P.

145. Demuestre la propiedad
$$\vec{u}\times(\vec{v}+\vec{w})=(\vec{u}\times\vec{v})+(\vec{u}\times\vec{w})$$
donde $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son vectores en el espacio.

146. Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores en el plano y sea λ un número real. Mostrar que el área del paralelogramo determinado por $\vec{u}$ y $\vec{v}+\lambda\vec{u}$ es la misma que la del determinado por $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

147. Si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son dos vectores en $\mathbb{R}^3$ no paralelos, tales que $\vec{c}=(\alpha+\beta-1)\vec{a}+(\alpha+\beta)\vec{b}$, $\vec{d}=(\alpha-\beta)\vec{a}+(2\alpha-\beta+1)\vec{b}$. Determine α y β tales que $\vec{c}=3\vec{d}$.

148. Considere los puntos $P(1,3,-2)$, $Q(1,-1,3)$ y $\vec{n}=\hat{\imath}+2\hat{\jmath}+2\hat{k}$. Determine el punto de intersección de la recta que pasa por P en dirección de $\vec{n}$ y el plano que pasa por Q perpendicular a $\vec{n}$.

149. Calcule la distancia del punto $P(2,3,0)$ al plano $5x+y+z=1$ y determine el punto sobre el plano, que es el más cercano a P.

150. Sean $\vec{u}=(2,1)$, $\vec{v}=(-2,3)$ y $\vec{w}=(1,-4)$ vectores en el plano, determine

    a) $(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w}$

    b) Verifique que se cumple la regla del término medio con el inciso anterior.

151. a) Desarrollar y simplificar la expresión:
$$(7A+3B-C)\cdot(-3A+B-5C)\times(2A+3B-4C)$$
b) Comprobar el resultado para $A=[2,-5,-4]$, $B=[3,2,-1]$ y $C=[7,-1,1]$.

152. Sean dos rectas L_1 y L_2 en el plano xy con pendientes m_1 y m_2 respectivamente. Si $\alpha=\angle(L_1,L_2)$ es el ángulo entre las rectas L_1 y L_2. Demostrar que:
$$\tan\alpha=\frac{|m_1-m_2|}{1+m_1m_2}$$

153. Hallar la distancia del punto $P_1 = (5, -4, -2)$ al plano P, donde:

$$P : \begin{cases} x = u - 3v + 5 \\ y = 2u - v - 3 \\ z = 5u - v + 2 \end{cases}$$

154. Hallar la ecuación de la recta L_2 que pasa por el punto $A = (7, -1, 4)$ y que es paralela a la recta L_1, donde $L_1 = P_1 \cap P_2$ es la intersección de los planos P_1 y P_2, con:

$$P_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - 7y + z = -9\}$$

$$P_2 : \begin{cases} x = 2u - v - 1 \\ y = u + v + 2 \\ z = 5u - v - 3 \end{cases}$$

155. Dados los vectores $\vec{a}_1 = -2\hat{\imath} + \hat{\jmath} + 4\hat{k}$, $\vec{a}_2 = \hat{\imath} - 5\hat{\jmath} - \hat{k}$ y $\vec{a}_3 = 3\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} - \hat{k}$. (a) Comprobar que son no coplanares. (b) Obtener con dichos vectores a los vectores recíprocos $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$ y $\vec{b}_3$. (c) Para el vector $\vec{d} = -5\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - 7\hat{k}$ comprobar que:

$$\vec{d} = (\vec{d} \cdot \vec{b}_1)\vec{a}_1 + (\vec{d} \cdot \vec{b}_2)\vec{a}_2 + (\vec{d} \cdot \vec{b}_3)\vec{a}_3$$

156. a) Desarrollar y simplificar la expresión:

$$(4A - 2B + C) \cdot (5A - B + 3C) \times (A + 3B - 2C)$$

b) Comprobar el resultado para $A = [2, -1, 1]$, $B = [5, -2, -3]$ y $C = [-4, 1, -1]$.

157. Sean dos rectas L_1 y L_2 en el plano xy con pendientes no nulas m_1 y m_2 respectivamente. Demostrar que $L_1 \perp L_2$ si $m_2 = -1/m_1$.

158. Hallar la ecuación del plano P_2 que dista 13 unidades del plano P_1, donde:

$$P_1 : \begin{cases} x = u - 2v + 5 \\ y = 2u + v - 3 \\ z = 4u - v - 2 \end{cases}$$

159. Hallar la distancia del punto $P_1 = (1, 7, -5)$ a la recta L, donde $L = P_1 \cap P_2$ es la intersección de los planos P_1 y P_2 con:

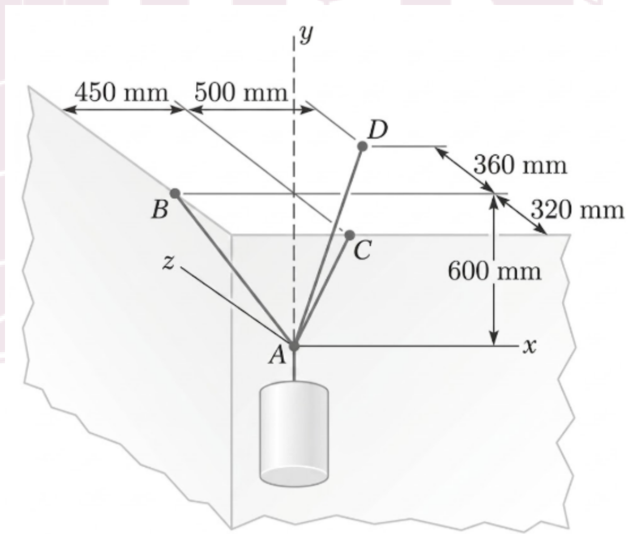
$$P_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 5x + y - 5z = 1\}$$

$$P_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x - 2y + z = -5\}$$

160. Dados los vectores $\vec{a}_1 = \hat{\imath} - 2\hat{\jmath} - 3\hat{k}$, $\vec{a}_2 = 5\hat{\imath} - \hat{\jmath} + \hat{k}$ y $\vec{a}_3 = 3\hat{\imath} - \hat{\jmath} - 3\hat{k}$. (a) Comprobar que son no coplanares. (b) Obtener con dichos vectores a los vectores $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$ y $\vec{b}_3$. (c) Para el vector $\vec{d} = 5\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - 3\hat{k}$, comprobar que:

$$\vec{d} = (\vec{d} \cdot \vec{b}_1)\vec{a}_1 + (\vec{d} \cdot \vec{b}_2)\vec{a}_2 + (\vec{d} \cdot \vec{b}_3)\vec{a}_3$$

161. Un contenedor se sostiene mediante tres cables unidos a un techo de la manera mostrada. Determine el peso W del contenedor, si se sabe que la tensión en el cable AD es de 4.3 kN.



162. Calcule las medidas de los ángulos entre las diagonales del rectángulo cuyos vértices son $A = (1, 0)$, $B = (0, 3)$, $C = (3, 4)$ y $D = (4, 1)$.

163. Determina la ecuación del plano que contiene las rectas L_1, L_2:

$$L_1 = \begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = 3 + t \end{cases} \qquad L_2 = \begin{cases} x = -2 - 2s \\ y = -5 + s \\ z = -1 - s \end{cases}$$

164. Demuestre la propiedad (resolver por método algebraico)

$$\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) + (\vec{u} \times \vec{w})$$

Donde $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son vectores en el espacio.

165. Considere a los puntos $A(1,2,-1)$, $B(2,-2,5)$ y $C(-3,2,4)$ encontrar

    a) Los ángulos internos del triángulo con vértices A, B y C.
    b) Calcular el área del triángulo $\triangle ABC$.
    c) Calcular la ecuación del plano que contiene a los puntos A, B y C.

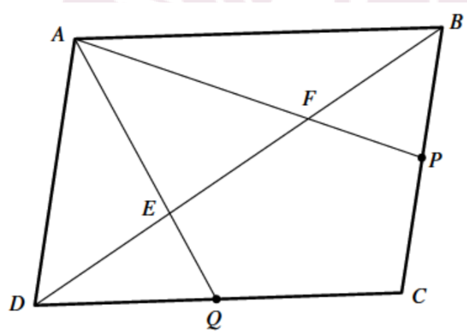
166. Hallar los valores de m que haga que los vectores $\vec{a} = \hat{\imath}+\hat{\jmath}-\hat{k}$, $\vec{b} = 2\hat{\imath}-\hat{\jmath}+\hat{k}$ y $\vec{c} = m\hat{\imath}-\hat{\jmath}+m\hat{k}$ sean coplanares.

167. Demostrar que para todo $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ no colineales, el vector normal $\vec{n}$ al plano está dado por
$$\vec{n} = \vec{a}\times\vec{b} + \vec{b}\times\vec{c} + \vec{c}\times\vec{a}$$

    a) Demostrar que además $\frac{1}{2}\|\vec{n}\|$ es el área del triángulo cuyos vértices son los extremos de $\vec{a}, \vec{b}$ y $\vec{c}$.

168. a) Encontrar la ecuación de la recta que pasa por $P(-4,1,7)$ y es perpendicular al plano $-7x+2y+3z=1$.
    b) Encontrar la intersección de dicho plano con la recta calculada en a).

169. En el paralelogramo $ABCD$, Q y P son puntos medios de los lados DC y BC respectivamente. ¿Cómo dividen las líneas AQ y AP a la diagonal DB?



170. Vector unitario en la dirección de $\vec{v} = (-6,8,-2)$:

    a) $(-\frac{3}{\sqrt{26}}, \frac{4}{\sqrt{26}}, -\frac{1}{\sqrt{26}})$
    b) $(\frac{3}{\sqrt{26}}, -\frac{4}{\sqrt{26}}, \frac{1}{\sqrt{26}})$
    c) $(-\frac{3}{26}, \frac{4}{26}, -\frac{1}{26})$
    d) $(-\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{4}{\sqrt{10}}, -\frac{1}{\sqrt{10}})$

171. Con $\vec{u} = (2, -1, 2)$, $\vec{v} = (-1, 4, 1)$, el ángulo entre ellos es aproximadamente:

 a) $71{,}6°$
 b) $108{,}3°$
 c) $60{,}0°$
 d) $120{,}0°$

172. Sean $A = (1, -2, 3)$, $B = (2, 0, -1)$. Área del triángulo OAB:?

 a) $\frac{\sqrt{69}}{2}$
 b) $\sqrt{69}$
 c) $\frac{\sqrt{70}}{2}$
 d) $\frac{\sqrt{65}}{2}$

173. Área del paralelogramo generado por $\vec{p} = (3, -2, 5)$ y $\vec{q} = (-1, 4, 2)$:

 a) $\sqrt{797}$
 b) $\frac{\sqrt{797}}{2}$
 c) $\sqrt{769}$
 d) $\sqrt{829}$

174. Sean $\vec{a} = (1, 2, 3)$, $\vec{b} = (2, -1, 4)$, $\vec{c} = (k, 1, 0)$. ¿Para qué k los tres son coplanares?:

 a) $-\frac{2}{11}$
 b) $\frac{2}{11}$
 c) $-\frac{11}{12}$
 d) 0

175. Sean $\vec{p} = (4, -3, 2)$, $\vec{q} = (-2, 1, 5)$.

 a) Calcula $\vec{p} \times \vec{q}$
 b) Área del triángulo determinado por $\vec{p}, \vec{q}$.
 c) Un vector normal unitario
 d) Verifica que $\vec{q} \cdot (\vec{p} \times \vec{q}) = 0$

176. Sean $\vec{u} = (1, 2, -1)$, $\vec{v} = (-2, 1, 3)$, $\vec{w} = (-3, 4, 5)$.

 a) Encuentre α, β tales que $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$
 b) $\vec{u} \times \vec{v}$ y el área del paralelogramo generado por $\vec{u}, \vec{v}$.
 c) Ángulo entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$

177. Sean $\vec{u} = (2, -1, 2)$, $\vec{v} = (m, 1, -2)$.

 a) Determina m para que $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = 60°$
 b) Con ese m, calcula el área del paralelogramo generado por $\vec{u}, \vec{v}$.
 c) Un vector normal unitario al plano de v con componente $z > 0$.

178. Sean $A = (2, -3, 1)$, $B = (5, 1, 2)$, $C = (-1, 0, 4)$.

 a) Ecuaciones paramétricas de las rectas AB y AC
 b) Área del triángulo ABC.
 c) Angulo entre $\vec{AB}$ y $\vec{AC}$.

179. Sean $\vec{a} = (1, -2, 3)$, $\vec{b} = (2, 1, -1)$, $\vec{c} = (k, 4, 0)$.

 a) Determina k para que $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sean coplanares.
 b) Toma $k = 10$: calcula el volumen del paralelepípedo.
 c) Con $k = 10$, halla λ tal que $\vec{d} = \lambda\vec{a} + \vec{b}$ sea perpendicular a $\vec{c}$

180. a) Desarrollar y simplificar la expresión

$$(2\mathbf{A} - 3\mathbf{B} + 5\mathbf{C}) \cdot (-4\mathbf{A} + 3\mathbf{B} - \mathbf{C}) \times (5\mathbf{A} - \mathbf{B} + 2\mathbf{C})$$

 b) Comprobar el resultado para $\mathbf{A} = [5, -1, -1]$, $\mathbf{B} = [5, 4, -3]$ y $\mathbf{C} = [6, -5, 2]$.

181. Sea el triángulo $\triangle PQR$ donde $P = (x_1, y_1)$, $Q = (x_2, y_2)$ y $R = (x_3, y_3)$. Sea $\vec{PQ} = [-b, a]$. Demostrar que el área del triángulo $\triangle PQR$ es

$$S_{\triangle PQR} = \frac{1}{2}|ax_3 + by_3 - c|$$

donde $ax + by = c$ es la recta que pasa por P y Q.

182. Hallar la ecuación de la recta $\mathscr{L}_2$ que pasa por el punto $A = (-5, 3, -8)$ y que es paralela a la recta $\mathscr{L}_1$, donde $\mathscr{L}_1 = \mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2$ es la intersección de los planos $\mathscr{P}_1$ y $\mathscr{P}_2$, con

$$\mathscr{P}_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 4x + 2y - 3z = 11\} \quad \text{y} \quad \mathscr{P}_2 : \begin{cases} x = u - 5v + 3 \\ y = -u + 5v \\ z = 2u - 3v + 4 \end{cases}$$

183. Hallar la ecuación de la esfera $\mathscr{E}$ que pasa por el punto $C = (-3, 7, -5)$ y que es tangente al plano $\mathscr{P}$, donde

$$\mathscr{P} : \begin{cases} x = 2u - 3v - 1 \\ y = u - 5v + 3 \\ z = u - v + 4 \end{cases}$$

184. Dados los vectores $\vec{a}_1 = 3\hat{\imath} - \hat{\jmath} + \hat{k}$, $\vec{a}_2 = -4\hat{\imath} + \hat{\jmath} + 3\hat{k}$ y $\vec{a}_3 = 2\hat{\imath} - \hat{\jmath} + \hat{k}$.

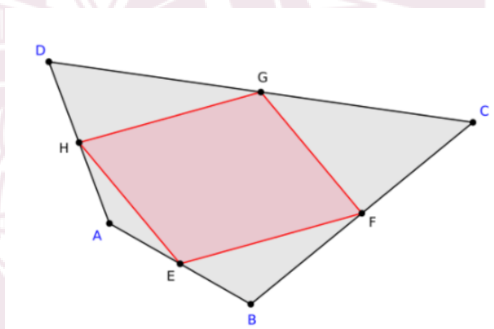
   a) Comprobar que son no coplanares.
   b) Obtener con dichos vectores a los vectores $\vec{b}_1, \vec{b}_2$ y $\vec{b}_3$.
   c) Para el vector $\vec{d} = 6\hat{\imath} - 7\hat{\jmath} + 2\hat{k}$, comprobar que

$$\vec{d} = (\vec{d} \cdot \vec{b}_1)\vec{a}_1 + (\vec{d} \cdot \vec{b}_2)\vec{a}_2 + (\vec{d} \cdot \vec{b}_3)\vec{a}_3$$

185. Considere a los puntos $A(3, -1, 2)$, $B(1, -1, 3)$ y $C(4, -3, 1)$ calcular

   a) El área del triángulo ABC.
   b) Los ángulos internos del triángulo
   c) Calcular la ecuación del plano que contiene a los puntos A, B y C.

186. Probar por métodos vectoriales que, dado un cuadrilátero $ABCD$ y P, Q, R y S los puntos medios de cada lado, si se juntan los puntos medios de lados adyacentes entonces el cuadrilátero $PQRS$ es un paralelogramo.



187. Sea $\vec{u}_1 = (1, 2, 3)$, $\vec{u}_2 = (0, -3, 2)$ y $\vec{u}_3 = (13, -2, -3)$

   a) Probar que los vectores no son coplanares
   b) Encontrar una base recíproca de $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$.

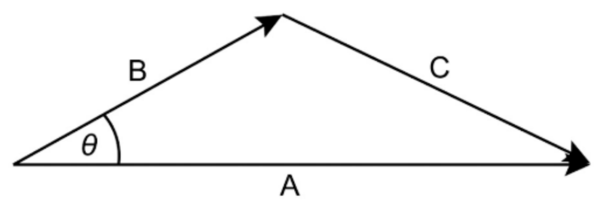
188. Determine los ángulos α, β y γ que el vector $\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$ forma con las direcciones positivas de los ejes coordenados, y mostrar que

$$\cos^2(\alpha) + \cos^2(\beta) + \cos^2(\gamma) = 1$$

189. Determine la proyección del vector $\vec{u} = 4\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} + \hat{k}$ sobre la línea que pasa por los puntos $P(2, 3, -1)$ y $Q(-2, -4, 3)$.

190. La ley de cosenos establece que si tres lados de un triángulo tienen longitudes $|\vec{A}| = A$, $|\vec{B}| = B$ y $|\vec{C}| = C$ y si el ángulo opuesto al lado C es θ, entonces

$$C^2 = A^2 + B^2 - 2AB\cos(\theta)$$



Utilizando métodos vectoriales demuestre la ley de cosenos. Sugerencia: Recuerde que $|\vec{C}|^2 = \vec{C} \cdot \vec{C}$.

191. En un sistema de visión por computadora, se desea determinar la orientación de una superficie plana detectada por una cámara. Tres puntos del plano en el espacio tridimensional están dados por:

$$A(1, 2, 1), \quad B(3, 5, 2), \quad C(2, 4, 6)$$

a) Determine un vector normal $\vec{n}$ al plano de la superficie detectada, ¿cómo podría utilizarse este vector normal para determinar la orientación del objeto respecto a la cámara?

b) Determine la ecuación de dicho plano.

Nota: Este tipo de análisis se utiliza en gráficos 3D y en aplicaciones de reconstrucción de superficies.

192. Si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son vectores no paralelos tales que $\vec{c} = (m + n - 1)\vec{a} + (m + n)\vec{b}$ y $\vec{d} = (m - n)\vec{a} + (2m - n + 1)\vec{b}$, hallar m y n tales que $\vec{c} = 3\vec{d}$

193. Expresar al vector $\vec{a} = \langle 5, 3, -1\rangle$ como una combinación lineal del conjunto de vectores $\vec{b}_1 = \langle 1, 0, -1\rangle$, $\vec{b}_2 = \langle -1, -1, 0\rangle$, $\vec{b}_3 = \langle 0, 0, 1\rangle$

194. Hallar un vector unitario que forma un ángulo de 45° con el vector $\vec{a} = \langle 2, 2, -1\rangle$, y un ángulo de 60° con $\vec{b} = \langle 0, 1, -1\rangle$.

195. Sean $\hat{a}$ y $\hat{b}$ vectores unitarios y θ el ángulo entre ellos. Demuestre que:

$$\frac{1}{2}\|\hat{a} - \hat{b}\| = \left| sen\left(\frac{1}{2}\theta\right)\right|$$

Sugerencia: Considere que $\|\hat{a} - \hat{b}\|^2 = (\hat{a} - \hat{b}) \cdot (\hat{a} - \hat{b})$

196. Sea ABC un triángulo, O cualquier punto, $\vec{a} = \vec{OA}$, $\vec{b} = \vec{OB}$, $\vec{c} = \vec{OC}$. Demuestre que el área del triángulo ABC es igual a $\frac{1}{2}\|\vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a}\|$.

197. Encontrar el volumen del paralelepípedo que tiene por lados adyacentes los vectores $\vec{a} = (4, -1, 7)$, $\vec{b} = (1, 1, 1)$ y $\vec{c} = (-2, 0, 3)$.

198. a) Hallar la ecuación del plano que contiene las rectas $\vec{\ell}_1(t) = (0, 1, -2) + t(2, 3, -1)$ y $\vec{\ell}_2(t) = (2, -1, 0) + t(2, 3, -1)$.
   b) Realice la gráfica del plano anterior.
   c) Encuentre la distancia entre el punto $P(4, 7, -9)$ y el plano del inciso a.

199. Hallar la intersección de los planos $x + (y - 1) + z = 0$ y $-x + (y + 1) - z = 0$.

200. Sen u, v y w vectores. Demuestre que $(u \times v) \times w + (v \times w) \times u + (w \times u) \times v = 0$.

201. Encontrar el volumen del paralelepípedo que tiene por lados adyacentes los vectores $\vec{v}_1 = (2, -1, 4)$, $\vec{v}_2 = (-2, 1, -1)$ y $\vec{v}_3 = (-2, 0, 3)$.

Unidad 2

1. El vector de posición para una partícula que se mueve sobre una superficie es $\vec{r}(t) = \cos(t)\hat{\imath} + \text{sen}(t)\hat{\jmath} + t^2\hat{k}$.

   a) Hallar la rapidez de la partícula en $t = 4\pi$.

   b) Hallar la ecuación paramétrica de la recta tangente a $\vec{r}(t)$ en $t = 4\pi$.

   c) ¿Dónde intersecta esta recta al plano xy?

2. La función vectorial $\vec{r}(t) = \cos(3t)\hat{\imath} + \text{sen}(3t)\hat{\jmath}$ con $0 \leq t \leq 2\pi$ describe una curva en el plano. Determinar:

   a) La ecuación de la recta tangente al punto $(3, 0)$.

   b) La longitud de la curva.

3. Un vector $\vec{V}$ se llama irrotacional si el rotacional de $\vec{V}$ es $\vec{0}$. Determinar los valores de α, β, γ de modo que $\vec{V}$ sea irrotacional.

$$\vec{V} = (-4x - 3y + \alpha z)\hat{\imath} + (\beta x + 3y + 5z)\hat{\jmath} + (4x + \gamma y + 3z)\hat{k}$$

4. Si $g(x, y) = x^2 + y^2 - 4x$, determinar la ecuación de un plano tangente a la curva de nivel $g(x, y) = 1$ en el punto $(1, 2)$ y calcular la derivada direccional de la función en el punto $(1, 2)$ en dirección de dicho punto al origen.

5. Mostrar que el siguiente campo vectorial se trata de un campo sumidero.

$$\vec{V}(x, y) = \frac{-x\hat{\imath} - y\hat{\jmath}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

6. Considere la curva $\vec{\gamma}(t) = (\cos(t), \text{sen}(t), t)$

   a) Haga un bosquejo de la imagen de la curva

   b) Encuentre un plano que no intersecte a la curva

   c) Encuentre la ecuación de la recta tangente en los puntos $\vec{\gamma}(\pi/4), \vec{\gamma}(3\pi/2)$ y grafíquelas.

7. Sean $\vec{f}(t)$ y $\vec{g}(t)$ dos curvas, demuestre que:

$$(\vec{f} \times \vec{g})' = \vec{f} \times \vec{g}' + \vec{f}' \times \vec{g}$$

   Aplique el resultado para calcular $[(t, \frac{1}{t}, t^2) \times (t - 3, \frac{1}{t-5}, (t-1)^2)]'$

8. Sean $f(x,y)=\sqrt{81-x^2-y^2}$ y $g(x,y)=\ln(y-x-3)$. Dibujar el dominio de cada una y encuentre 2 curvas de nivel de cada una y graficarlas.

9. Encuentre la linealización de las siguientes funciones en los puntos dados:

   a) $z=4x^2y-2x^3y-2xy$ en $(2,2)$ y aproxime en $(2{,}001, 2{,}001)$
   b) $w=\text{sen}(xyz)$ en $(1,2,\pi)$ y aproxime en $(1{,}001, 2{,}001, 3{,}1416)$

   Además encuentre la deriva direccional en los puntos dados en la dirección $(1,1)$ y $(1,1,1)$ respectivamente.

10. Sea $\phi(x,y)=\frac{5xy}{2x^2+2y^2}$

    a) Calcular el límite cuando $(x,y)\to(0,0)$
    b) Calcular la magnitud de su gradiente
    c) $\partial_u\phi, \partial_v\phi, \partial_w\phi$ si $x=u+v+w$, $y=v+w$

11. Sea $\vec{F}(x,y,z)=(x^2,y^2,z^2)$ y $\vec{G}(x,y,z)=(\frac{1}{x^2},\frac{2}{y^2},\frac{3}{z^2})$ calcular:

    a) $\nabla(\vec{F}\cdot\vec{G})$
    b) $\nabla\cdot(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\vec{F})$
    c) $\nabla\times(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\vec{G})$

12. Resolver:

    a) $\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}+4\frac{d\mathbf{r}}{dt}-21\mathbf{r}=\mathbf{0}$
    b) $\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}+6\frac{d\mathbf{r}}{dt}+9\mathbf{r}=\mathbf{0}$
    c) $\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}+6\frac{d\mathbf{r}}{dt}+34\mathbf{r}=\mathbf{0}$
    d) $\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}+4\mathbf{r}=\mathbf{0}$

    y dar una interpretación física en cada caso.

13. Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie

$$S:\begin{cases} x=3u^2-v^2+7\\ y=7u^3+2v^2-1\\ z=u^2-3v^3+2\end{cases}$$

    cuando $u=-1$ y $v=-1$.

14. Sea $\mathbf{f}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^4$ con $\mathbf{f}(x,y)=\left[e^{-x-y}, e^{-xy}, \arctan(\frac{y}{x}), \sqrt{x^2-y^2}\right]$. Calcular $\mathbf{Df}$.

15. Aplicar la regla de la cadena para calcular $\mathbf{Df}(\mathbf{g}(\mathbf{x}))$, donde $f(u,v,w)=uv^2+u^2w+vw^3$ y $\mathbf{g}(x,y,z)=[e^{-x+2y-z}, \ln(x^2-3y^2+z^2), e^{-xyz}]$.

16. Sea $\mathbf{f}(x, y, z) = (10xy^3z^2 + 2y + 7z)\mathbf{i} + (15x^2y^2z^2 + 2x - 3z)\mathbf{j} + (10x^2y^3z + 7x - 3y)\mathbf{k}$,
    a) comprobar que $\nabla \times \mathbf{f} = \mathbf{0}$,
    b) hallar una función escalar ϕ tal que $\mathbf{f} = \nabla\phi$.

17. Resolver:
    a) $\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} + 4\frac{d\mathbf{r}}{dt} - 45\mathbf{r} = \mathbf{0}$
    b) $\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} + 10\frac{d\mathbf{r}}{dt} + 25\mathbf{r} = \mathbf{0}$
    c) $\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} + 10\frac{d\mathbf{r}}{dt} + 29\mathbf{r} = \mathbf{0}$
    d) $\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} + 32\mathbf{r} = \mathbf{0}$

    y dar una interpretación física en cada caso.

18. Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie $\phi(x, y, z) = 7xy^3z^2 - 5xy^2z^3 + 3y^3z^3 - 10x + 3y - z + 59$ en el punto $(5, -1, -1)$.

19. Sea $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ con $\mathbf{f}(x, y, z) = \left[e^{-x^2-y^2-z^2}, \tan(xy^2z), x^2y^2z^2\right]$. Calcular $\mathbf{Df}$.

20. Aplicar la regla de la cadena para calcular $\mathbf{Df}(\mathbf{g}(\mathbf{x}))$, donde $f(u, v, w) = u^2v^3w^2$ y $\mathbf{g}(x, y, z) =$ [sen$(xyz), e^{-x+2y-z}, x^2y^3z^2$].

21. Sea $\mathbf{f}(x, y, z) = (14xy^2z^3 - 3y + 10xz)\mathbf{i} + (14x^2yz^3 - 3x - 18yz)\mathbf{j} + (21x^2y^2z^2 + 5x^2 - 9y^2)\mathbf{k}$,
    a) comprobar que $\nabla \times \mathbf{f} = \mathbf{0}$,
    b) hallar una función escalar ϕ tal que $\mathbf{f} = \nabla\phi$.

22. Sea $\sigma(t) = (t, \cos t), t \in [0, \pi]$. Dibuja toda la trayectoria y los vectores de la primera y segunda derivada en $t = \frac{\pi}{2}$ y π.

23. Calcula la ecuación del plano tangente a la siguiente superficie en el punto indicado.

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3, \text{ en } (1, 1, 1)$$

24. Calcula el Rotacional y la Divergencia de cada uno de los siguientes campos vectoriales.
    a) $F(x, y, z) = yz\hat{\imath} + xz\hat{\jmath} + xy\hat{k}$
    b) $F(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)(3\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} + 6\hat{k})$

25. Sea $\phi(x, y, z) = 2xy^2z$ y $\vec{A} = x\hat{\imath} + \hat{\jmath} + xy\hat{k}$. Encuentra $\frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial z}(\phi\vec{A})$ en el punto $(1, 2, 2)$

26. Halla la ecuación del plano tangente a la gráfica de f en el punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ para: $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, en $(1, 1)$

27. Encuentra el gradiente de las siguientes funciones $f(x, y, z) = xe^{(-x^2-y^2-z^2)}$ y $g(x, y, z) = z^2e^x \cos y$

28. Un iperepecuano se encuentra en un medio ambiente tóxico. El nivel de toxicidad está dado por $T(x, y) = 2x^2 - 4y^2$. El iperepecuano está en $(-1, 2)$. ¿En qué dirección deberá moverse para disminuir lo más rápido posible la toxicidad?

29. Suponga que A tiene magnitud constante. Demuestre que

$$\mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{A}}{dt} = 0$$

y que A y $d\mathbf{A}/dt$ son perpendiculares, siempre y cuando $|d\mathbf{A}/dt| \neq 0$.

30. Para el campo escalar: $f(x, y) = x^2 + y^2 + 1$

    a) Calcular las curvas de nivel, graficar al menos tres de ellas y decir qué lugar geométrico representan.
    b) A partir de las curvas de nivel del inciso anterior, obtener la gráfica de la función. Decir qué representa.

31. Para el campo vectorial: $\mathbf{F}(x, y) = (y, -x)$

    a) Calcular las líneas equipotenciales, graficar al menos tres de ellas y decir qué lugar geométrico representan.
    b) Dibujar el diagrama de flechas usando al menos 4 puntos en la primera línea equipotencial, pueden ser las intersecciones de las líneas equipotenciales con los ejes coordenados x e y.

32. Sea $\mathbf{r}(x, y, z) = (x, y, z)$ y $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \|\mathbf{r}\|$. Probar las identidades siguientes.

    a) $\nabla \cdot (r^n \mathbf{r}) = (n + 3)r^n$.
    b) $\nabla \times (r^n \mathbf{r}) = \mathbf{0}$.

33. El parámetro continuo t puede tomar todos los valores reales. Trace las curvas cuyas ecuaciones paramétricas son respectivamente:

$$\mathbf{r} = \begin{cases} (t, -t, 0) & \text{Para } -\infty < t \leq 0 \\ (t, -t^2, 0) & \text{Para } 0 \leq t < \infty \end{cases}$$

34. Esbozar curvas de nivel y gráfica de las siguientes funciones:

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^2 + 4y^2$$

35. Si $\mathbf{a}$ es un campo vectorial constante y $\mathbf{r}$ es el vector de posición, demostrar que

$$\text{rot}(\mathbf{a} \times \mathbf{r}) = 2\mathbf{a}$$

36. Halla la dirección en la cual la función crece más rápidamente desde el punto $(-1, 1)$, si $z = x^2 + xy + 1$.

37. Un móvil se desplaza mediante $\vec{r} = \operatorname{sen} t\hat{\imath} + \cos 2t\hat{\jmath} + (t^2 + 2t)\hat{k}$. Determine las componentes de su aceleración en la dirección de $\vec{v}$ y perpendicular al plano de $\vec{r}$ y $\vec{v}$.

38. Para un objeto que se mueve bajo $\vec{r} = r\cos\theta\hat{\imath} + r\operatorname{sen}\theta\hat{\jmath}$. Demuestre que $\frac{d}{dt}\hat{e}_r = \dot{\theta}\hat{e}_\theta$ y $\frac{d}{dt}\hat{e}_\theta = -\dot{\theta}\hat{e}_r$.

39. Para la siguiente ecuación cartesiana $x^2 + y^2 + 8y = 8\sqrt{x^2 + y^2}$, en coordenadas polares identifique y bosqueje la traza de la misma.

40. Para la familia de curvas $y^2 + 3x^2 = C$, obtenga una familia perpendicular a ésta. Bosqueje el sistema de coordenadas que se obtendría.

41. El movimiento de un insecto se puede modelar mediante $\vec{r} = \left[w\hat{\imath} + \left(\frac{w^3}{6} + \frac{1}{2w}\right)\hat{\jmath}\right]$ m, donde $w \in [1, 3]$. Determine la longitud de su traza.

42. Para un objeto que se mueve bajo $\vec{r} = r\cos\theta\hat{\imath} + r\operatorname{sen}\theta\hat{\jmath}$, y sabiendo que $\frac{d}{dt}\hat{e}_r = \dot{\theta}\hat{e}_\theta$ y $\frac{d}{dt}\hat{e}_\theta = -\dot{\theta}\hat{e}_r$, derive las ecuaciones de velocidad y aceleración de dicho objeto.

43. Para un móvil donde $\vec{r} = \left(\frac{4}{3}t^{3/2}\hat{\imath} + t^2\hat{\jmath} + t\hat{k}\right)$ m, donde $t \in [2, 4]$s. Parametrice su vector de posición respecto a la longitud de arco y verifique que es un vector unitario.

44. Para determinado sistema de ecuaciones, para una familia en específico se obtuvo las siguientes derivadas $\frac{dy}{dt} = -x$ y $\frac{dx}{dt} = y$. Use las derivadas implícitas para identificar y bosquejar dicha familia.

45. Para la función $h(x, y) = x^2 - 5xy$, determine la derivada direccional en el punto $(2, 1)$ en la dirección $(-1, 3)$.

46. Determine y bosqueje el dominio de la función $g(x, y) = 4\ln(-xy) - 30\sqrt{4 - x^2 - y^2}$.

47. Para el campo de velocidades $\vec{V}(x, y) = (2x\hat{\imath} - 2y\hat{\jmath})$m/s, bosqueje dicho campo usando las líneas de flujo y las líneas de magnitud constante.

48. Para $z = e^x \tan y$, donde $x = s^2 + t^2$ y $y = st$, determine $\frac{\partial z}{\partial t}$ cuando $s = 1$ y $t = 0$.

49. Para la función $h(x, y) = x^2 - 5xy$, determine la ecuación de la línea tangente a h en el punto $(2, 1)$.

50. Para el potencial escalar $F(x, y) = y^2 - x^2$ bosqueje sus curvas de nivel y el gradiente en $(3, 5)$.

51. Sea $f(u,v) = \frac{u^2+v^2}{u^2-v^2}$, tal que $u(x,y) = e^{-x-y}$, $v(x,y) = e^{xy}$.

    a) Determinar el dominio y contradominio de f.
    b) Encontrar $\frac{\partial}{\partial x} f(u,v)$.
    c) Encontrar $\frac{\partial}{\partial y} f(u,v)$.
    d) Graficar f.

52. Sea $f(u,v,w) = (e^{u-w}, \cos(v+u) + \text{sen}(u+v+w))$ y $g(x,y) = (e^x, \cos(y-x), e^{-y})$.

    a) Encontrar el dominio y contradominio de f y g.
    b) Calcular $f \circ g$.
    c) Dominio de $f \circ g$.

53. La función $(x,y) \mapsto (e^{x+y}, e^{x-y})$. Sea $c(t)$ una curva con $c(0) = (0,0)$ y $c'(0) = (1,1)$. ¿Cuál es el vector tangente a la imagen de $c(t)$ bajo f en $t = 0$?

54. Calcular la derivada direccional de $f(x,y) = e^x \cos(\pi y)$ en el punto $(0,-1)$ en la dirección del vector $\vec{v} = -\frac{1}{\sqrt{5}}\hat{i} + \frac{2}{\sqrt{5}}\hat{j}$. Graficar la función.

55. Hallar el plano tangente de la superficie $z = (\cos x)(\cos y)$, en el punto $(0, \pi/2, 0)$. Graficar.

56. Demostrar que $\nabla|\vec{r}|^n = n|\vec{r}|^{n-2}\vec{r}$.

57. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales vectoriales:

    a) $r''(t) - 4r'(t) + 13r(t) = 0$
    b) $r''(t) + r'(t) - 12r(t) = 0$
    c) $r''(t) + 6r'(t) + 9r(t) = 0$

58. Hallar el vector tangente a la curva $C : x^2 + y^2 - 4x + 10y + 20 = 0$ en el punto que corresponde a $t = \frac{\pi}{6}$.

59. Para $f(u,v,w) = 5u^2v^2w^3$ y $g(x,y,z) = [x^2y^2z^3, x^2y^3z^2, x^2y^2z^3]$, aplicar el segundo caso especial de la regla de la cadena para calcular $Df(g(x,y,z))$.

60. Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie S definida por

$$3x^3y^2z - 5x^2y^3z + yz - 7xy^2 - 7 = 0$$

en el punto $P_0 = (1,-1,2)$.

61. El volumen específico V, la presión P y la temperatura T de un gas de van der Waals están relacionados mediante

$$P = \frac{RT}{V-\beta} - \frac{\alpha}{V^2}$$

donde α, β y R son constantes.

   a) Explicar porqué cualesquiera dos de V, P y T se pueden considerar variables independientes que determinan la tercera variable.
   b) Hallar $\partial T/\partial V$, $\partial P/\partial V$, $\partial V/\partial T$. Identificar cuáles variables son constantes e interpretar físicamente cada derivada parcial.
   c) Verificar que $(\partial T/\partial P)(\partial P/\partial V)(\partial V/\partial T) = -1$ (!no +1!).

62. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales vectoriales:

   a) $r''(t) + 10r'(t) + 29r(t) = 0$
   b) $r''(t) + 2r'(t) - 15r(t) = 0$
   c) $r''(t) - 8r'(t) + 16r(t) = 0$

63. Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva $C : x^2 + y^2 + 6x - 8y + 9 = 0$ en el punto que corresponde a $t = \frac{3\pi}{4}$.

64. Aplicar el segundo caso especial de la regla de la cadena para calcular $Df(g(x, y, z))$, si $f(u, v, w) = 2u^2v^3w^2$ y $g(x, y, z) = [e^{-x+3y+2z}, xy^2z^3, x^3y^2z^3]$.

65. Los libros de Termodinámica usan la relación

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right) = -1$$

Explicar el significado de esta ecuación y probar que es verdadera. IDEA: comenzar con la relación $F(x, y, z) = 0$ que define $x = f(y, z)$, $y = g(x, z)$ y $z = h(x, y)$ y derivar implícitamente.

66. Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie S dada por

$$2x^3y^2z - 5x^2y^3z + 3x^2z + yz - 5x^3y^3 - 5 = 0$$

en el punto $(-1, -1, 2)$.

67. Hallar el vector unitario tangente a la curva C representada por la función vectorial $\vec{f}(t) = a\cos(t)\hat{\imath} + a\sin(t)\hat{\jmath}$ con $0 \le t \le 2\pi$, en $t = \frac{\pi}{2}$ y obtener la longitud de la curva.

68. Sea $\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$, mostrar que $\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\vec{r}}{r^3}$.

69. Si $f(x, y) = x\cos(y) + y\sin(xy)$, calcular f_x, f_y, f_{xx} y $f_{xy}(1, \frac{\pi}{2})$.

70. La curva generada por $\vec{r}(t) = 2t\hat{\imath} + t^2\hat{\jmath} + (1-t^2)\hat{k}$ está sobre un plano, determinar la ecuación de dicho plano. Cuando $t = 2$, ¿en dónde la recta tangente intersecta al plano xy?

71. Una partícula parte del origen con una velocidad inicial $\vec{v}(t=0) = \hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + \hat{k}$. Si su aceleración es $\vec{a}(t) = t\hat{\imath} + \hat{\jmath} + t^2\hat{k}$. Determinar su función de posición.

72. Sea Φ cualquier función escalar. Obtener el rotacional del gradiente de Φ.

73. Sea $f(x,y) = (x^2+y^2)e^{-x^2+y^2+10}$ Hallar la tasa de variación de f en $(2,1)$ según la dirección que apunta hacia el origen.

74. Encuentra las ecuaciones paramétricas de la recta tangente a la curva generada por $x = \sin(\pi t)$, $y = \sqrt{t}$, $z = \cos(\pi t)$ en el punto $(0,1,-1)$.

75. Determina todas las derivadas parciales de primer orden de la función $f(x,y,z) = 3x\ln(x^2yz) + x^{\frac{y}{z}}$.

76. Determinar una función vectorial que represente la curva de intersección entre el cilindro $x^2+y^2 = 1$ y el plano xy. Una vez que se tenga la función, obtener su longitud.

77. Sea $\vec{r}(t) = t^2\hat{\imath} + (t^3-2t)\hat{\jmath} + (t^2-5t)\hat{k}$ el vector de posición de una partícula en movimiento. Determinar los puntos en los que la partícula pasa por el plano xy. Obtener su velocidad, aceleración y rapidez en uno de esos dos puntos.

78. El voltaje V de un circuito eléctrico sencillo está decreciendo lentamente a medida que se consume la batería. La resistencia R está aumentando lentamente a medida que se calienta el resistor. Utiliza ley de Ohm ($V = IR$), para encontrar cómo está cambiando la corriente I en el instante cuando $R = 400\Omega$, $I = 0{,}08$A, $\frac{dV}{dt} = -0{,}01$V/s y $\frac{dR}{dt} = 0{,}03\Omega$/s. Utilizar regla de la cadena.

79. Sean $\vec{v} = \vec{w} \times \vec{r}$. Mostrar que la mitad del rotacional de $\vec{v}$ es $\vec{w}$. Donde $\vec{w}$ es constante.

80. Encontrar los valores de las constantes a, b y c, de modo que la derivada direccional $\Phi = axy^2 + byz + cz^2x^3$ en $(1,2,-1)$ tenga un máximo de magnitud 64 en una dirección paralela al eje z.

81. Dados los campos vectoriales $\vec{A} = (yz, 2xz, 3xy)$, $\vec{B} = (xy, y, xy^2z)$ y escalares $\phi = xyz$, $\psi = 7(x^2+y^2+z^2)^2 = 7r^4$. Calcule:
    a) $\nabla \cdot (\vec{A} \times \nabla\phi)$
    b) $(\vec{B} \cdot \nabla\psi)$
    c) Calcule la derivada direccional del campo escalar ϕ en el punto $(1,2,3)$ en la dirección $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$.

82. Para las superficies $s_1 : x + y + z = 4$ y $s_2 : z = x^2 + y^2$:

    a) Calcular un punto p_1 donde se crucen las superficies, distinto del punto $p = (1, 1, 2)$.
    b) Calcular el coseno del ángulo agudo con el que se cruzan las superficies en el punto p.
    c) Calcule la ecuación del plano tangente a la superficie s_2 en el punto p.
    d) Calcule la ecuación de la recta perpendicular a la superficie s_2 que pasa por el punto p.

83. La aceleración de una partícula para $t \geq 0$ es $\vec{a}(t) = (e^{-t}, \cos(t), -\sin(t))$, si $\vec{v}(0) = \hat{k}$, $\vec{r}(0) = \hat{\imath}$, obtener $\vec{v}(t)$ y $\vec{r}(t)$.

84. Esbozar tres curvas de nivel y la gráfica de la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por: $f(x, y) = x^2 + 4y^2$. ¿Qué representa la gráfica?

85. Si $\mathbf{a}$ es un campo vectorial constante y $\mathbf{r}$ es el vector de posición de un punto cualquiera, demostrar que: $\nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{r}) = 2\mathbf{a}$.

86. Para el campo vectorial dado por $\mathbf{F}(x, y) = (-y, x)$, hallar las curvas equipotenciales y dibujar tres de ellas. Decir qué representan. Dibujar la gráfica de flechas. Diga además si $\mathbf{F}$ es rotacional, irrotacional o solenoidal, demostrándolo por cálculo directo. ¿El campo vectorial se expande o se contrae? ¿Rota o no rota?

87. Considere el campo escalar $\phi(r, \theta, z) = \tan\theta$ en coordenadas cilíndricas. Calcule $\nabla\phi$.

88. Hallar la ecuación de la recta tangente a la elipse

$$36x^2 + 81y^2 + 216x - 324y - 2268 = 0$$

    en el punto que corresponde al valor de $t = \frac{\pi}{6}$.

89. Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie S representada por

$$S : \begin{cases} x = 3u^3 + 3v^3 - 2u - 1 \\ y = 7u^3 + 2v^2 - 5u + 2 \\ z = 2u^3 + v^3 + u + 1 \end{cases}$$

    para $u = -1$ y $v = -1$.

90. Para la función $\mathbf{f}(x, y) = [e^{-3x^2+2y^2}, \ln(7 - 2x^2 + 5y^2), \arctan(\frac{y}{x})]$, calcular $\mathbf{Df}$.

91. Para las funciones $f(u, v, w) = 3u^2v^3w^2$ y $\mathbf{g}(x, y, z) = [e^{-3x^2y^2z^3}, x^2y^3z^2, e^{-xyz}]$ aplicar el segundo caso especial de la regla de la cadena para calcular la derivada de $f \circ \mathbf{g}$.

92. Hallar la ecuación de la recta tangente a la elipse

$$64x^2 + 25y^2 - 896x + 100y + 1636 = 0$$

    en el punto que corresponde al valor de $t = \frac{5\pi}{4}$.

93. Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie S representada por

$$S:\begin{cases} x = u^3 + 3v^3 - 7v + 2 \\ y = u^2 + 5v^3 + 2u - v + 3 \\ z = 3u^3 - v^3 + u - 3v + 1 \end{cases}$$

para $u = -1$ y $v = -1$.

94. Para la función $\mathbf{f}(x, y, z) = [(x^2 - 2y^2 + z^3)e^{-x^2+y^2+z^2}, \ln(3x^2 + 5y^2 - 7z^2)]$, calcular $\mathbf{Df}$.

95. Para las funciones $f(u, v, w) = 7u^3v^2w^3$ y $\mathbf{g}(x, y, z) = [x^3y^3z^3e^{-xyz}, x^2y^2z^2e^{-x^2y^2z^2}, xyze^{-x^3y^3z^3}]$ aplicar el segundo caso especial de la regla de la cadena para calcular la derivada de $f \circ \mathbf{g}$.

97. Encuentre la velocidad, aceleración y rapidez de una partícula con la función de posición

$$\mathbf{r}(t) = \langle t^2, \sqrt{t}\rangle.$$

Trace la trayectoria de la partícula y los vectores $\mathbf{v}$ y $\mathbf{a}$ para $t = 2$. Encuentre el ángulo que forma $\mathbf{v}$ con $\mathbf{a}$. ¿Atraviesa la partícula el eje y? Explique.

98. Utilice las trazas para dibujar la superficie dada por:

$$-2x^2 + 4y^2 + z^2 = -36$$

99. Trace algunas curvas de nivel de la función

$$h(x, y) = \sqrt{36 - x^2 - 3y^2}$$

100. Encuentre una parametrización de longitud de arco de

$$\mathbf{r}(t) = \langle t\cos t,\ t\,\mathrm{sen}\,t,\ 3\rangle$$

verifique su re-parametrización, demostrando que la derivada del vector es unitaria:

$$\mathbf{r}(s)$$

101. A través de la diferencial total compare dz y Δz cuando la función dada varía en (x, y) del primer al segundo punto.

$$z = x^2 + x^3y^2 + 2 \quad \text{de } (1, 1) \text{ a } (0{,}9, 1{,}1)$$

102. A partir de la ecuación:

$$z - c = -\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right), \qquad c > 0.$$

Sabiendo que el área de la superficie

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$$

es $AB\pi$.Exprese el área de la sección transversal perpendicular al eje z como función de z, donde $z \le c$.

103. Sean F y G funciones con segundas derivadas parciales, muestre que

$$u(x,t) = F(x+at) + G(x-at)$$

satisface la ecuación de onda

$$a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

104. Sea

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v},$$

la ecuación vectorial de una recta, con $\mathbf{r}_0$ y $\mathbf{v}$ vectores constantes. Utilice la función de longitud de arco

$$s = \int_0^t |\mathbf{r}'(u)|\, du$$

para demostrar que una parametrización de longitud de arco de la recta está dada por

$$\mathbf{r}(s) = \mathbf{r}_0 + s\,\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}.$$

Demuestre que $\mathbf{r}'(s)$ es un vector unitario.

105. Si

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} \qquad \text{y} \qquad r = |\mathbf{r}|,$$

demuestre que

$$\nabla f(r) = f'(r)\frac{\mathbf{r}}{r}.$$

106. Hallar la ecuación de la recta tangente a la elipse

$$36x^2 + 25y^2 + 216x - 50y - 551 = 0$$

en el punto que corresponde al valor de $t = \dfrac{5\pi}{4}$.

107. Hallar la ecuación del plano tangente a la esfera $S:\ x^2+y^2+z^2 = 64$ en el punto que corresponde al valor de los ángulos

$$\theta = \frac{2\pi}{3} \qquad \text{y} \qquad \phi = \frac{7\pi}{4}.$$

108. Para la función

$$f(x,y) = \left[\exp\left(-\frac{y}{x}\right),\ x^y + y^x,\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right],$$

calcular Df.

109. Para las funciones

$$f(u,v,w) = 3u^3v^2w^3$$

y

$$g(x,y,z) = \left[e^{-x^2-y^2-z^2},\ e^{-x^2y^2z^3},\ \ln(100-2x^2-3y^3+4z^2)\right]$$

aplicar el segundo caso especial de la regla de la cadena para calcular la derivada de $f \circ g$.

110. Dada la función vectorial

$$\mathbf{f} = (6x^2y^2z^3+4y^3+15x^2z^2-5)\mathbf{i}+(4x^3yz^3+12xy^2+4yz^3+2)\mathbf{j}+(6x^3y^2z^2+10x^3z+6y^2z^2-3)\mathbf{k}.$$

(a) Mostrar que $\nabla \times \mathbf{f} = 0$.

(b) Hallar una función escalar ϕ tal que $\mathbf{f} = \nabla\phi$.

111. Hallar la ecuación de la recta tangente a la elipse

$$36x^2 + 81y^2 + 360x + 324y - 1962 = 0$$

en el punto que corresponde al valor de $t = \dfrac{2\pi}{3}$.

112. Hallar la ecuación del plano tangente al elipsoide

$$S:\ 9x^2 + 25y^2 + 16z^2 = 3600$$

en el punto

$$P_0 = (10, 2\sqrt{23}, -5).$$

113. Para la función

$$f(x,y) = \left[\exp\left(\sqrt{\frac{y}{x}}\right),\ x^y \cdot y^x,\ \exp(10-x^2-3y^2)\right],$$

calcular Df.

114. Para las funciones

$$f(u,v,w) = 7u^2v^3w^2$$
$$g(x,y,z) = \left[e^{2x^2-3y^2+4z^2},\ e^{-x^3y^2z^3},\ \ln(20-x^2-5y^3+9z^2)\right]$$

aplicar el segundo caso especial de la regla de la cadena para calcular la derivada de $f \circ g$.

115. Dada la función vectorial

$$\mathbf{f} = (14xy^3z^2 - 10xz - 9)\mathbf{i} + (21x^2y^2z^2 + 6yz^3 + 3)\mathbf{j} + (14x^2y^3z - 5x^2 + 9y^2z^2 + 5)\mathbf{k}.$$

a) Mostrar que $\nabla \times \mathbf{f} = 0$.

b) Hallar una función escalar ϕ tal que $\mathbf{f} = \nabla\phi$.

116. Si

$$\vec{f} = uvw\hat{\imath} - uvw^2\hat{\jmath} - v^3\hat{k} \qquad \text{y} \qquad \vec{g} = u^3\hat{\imath} - uvw\hat{\jmath} - u^2w\hat{k},$$

calcular

a) $\dfrac{\partial^2 \vec{f}}{\partial u\, \partial v}$, en el origen.

b) $\dfrac{\partial^2 \vec{f}}{\partial v^2} \times \dfrac{\partial^2 \vec{g}}{\partial u^2}$, en el punto $(1, 1, 0)$.

117. a) Hallar el vector tangente unitario $\hat{T}$, a la curva representada por la siguiente función vectorial

$$\vec{r}(t) = a(t - \sin t)\hat{\imath} + a(1 - \cos t)\hat{\jmath} \qquad \text{para todo } t$$

b) Verifique el inciso anterior mediante la parametrización de la función vectorial usando el parámetro longitud de arco.

c) Hallar un vector unitario $\hat{n}$ normal en $(0, 0, 0)$ a la superficie S representada por

$$z = 3x^2 + 4y^2 - 1.$$

118. Si $\phi(x, y, z) = xy + yz + zx$, hallar

a) $\nabla\phi$ en $(1, 1, 3)$.

b) $\dfrac{\partial}{\partial s}\phi$ en $(1, 1, 3)$ en la dirección $[1, 1, 1]$.

119. Las curvas coordenadas parabólicas (ϵ, η, ϕ) están dadas por la transformación:

$$x = \epsilon\eta\cos\phi$$
$$y = \epsilon\eta\sin\phi$$
$$z = \frac{1}{2}(\eta^2 - \epsilon^2)$$

Calcule el Jacobiano

$$J = [\nabla\epsilon\nabla\eta\nabla\phi]\,.$$

120. Sea
$$F(x,y,z) = 4y\sqrt{2x+3z} - \frac{5}{z}\ln(5x-2y^2) = 0,$$
con $x = f(y,z)$, calcular D_x.

121. Verificar las siguientes identidades
   a) $\nabla^2 r^3 = 12r$
   b) $\nabla \ln r = \frac{\vec{r}}{r^2}$

122. Si f y g son funciones dos veces derivables, demuestre que:
$$\nabla^2(fg) = f\nabla^2 g + g\nabla^2 f + 2\nabla f \cdot \nabla g$$

123. Las superficies $x^2y^2 + 2x + z^3 = 16$ y $3x^2 + y^2 - 2z = 9$ se cortan en una curva que pasa por el punto $(2,1,2)$. ¿Cuáles son las ecuaciones de los respectivos planos tangentes a las dos superficies en dicho punto?

124. Sea $F(x,y,z) = \cos(xyz) + \ln(x^2+y^2+z^2) = 0$, con $z = f(x,y)$, calcular D_z.

125. Hallar la derivada direccional de $\phi = 4e^{2x-y+z}$ en el punto $(1,1,-1)$ en dirección hacia el punto $(-3,5,6)$.

126. Si f y g son funciones dos veces derivables, demuestre que: $\nabla^2(fg) = f\nabla^2 g + g\nabla^2 f + 2\nabla f \cdot \nabla g$

127. Sea $F(x,y,z) = \cos(xyz) + \ln(x^2+y^2+z^2) = 0$ con $z = f(x,y)$, calcular D_z.

128. Hallar la dirección según la cual la derivada de la función $\phi = 2xz - y^2$ en el punto $(1,3,2)$ es máxima. Y cuál es el valor máximo.

129. Use un diagrama de árbol para escribir la regla de la cadena para el caso en el que
$$w = f(x,t,u,v), \quad x = x(q,r,s), \quad t = t(p,q,r,s),$$
$$u = u(p,q,r,s) \quad \text{y} \quad v = v(p,q,r,s)$$
son todas ellas funciones derivables.

130. Hallar la ley de velocidades y de aceleraciones de una partícula que se mueve a lo largo de la curva
$$x = 2\cos 3t, \qquad y = 8t, \qquad z = 2\operatorname{sen} 3t.$$
Idem los módulos de la velocidad y aceleración.

131. Demuestre que la función de Cobb-Douglas para la producción
$$P = bL^{\alpha}K^{\beta}$$
cumple la ecuación.
$$K\frac{\partial P}{\partial K} = (\alpha+\beta)P - L\frac{\partial P}{\partial L}.$$

132. Hallar las constantes a y b de forma que la superficie $ax^2 + byz = (a+2)x$, sea ortogonal a la $4x^2y = 4 - z^3$ en el punto $(1, -1, 2)$.

133. Hallar
$$\nabla\left[r\left(\nabla\left(\frac{1}{r^3}\right)\right)\right].$$

134. ¿Para qué valor de la constante el rotacional del vector $\vec{A} = (z^3 - axy)\hat{\imath} + (2-a)x^2\hat{\jmath} + (a-1)xz^2\hat{k}$ es idénticamente nulo?

135. Determine la ecuación del plano que contenga la curva C definida por
$$\vec{r} = (\operatorname{sen}(t), \cos(t), -\cos(t))$$
con $0 \le t \le \pi$.

136. Obtenga la ecuación de la recta tangente a la curva dada por las siguientes ecuaciones paramétricas en el punto dado
$$\begin{aligned} x &= \ln(t+1) \\ y &= t\cos(2t) \\ z &= 2^t \end{aligned}$$
en $(0, 0, 1)$.

137. Una partícula en movimiento es
$$\vec{a} = \sqrt{2}\operatorname{sen}(t)\hat{\imath} + \sqrt{2}\cos(t)\hat{\jmath}$$
a cualquier t. Considerando que la velocidad y la posición de la partícula en $t = \frac{\pi}{4}$ son
$$\vec{v}\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\hat{\imath} + \hat{\jmath} + \hat{k} \qquad \text{y} \qquad \vec{r}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + \frac{\pi}{4}\hat{k},$$
respectivamente, ¿cuál es la posición de la partícula en $t = \frac{3\pi}{4}$?

138. Sea R la distancia desde un punto fijo $A(a, b, c)$ a cualquier punto $P(x, y, z)$. Mostrar que ∇R es un vector unitario en la dirección $\overrightarrow{AP}$.

139. Sea
$$f(x, y, z) = \frac{x}{y + xz}.$$
Determine la derivada direccional de f en $P(1, 3, 1)$ en dirección al punto $P_1 = (1, 1, 1)$. A partir del punto P, ¿en qué dirección la derivada direccional de f es un máximo?

140. El radio de un cilindro circular recto se incrementa a razón de $6\,cm$ por segundo, y la altura decrece a razón de $4\,cm$ por segundo. ¿Cuál es la razón de cambio del volumen y del área superficial cuando el radio es de $12\,cm$ y la altura de $36\,cm$?

141. Determine la ecuación del plano que contenga la curva C, definida por

$$\vec{r} = (2t, \operatorname{sen}(t), t+1).$$

142. Obtenga la ecuación de la recta tangente a la curva, dada por las siguientes ecuaciones paramétricas en el punto dado en $(1, 0, 1)$.

$$\begin{aligned} x &= e^{-t}\cos(t) \\ y &= e^{-t}\operatorname{sen}(t) \\ z &= e^{-t} \end{aligned}$$

143. Una partícula parte del origen con velocidad inicial $\vec{v}(0) = \hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + \hat{k}$, el vector aceleración es $\vec{a} = t\hat{\imath} + \hat{\jmath} + t^2\hat{k}$. Determine su función de posición.

144. Encuentre el ángulo entre las superficies

$$z = x^2 + y^2$$

y

$$z = \left(x - \frac{\sqrt{6}}{6}\right)^2 + \left(y - \frac{\sqrt{6}}{6}\right)^2$$

en el punto

$$P\left(\frac{\sqrt{6}}{12}, \frac{\sqrt{6}}{12}, \frac{1}{12}\right).$$

145. Sea

$$f(x, y, z) = x^2 e^{-yz}.$$

Determine la derivada direccional de f en $P(1, 0, 0)$ en dirección al punto $P_1 = (1, 1, 1)$. A partir del punto P, ¿en qué dirección la derivada direccional de f es un máximo?

146. Para la función vectorial

$$\mathbf{f} = (6x^2y^2z^3 - 10xy^2 - 12x^2z^2 + 2)\mathbf{i} + (4x^3yz^3 - 10x^2y + 9y^2z^3 - 7)\mathbf{j} + (6x^3y^2z^2 + 9y^3z^2 - 8x^3z + 5)\mathbf{k}$$

a) Demostrar que es conservativo.
b) Hallar el potencial escalar ϕ tal que $\mathbf{f} = \nabla\phi$.
c) Comprobar que

$$\int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \phi(P_f) - \phi(P_i),$$

donde $P_i = (-1, -1, -1)$ y $P_f = (1, 1, 1)$ y C es cualquier curva que una dichos puntos.

147. Para la función vectorial

$$\mathbf{f} = (10xy^3z^2-6xy^3+15x^2z^2-4)\mathbf{i}+(15x^2y^2z^2-9x^2y^2+6y^2z^3+5)\mathbf{j}+(10x^2y^3z+10x^3z+6y^3z^2-1)\mathbf{k}$$

a) Demostrar que es conservativo.

b) Hallar el potencial escalar ϕ tal que $\mathbf{f} = \nabla\phi$.

c) Comprobar que

$$\int_C \mathbf{f}\cdot d\mathbf{r} = \phi(P_f) - \phi(P_i),$$

donde $P_i = (-1,-1,-1)$ y $P_f = (1,1,1)$, y C es cualquier curva que una dichos puntos.

148. Si

$$\vec{A} = (3x^2y^4z^2 + 3y + 4z)\hat{\imath} + (4x^3y^3z^2 + 3x - 2z)\hat{\jmath} + (2x^3y^4z - 2y + 4x)\hat{k},$$

demostrar que existe una función derivable ϕ de forma que $\vec{A} = \nabla\phi$ y hallar su expresión.

149. Cambiando el orden de integración, calcule

$$\int_0^1 \int_{2y}^2 e^{x^2}\, dx\, dy.$$

150. Para un vector arbitrario constante $\vec{a}$, y el vector de posición $\vec{r}$, mostrar que:

a) $\nabla\times(\vec{a}\times\vec{r}) = 2\vec{a}$

b) $\nabla\left(\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{r}}{r^3}\right) + \nabla\times\left(\dfrac{\vec{a}\times\vec{r}}{r^3}\right) = \vec{0}$

151. Sea

$$\phi = \frac{1}{r},$$

determine la divergencia del gradiente de ϕ.

152. Determine

$$\nabla\cdot(\vec{A}\times\vec{r}),$$

considere que el rotacional de $\vec{A}$ es cero vectorial.

153. Sea

$$\vec{F} = \frac{\vec{r}}{r},$$

determine el gradiente de la divergencia de $\vec{F}$.

154. Mostrar que

$$\vec{A} = r^2\vec{r}$$

es conservativo y obtenga su potencial escalar.

155. Un móvil se desplaza mediante:

$$\vec{a} = [e^t \hat{j} + e^{-t} \hat{k}]\text{m/s}^2$$

Sabiendo que en $t = 0$, $\vec{r} = [\hat{j} + \hat{k}]$m y $\vec{v} = [\sqrt{2}\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}]$m/s. Determine sus ecuaciones de movimiento, $\vec{a}(0)$, la curvatura y el radio de curvatura para $t = 1$ s.

156. Un móvil se desplaza mediante:

$$x = t^4, \quad y = t^4 + 3$$

Determine la longitud de arco para $t \in [-1, 1]$.
Elimine el parámetro, obtenga su ecuación rectangular y enuncie sus propiedades.

157. Para la siguiente familia $x^2 + 3y^2 = C$ determine otra que sea perpendicular a la primera tal que estos conjuntos nos permita construir un sistema de coordenadas. Bosqueje las familias.

158. Si un objeto se mueve en coordenadas polares están presentes los vectores unitarios $\hat{e}_r$ y $\hat{e}_\theta$. Usando su representación en coordenadas rectangulares, demuestre que:

$$\frac{d\hat{e}_r}{dt} = \dot{\theta}\hat{e}_\theta, \quad \frac{d\hat{e}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\hat{e}_r$$

159. Cuando un pequeño objeto se mueve dentro de una cámara de niebla, su movimiento se puede describir mediante:

$$\vec{r} = [e^t \cos t\hat{i} + e^t \text{sen } t\hat{j}] \text{ m}$$

Donde t se mide en segundos. Muestre que el ángulo entre $\vec{r}$ y $\vec{v}$ es constante e independiente del valor de t.

160. Un móvil se desplaza mediante:

$$\vec{a} = [e^t \hat{j} + e^{-t} \hat{k}]\text{m/s}^2$$

Sabiendo que en $t = 0$, $\vec{r} = [\hat{j} + \hat{k}]$m y $\vec{v} = [\sqrt{2}\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}]$m/s. Determine sus ecuaciones de movimiento, $\vec{a}(0)$ y la ecuación de la recta tangente a la trayectoria en $t = 1$ s, es decir la trayectoria que seguiría el móvil si súbitamente se anulara la fuerza que lo impulsa en $t = 1$ s.

161. Determine la velocidad y la aceleración de una partícula que se mueve bajo las ecuaciones:

$$r = [3(1 + \text{sen } t)]\text{m}, \quad \theta = [e^{-t} - 1]\text{rad}$$

Donde t se mide en segundos.

162. Para un objeto que se mueve en el espacio, demuestre que:

$$\kappa = \frac{||\frac{d\vec{r}}{dt} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}||}{||\frac{d\vec{r}}{dt}||^3}$$

163. Para la función:
$$g(x, y) = 7\sqrt{1 - x^2 - y^2} - 9\sqrt{x}$$
determine su dominio y realice un bosquejo detallado del mismo.

164. Para la función $f = f(x, y, z)$, demuestre que el gradiente de f siempre es perpendicular a la superficie de nivel $f(x, y, z) = C$.

165. Para la función:
$$h(x, y) = x^2 - 5xy$$
determine la ecuación de la línea perpendicular a h en el punto $(2, 1)$.

166. Para $z = e^x \tan y$, donde $x = s^2 + t^2$ y $y = st$, determine $\frac{\partial z}{\partial t}$ cuando $s = 1$ y $t = 0$.

167. Para la función,
$$r = r(u, v)$$
donde,
$$u = u(\alpha, \beta),\ v = v(\alpha, \beta)$$
y a su vez
$$\alpha = \alpha(x, y),\ \beta = \beta(x, y)$$
Determine la diferencial total de r.

168. Determine el siguiente límite:
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = \frac{5x^2y}{2x^2 + 2y^2}$$

169. Para la función homogénea $f(x, y)$ haciendo $u = x/y$ o $y = ux$, demuestre que:
$$x\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + y\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = nf(x, y)$$

170. Para la función $f(x, y) = yg(y^2 - x^2, x^2 - y^2)$, muestre que:
$$\frac{y^2}{x}\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = f(x, y)$$

171. Obtenga una ecuación vectorial para la recta tangente a la curva de intersección de los cilindros $x^2 + y^2 = 25$ y $y^2 + z^2 = 20$ en el punto $P(3, 4, 2)$.

172. Si $\vec{r} = (x, y, z)$, $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ y $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, demuestre que la ecuación vectorial $(\vec{r} - \vec{a}) \cdot (\vec{r} - \vec{b}) = 0$ representa una esfera, determine su centro y radio. Recuerde que la ecuación de una esfera con centro en $C(h, k, l)$ de radio r es $(x-h)^2+(y-k)^2+(z-l)^2 = r^2$.

173. Determine las ecuaciones del plano tangente y la recta normal a la superficie $z = x^2 + y^2$ en el punto $P(1, 2, 5)$.

174. Sean $\vec{A} = 3xyz^2\hat{\imath} + 2xy^3\hat{\jmath} - x^2yz\hat{k}$ y $\phi = 3x^2 - yz$. En el punto $P(1, -1, 1)$, determine

    a) La divergencia de $\phi\vec{A}$.

    b) La divergencia del gradiente de ϕ.

175. Un campo vectorial se conoce como irrotacional cuando su rotacional es cero. Probar que el campo $\vec{E} = \frac{\vec{r}}{r^2}$ es irrotacional. Recuerde que $\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$ y $r = |\vec{r}|$.

176. Hallar la ecuación de la recta tangente a la elipse:

$$36x^2 + 81y^2 + 216x - 810y - 567 = 0$$

en el punto que corresponde al valor de $t = \frac{2\pi}{3}$.

177. Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie S representada por:

$$S : \begin{cases} x = u^2 - v^2 + 7u - 2v + 4 \\ y = u^3 + v^2 - 2u - v + 3 \\ z = 3u^2 - 2v^2 + 3u + v + 5 \end{cases}$$

para $u = -1$ y $v = -1$.

178. Para la función $f(x, y) = [e^{x-2y^2}, \ln(7 - 3x^2 + 5y^2), \arctan(\dots)]$, calcular Df.

179. Para las funciones $f(u, v, w) = 5u^3v^2w^3$ y $g(x, y, z) = [e^{-x^2y^2z^3}, x^2y^3z^2, e^{-xyz}]$ aplicar el segundo caso especial de la regla de la cadena para calcular la derivada de $f \circ g$.

180. Hallar la ecuación de la recta tangente a la elipse:

$$9x^2 + 8y^2 + 36x - 96y - 144 = 0$$

en el punto que corresponde al valor de $t = \frac{5\pi}{3}$.

181. Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie $S : \phi(x, y, z) = 7x^3y^2z^3 - 5x^2y^2 + 2x^3z^3 - 3y^2z^3 - 5x + 3y + 99$ en el punto $P_0 = (-1, -1, 2)$.

182. Para la función $f(x, y) = \left[\exp\left(\frac{x^3}{y^2}\right), \sqrt{xy}, \exp(7 - 3x^2 - y^2)\right]$, calcular Df.

183. Para las funciones $f(u, v, w) = 5u^3v^3w^2$ y $g(x, y, z) = [e^{-2x^2+5y^2-3z^2}, e^{-7x^3+3y^2-2z^3}, \ln(100 - 5x^2 - 3y^3 + 2z^2)]$ aplicar el segundo caso especial de la regla de la cadena para calcular la derivada de $f \circ g$.

188. Calcular $\partial w/\partial u$, además evalué en los puntos dados.

$$w = \ln(x^2 + y^2 + z^2) \quad x = ue^v \text{sen}(u) \quad y = ue^v \cos(u) \quad z = ue^v$$

$$(u, v) = (-2, 0)$$

189. Encuentra el punto en la curva que está a una distancia de 5 unidades hacia adelante desde el punto $r(1)$, sea la curva en el espacio:

$$r(t) = (t^2, 3t, \ln(1+t^2))$$

190. Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie

$$S : \phi(x, y, z) = x^2 y e^z + yz^3 - 4x + 2y - 1 = 0$$

en el punto $P_0 = (1, 1, 0)$

191. Sea el campo vectorial, $\vec{F}(x, y) = \langle P(x, y), Q(x, y)\rangle$ donde, $P(x, y) = x^2 e^y \cos y$ y $Q(x, y) = y^2 e^x \text{sen} x$

a) Calcular la divergencia
b) Encuentra donde $\nabla \cdot \vec{F} = 0$
c) Determinar las regiones donde entra y sale

192. Sea si $f(x, y, z) = (14xy^3z^2 - 10xz - 9)i - (e^z \cos x)j + (e^{(-2x^2+5y^2-3z^2)})k$ determinar

$$\nabla \cdot (\nabla \times F)$$

193. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales vectoriales y dar su interpretación física

a) $\mathbf{r}''(t) + 6\mathbf{r}'(t) + 34\mathbf{r}(t) = \mathbf{0}$
b) $\mathbf{r}''(t) + 5\mathbf{r}'(t) + 6\mathbf{r}(t) = \mathbf{0}$
c) $\mathbf{r}''(t) + 9\mathbf{r}(t) = \mathbf{0}$

194. a) Utilizar la identidad $\cosh^2(\xi) - \sinh^2(\xi) = 1$ para obtener la parametrización de la hipérbola

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

b) Utilizar el inciso (a) para hallar la ecuación de la recta tangente a la hipérbola $4x^2 - 25y^2 - 8x - 150y - 321 = 0$ en el punto para el cual $t = \ln(2)$.

195. a) Sea una superficie S representada por $x = x(y, z)$. Demostrar que el vector normal $\mathbf{n}$ en cada punto de S es

$$\mathbf{n} = \mathbf{i} - \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)\mathbf{j} - \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)\mathbf{k}$$

b) Utilizar el resultado del inciso (a) para hallar la ecuación del plano tangente la superficie S dada por $x = 7y^3z^3 - 5y^2 + 3z^2 - 5y + 9z + 2$ en el punto $P_0 = (3, -1, -1)$.

196. Para las funciones $f(u, v, w) = 7u^3v^2w^3$ y $\mathbf{g}(x, y, z) = [e^{-2x^2y^3z^2}, e^{-7x^3y^2z^3}, \text{sen}(5x^2y^3z^2)]$ aplicar el segundo caso especial de la regla de la cadena para calcular la derivada de $f \circ \mathbf{g}$.

197. Dada la función vectorial $\mathbf{f} = (15x^2y^2z^3 - 6xy^3 + 21x^2z^3 + 2)\mathbf{i} + (10x^3yz^3 - 9x^2y^2 + 6y^2z^2 - 3)\mathbf{j} + (15x^3y^2z^2 + 4y^3z + 21x^3z^2 + 4)\mathbf{k}$.
    a) Mostrar que $\nabla \times \mathbf{f} = \mathbf{0}$.
    b) Hallar una función escalar ϕ tal que $\mathbf{f} = \nabla\phi$.

198. Sea C la curva generada por $\vec{r}(t) = (e^t + e^{-t})\hat{\imath} + (5 - 2t)\hat{\jmath}$ con $0 \leq t \leq 3$, determine
    a) La ecuación de la recta tangente a la curva en $t = 3$.
    b) La longitud de la curva C.

199. Una partícula se mueve de modo que su vector de posición está dado por $\vec{r}(t) = \cos(wt)\hat{\imath} + \text{sen}(wt)\hat{\jmath}$, donde w es una constante. Demuestre que
    a) La velocidad de la partícula es perpendicular a $\vec{r}(t)$.
    b) La aceleración está dirigida hacia el origen.
    c) El producto cruz entre $\vec{r}(t)$ y la velocidad de la partícula es un vector constante.

200. Encuentre ecuaciones para el plano tangente y la recta normal a la superficie $z = x^2 + y^2$ en el punto $(2, -1, 5)$.

201. Sea θ el ángulo entre los lados iguales de un triángulo isósceles y sea x la longitud de estos lados. Si x se incrementa a razón de $\frac{1}{2}\frac{m}{h}$ y θ se incrementa a razón de $\frac{\pi}{90}\frac{rad}{h}$, hallar la tasa de incremento del área cuando $x = 6m$ y $\theta = \frac{\pi}{4}rad$.

202. La altitud de una montaña en (x, y) es $f(x, y) = 2500 + 100(x + y^2)e^{-0{,}3y^2}$ donde x y y tienen unidades de $100m$. Determine la derivada direccional de f en $P(-1, -1)$ en la dirección del vector unitario $\vec{u}$ que forma un ángulo de $\frac{\pi}{6}$ con $\nabla f(P)$.

203. a) Calcular la longitud de arco de la curva en $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$
$$x(t) = e^{-t/2}\cos t, \quad y(t) = e^{-t/2}\text{sen}t, \quad z(t) = e^{-t/2}$$
    b) Calcular la velocidad $\vec{v}(t)$ y $\vec{a}(t)$ así como su rapidez $s(t)$.

204. a) Determinar el plano tangente a la siguiente superficie en el punto indicado $z = x^3 + y^3 - 6xy$ en el punto $P = (1, 2, -3)$.
    b) Encontrar la dirección de mayor crecimiento del campo escalar en $P_1 = (1, 1, -4)$

205. Se dice que un campo $\vec{F}$ es irrotacional si curl$\vec{F} = \nabla \times \vec{F} = 0$. Determinar el valor de a, b y c para que el campo vectorial $\vec{R}(t)$ dado por
$$\vec{R}(t) = (x + 2y + az)\mathbf{i} + (bx - 3y - z)\mathbf{j} + (4x - cy + 2z)\mathbf{k}$$
    a) Sea irrotacional.
    b) Calcular div$\vec{F}$.
    c) Calcular la jacobiana de $\vec{F}$.

206. Demostrar que para todo campo escalar ϕ diferenciable se cumple que $\nabla \times \nabla\phi = \vec{0}$

207. Se $\vec{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ y $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

    a) Calcular $\nabla \ln r$ y $\nabla(\frac{1}{r})$.
    b) Calcular Δr^n, con Δ el laplaciano.

208. Sea $\mathbf{u}(x, y, z) = y^2 z\mathbf{i} - z^2\text{sen}(x^2 + y^2)\mathbf{j} + 2xe^{-z}\cos y\mathbf{k}$. Sea $x(r, \theta, z) = r\cos\theta$, $y(r, \theta, z) = r\sin\theta$ y $z(r, \theta, z) = z$. Calcular $\frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial z^2}$.

209. a) Determinar el plano tangente a la siguiente superficie en el punto indicado $z = x^3 + y^3 - 6xy$ en el punto $P = (1, 2, -3)$.
    b) Encontrar la dirección de mayor crecimiento del campo escalar en $P_1 = (1, 1, -4)$

210. Determinar el plano tangente a la siguiente superficie en el punto indicado

    a) $xy^2 + 2yz = 4$ en el punto $P = (-2, 2, 3)$.
    b) Encontrar la dirección de mayor crecimiento del campo escalar en $P_1 = (2, 1, 1)$

211. Demostrar que para todo campo escalar ϕ diferenciable y $\vec{F}$ se cumple que

$$\nabla \cdot (\phi\vec{F}) = \nabla\phi \cdot \vec{F} + \phi\nabla \cdot \vec{F}$$

212. Sea $\vec{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ y $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

    a) Calcular $\Delta \ln r$ y $\Delta\left(\frac{1}{r}\right)$.
    b) Calcular $\nabla \cdot \left(r\nabla\left(\frac{1}{r^3}\right)\right)$ y $\nabla \cdot (\text{sen}\ r\ \vec{r})$. Sugerencia: use el ejercicio anterior.

213. Hallar la derivada direccional de $\Phi(x, y, z) = (x^2 + 3y^2 + z^2)e^{-(x^2+y^2)}$ en el punto $P = (1, 1, -1)$ en la dirección de $\vec{u} = (-1, 1, 1)$ a $\vec{s} = (2, 5, 4)$ (recuerde que la dirección debe ser unitaria).

214. Determine el dominio en forma de notación de conjunto, gráficamente e inecuación/no igualdad, de la siguientes funciones:

    a) $f(x, y) = \frac{\sqrt{x^2+y^2-1}}{y-x}$
    b) $f(x, y) = sen^{-1}(xy)$

215. En Termodinámica, la temperatura, presión y volumen de un gas ideal encerrado están relacionadas por medio de la función:

$$T = 0{,}01PV$$

donde T, P, V se miden en kelvins, atmósferas y litros, respectivamente. Dibuje las isotermas $T = 300\ K, 400\ K$ y $600\ K$.

216. En Química, la concentración molecular $C(x,t)$ de un líquido está dada por la función:

$$C(x,t) = t^{-1/2}e^{-x^2/kt}$$

donde k es una constante. Obtenga las derivadas parciales necesarias para mostrar que esta función satisface la ecuación de difusión unidimensional siguiente:

$$\frac{k}{4}\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = \frac{\partial C}{\partial t}$$

217. a) Determine un vector que produzca la dirección en la cual la función:

$$f(x,y) = \ln\left(\frac{2x+3y}{y+4x}\right)$$

tiene un valor mínimo en el punto de coordenadas $(\frac{1}{2}, \frac{1}{6})$.

b) Determine la tasa mínima.

218. ¿Qué representa geométricamente el gradiente $\nabla f(a,b)$ de una función $f(x,y)$.

219. ¿En qué dirección se obtiene la derivada direccional máxima de una función $f(x,y)$ en un punto (a,b)?

220. Sea $f(x,y) = 4x^2y - 2xy^3 + y^4 - 3x$. En el punto $P = (2,-1)$:

a) Obtén el vector unitario en la dirección de $P \to Q = (5,1)$.

b) Calcula la derivada direccional $D_u f(P)$.

221. Sea $f(x,y) = x^3y + e^{x-2y} - y^2$. En $A = (-1,2)$:

a) Calcula $\nabla f(A)$.

b) Obtén el plano tangente a $z = f(x,y)$ en A.

222. Sea: $z = x\sin y + y\cos x, \quad x = s^2\cos t, \quad y = s\sin(2t)$. Calcula:

a) $\frac{\partial z}{\partial s}$

b) $\frac{\partial z}{\partial t}$

223. Sea: $f(x,y) = x^2 + 2y^2 + xy$. En $(0,1)$:

a) Calcula $f_x(0,1)$ y $f_y(0,1)$.

b) Explica brevemente qué representa cada una de estas derivadas parciales en términos de la pendiente de la superficie $z = f(x,y)$ al moverse:

   a) en la dirección del eje x con y fijo,

   b) en la dirección del eje y con x fijo.

c) Gráfica la curva y su recta tangente de $z = f(x,y)$ en los planos $y = 1$ (z vs. x) y $x = 0$ (z vs. y).

224. Continuidad de funciones vectoriales. Analice la continuidad de la siguiente función vectorial en $t = 1$:
$$\vec{r}(t) = (\sqrt{t}\cos(\pi t))\hat{\imath} + (t^3 - 4)^{5/2}\hat{\jmath} + 3^{\sec(\pi t)}\hat{k}$$

225. Interpretación geométrica de la derivada vectorial. Determine la ecuación de la recta (en forma paramétrica) tangente a la curva dada por la función vectorial siguiente:
$$\vec{r}(t) = (t^3 - 2t)\hat{\imath} + \left(\frac{t^2+1}{t-2}\right)\hat{\jmath} + (2t^3 - 3)^{5/2}\hat{k}$$
en $t = 2$.

226. Demostraciones geométricas con la derivada vectorial. Suponga que $\vec{r}(t)$ es una función vectorial derivable, para la cual $\|\vec{r}(t)\| = C$, para toda t, donde C es una constante. Demuestre que el vector tangente $\vec{r}'(t)$ es perpendicular al vector de posición $\vec{r}(t)$ para toda t.

    Nota: En la demostración desglose los 4 pasos vistos en clase, con estricto rigor matemático.

227. Identidades algebraicas con derivación vectorial. Demuestre las siguientes identidades, utilizando las propiedades de la derivada vectorial, considerando que $\vec{r}_1(t)$ y $\vec{r}_2(t)$ son funciones derivables de t:

    a) $\frac{d}{dt}\left(\vec{r}_1(t)\cdot\frac{d}{dt}\vec{r}_2(t) - \frac{d}{dt}\vec{r}_1(t)\cdot\vec{r}_2(t)\right) = \vec{r}_1(t)\cdot\frac{d^2}{dt^2}\vec{r}_2(t) - \frac{d^2}{dt^2}\vec{r}_1(t)\cdot\vec{r}_2(t)$

    b) $\frac{d}{dt}\left(\vec{r}_1(t)\cdot\frac{d}{dt}\vec{r}_1(t)\times\frac{d^2}{dt^2}\vec{r}_1(t)\right) = \vec{r}_1(t)\cdot\frac{d}{dt}\vec{r}_1(t)\times\frac{d^3}{dt^3}\vec{r}_1(t)$

228. Sea $f(x,y,z) = \frac{e^{x+y}}{1+z^2}$. Calcule
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1,2+h,3) - f(1,2,3)}{h}$$

229. Evalué el gradiente de $f(x,y,z) = \log(x^2 + y^2 + z^2)$ en el punto $(1,0,1)$.

230. a) Encuentre la ecuación del plano tangente a $z = e^{x-y}$ en el punto $(1,1,1)$.

    b) ¿Dónde corta el plano tangente al eje z?

231. Demuestre usando la definición de limite con ϵ y δ que
$$\lim_{x\to 2}(x^2 + 3x + 2) = 12$$

Unidad 3

1. Sea $\vec{F}(x,y,z) = (2y+3)\vec{i} + xz\vec{j} + (yz-x)\vec{k}$. Evaluar $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ donde C es la línea recta que une a los puntos $(0,0,0)$ y $(2,1,1)$.

2. Sea $\vec{F}(x,y,z) = (y^2\cos x + z^3)\vec{i} + (2y\,\text{sen}x - 4)\vec{j} + (3xz^2+2)\vec{k}$.

   a) Determinar si la función $\vec{F}$ es conservativa.

   b) En caso de que la respuesta anterior sea afirmativa, determinar el potencial escalar de $\vec{F}$.

3. Realiza las siguientes opciones:

   a) Por medio de integrales dobles calcular el área de la región del plano xy localizada en el primer cuadrante y limitada por las curvas $16(x-1) = y^2$ y $8x = y^2$

   b) $\iint_R x\,dA$, donde R es el disco con centro en el origen y radio 10.

4. Resolver la siguiente integral triple: $\iiint_R (x^2+y^2+z^2)\,dV$, donde R está definido por $1 \le x \le 2$, $0 \le y \le 1$ y $0 \le z \le 2$.

5. Evaluar $\oint_C ye^x dx + 2e^x dy$ donde C es el rectángulo con vértices $(0,0)$, $(3,0)$, $(3,4)$, $(0,4)$.

6. Calcular el flujo de $\vec{F}$ a través de S, es decir, calcular la integral $\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S}$. Donde $\vec{F}(x,y,z) = 3xy^2\vec{i} + xe^z\vec{j} + z^3\vec{k}$, S es la superficie del sólido acotado por el cilindro $y^2+z^2 = 1$ y los planos $x=-1, x=2$.

7. Calcule el área comprendida entre las gráficas de las funciones $y = 8-x^2$ y $y = x^2$. Además calcule $\iint_R (x+y)\,dA$ donde R es la región anterior.

8. Calcule el volumen de una sección del cilindro $z = 25-y^2$ que se encuentra en el primer octante y que se corta por el plano $x=5$. Calcular también $\iiint_V (z)\,dV$ con V el volumen que encierra la sección del cilindro anterior.

9. Calcular $\int_r \vec{F}\cdot d\vec{r}$ para:

   a) $\vec{F} = (2x^2, -y)$ y la curva r es el segmento de línea recta que une al $(-3,-2)$ al $(3,2)$

   b) $\vec{F} = (y,-z,-x)$ y la curva r es el segmento de línea recta que une al $(-3,-2,-1)$ al $(3,2,1)$

10. Calcular $\oint_r \vec{F}\cdot d\vec{r}$ para:

    a) $\vec{F} = (-y, 2x)$ y la curva r cerrada es el perímetro de la circunferencia $(x-5)^2 + (y-4)^2 = 4$

    b) $\vec{F} = (y^2, -x)$ y la curva r es el triángulo con vértices el origen, el $3\hat{\imath}$ y el $2\hat{\jmath}$.

11. Calcular la integral de superficie $\iint_S f(x,y,z)dS$, cuya función de densidad es $f(x,y,z) = xy - z$

    a) S es la superficie parametrizada por $\vec{r}(u,v) = (u-v, u+v, 1)$ definida en el rectángulo $[-2,4]\times[-3,2]$

    b) S es el trozo del plano que corta a los ejes en $3\hat{\imath}, 2\hat{\jmath}, \hat{k}$ y se encuentra en el primer octante.

12. Calcular el área de la superficie del paraboloide invertido $z = 64 - x^2 - y^2$ acotado por los planos coordenados yz y zx en el primer octante.

13. Calcular el trabajo que realiza una fuerza $\mathbf{f} = 5xy\mathbf{i} - 3x^2y\mathbf{j}$ a lo largo de la elipse $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{81} = 1$.

14. Para la función vectorial $\mathbf{f} = (4xy^3z^2 + 5y^2z - 3y + 5z)\mathbf{i} + (6x^2y^2z^2 + 10xyz - 3x - 7z)\mathbf{j} + (4x^2y^3z + 5xy^2 + 5x - 7y)\mathbf{k}$

    a) Demostrar que es conservativo.

    b) Hallar el potencial escalar ϕ tal que $\mathbf{f} = \nabla\phi$.

    c) Comprobar que $\int_C \mathbf{f}\cdot d\mathbf{r} = \phi(P_f) - \phi(P_i)$, donde $P_i = (1,2,-1)$ y $P_f = (5,-2,1)$ y C es cualquier curva que una dichos puntos.

15. Comprobar el teorema de Green en el plano para la región encerrada entre las curvas $y = x^2$ y $y = x$. Siendo $\mathbf{f} = 3x^2y\mathbf{i} - xy^2\mathbf{j}$.

16. Si $\vec{f} = 3yz\hat{\imath} + 2xz^2\hat{\jmath} - 5xy\hat{k}$, calcular $\iint_S \vec{f}\cdot d\vec{S}$, donde S es el cilindro parabólico $z = 49 - x^2$ y acotado por los planos $y = 0$ y $y = 11$ en el primer octante.

17. Calcular el área de la superficie del paraboloide invertido $z = 25 - x^2 - y^2$ acotado por los planos coordenados yz y zx en el primer octante.

18. Calcular el trabajo que realiza una fuerza $\mathbf{f} = xy^2\mathbf{i} - 2xy\mathbf{j}$ a lo largo de la elipse $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{49} = 1$.

19. Para la función vectorial $\mathbf{f} = (6x^2y^2z^3 - 7yz + 5y + 4z)\mathbf{i} + (4x^3yz^3 - 7xz + 5x - 2z)\mathbf{j} + (6x^3y^2z^2 - 7xy - 2y + 4x)\mathbf{k}$

    a) Demostrar que es conservativo.

    b) Hallar el potencial escalar ϕ tal que $\mathbf{f} = \nabla\phi$.

    c) Comprobar que $\int_C \mathbf{f}\cdot d\mathbf{r} = \phi(P_f) - \phi(P_i)$, donde $P_i = (-1,-1,3)$ y $P_f = (7,2,-4)$ y C es cualquier curva que una dichos puntos.

20. Comprobar el teorema de Green en el plano para la región encerrada entre las curvas $y = x^2$ y $y = x$. Siendo $\mathbf{f} = -2x^2y\mathbf{i} + 3xy^2\mathbf{j}$.

21. Si $\vec{f} = yz\hat{\imath} + xz\hat{\jmath} + x^2y\hat{k}$, calcular $\iint_S \vec{f}\cdot d\vec{S}$, donde S es el cilindro parabólico $z = 21 - y^2$ y acotado por los planos $x = 0$ y $x = 7$ en el primer octante.

22. Evalúa las siguientes integrales iteradas y traza las regiones determinadas por los límites. Indica si las regiones son tipo 1, tipo 2 o tipo 3.

    a) $\int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} y\, dy dx$
    b) $\int_{-3}^{2} \int_0^{y^2} (x^2 + y)\, dx dy$

23. $\int_W x^2\, dV$, donde $W = [-1, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$

24. Sea $\sigma(t) = (\text{sen}\, t, \cos t)$, con $0 \leq t \leq 2\pi$ y $\vec{F}(x, y, z) = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$. Calcula $\int_\sigma \vec{F} \cdot d\vec{r}$

25. Sea $\vec{A} = (3x^2 + 6y)\hat{\imath} - 14yz\hat{\jmath} + 20xz^2\hat{k}$. Calcula $\int_\sigma \vec{A} \cdot d\vec{r}$ de $(0, 0, 0)$ a $(1, 1, 1)$ a lo largo de $\sigma(t) = (t, t^2, t^3)$.

26. ¿Cuál es el volumen de un granero que tiene base rectangular de 5 m por 10 m, y paredes verticales de 9 m de altura al frente, que está del lado que mide 5 m, y 12 m atrás? El granero tiene un techo plano. Usa integrales dobles para calcular el volumen.

27. En la siguiente integral cambia el orden de integración, esboza la región correspondiente y evalúa la integral de las dos maneras.

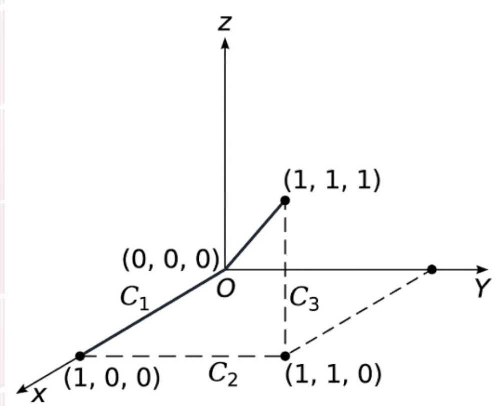
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\cos\theta} \cos\theta\, dr d\theta$$

28. Evalúa $\int_W x^2\, dV$, donde $W = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$ y $\int_0^2 \int_0^{2x} \int_{x^2+y^2}^{x+y} 3\, dz dy dx$.

29. Calcula las siguientes integrales de trayectoria

    a) $f(x, y, z) = e^{\sqrt{z}}$ y $\sigma : t \to (1, 2, t^2), t \in [0, 1]$
    b) $f(x, y, z) = yz$ y $\sigma : t \to (t, 3t, 2t), t \in [1, 3]$
    c) $f(x, y, z) = \frac{(x+y)}{(y+z)}$ y $\sigma : t \to \left(t, \frac{2}{3}t^{3/2}, t\right), t \in [1, 2]$

30. Si $\mathbf{f} = x^2\mathbf{i} + y\mathbf{j} + xyz\mathbf{k}$, calcular $\int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}$ desde $(0,0,0)$ a $(1,1,1)$ a lo largo de:
    a) una recta que conecta estos dos puntos y
    b) un camino C, como se muestra en la figura 4.1, que consiste en tres segmentos de recta C_1, C_2, C_3 que ligan estos dos puntos vía $(1,0,0)$ y $(1,1,0)$.



31. Calcular $\iiint_R \nabla \times \mathbf{f}\, dV$ si $\mathbf{f} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$ y R es cualquier región del espacio con volumen V.

32. Mostrar que, para cualquier superficie cerrada S,

$$\oiint_S \nabla \times \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

(Sugerencia: recuerda el teorema de la divergencia de Gauss.)

33. Si C es una curva cerrada, mostrar que

$$\oint_C \nabla\phi \cdot d\mathbf{r} = 0$$

(Sugerencia: recuerda el teorema del rotacional de Stokes.)

34. Si $\mathbf{f} = ax\mathbf{i} + by\mathbf{j} + cz\mathbf{k}$, calcular $\oiint_S \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S}$ sobre cualquier superficie cerrada S que encierre una región de volumen V.

35. Graficar las líneas equipotenciales y el diagrama de flechas para el siguiente campo vectorial:

$$\mathbf{F}(x,y) = (x, x^2)$$

36. Evalúa $\int_W x^2 dV$ donde $W = [0,1] \times [0,1] \times [0,1]$ y $\int_0^1 \int_0^{2x} \int_{x^2+y^2}^{x+y} dz dy dx$.

37. Calcula las siguientes integrales de línea:

    a) $\vec{F} = -3x^2\hat{\imath} + 5xy\hat{\jmath}$ y σ es la curva en el plano XY, $y = 2x^2$, de $(0,0)$ a $(1,2)$.

    b) Sea $\vec{F} = z\hat{\imath} + z\hat{\jmath} + x\hat{k}$, a lo largo de $\sigma : t \to (\cos t, \text{sen } t, t)$, $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

    c) $\vec{F} = x^2\hat{\imath} + xy\hat{\jmath} + \hat{k}$ y $\sigma : t \to (t, t^2, 1)$, $t \in [0,1]$.

38. Sea $\sigma(t) = (\text{sen } t, \cos t, t)$ con $0 \le t \le 2\pi$ y $\vec{F}(x,y,z) = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$. Calcula $\int_\sigma \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

39. Para la fuerza $\vec{F} = \left[y\hat{\imath} + 2x\hat{\jmath}\right]$ N determine el trabajo realizado por dicha fuerza sobre la trayectoria comprendida entre las curvas $y = -x^2$ y $y = -1$ en sentido antihorario.

40. Evalúe la integral cambiando el orden de integración:

$$\int_0^2 \int_{y/2}^1 e^{x^2}\,dx\,dy$$

41. Calcular el trabajo que realiza una fuerza $\vec{f} = 3x^2y\hat{\imath} - 2xy^2\hat{\jmath}$ a lo largo de la rama positiva de la elipse $\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{36} = 1$.

42. Para la función vectorial

$$f = (xy^2z^2 - 10xz^3 + 3y^2)\hat{\imath} + (x^2yz^2 + 6xy - 4yz)\hat{\jmath} + (x^2y^2z - 15x^2z^2 - 2y^2)\hat{k}$$

    a) Comprobar que $\nabla \times f = 0$

    b) Hallar el potencial escalar ϕ tal que $f = \nabla\phi$.

    c) Comprobar que $\int_C f \cdot dr = \phi(P_f) - \phi(P_i)$, donde $P_i = (-1,1,-1)$ y $P_f = (2,-3,1)$ y C es cualquier curva que una dichos puntos.

43. Comprobar el teorema de Green para $\oint_C 3x^2y\,dx + 5x^2y^2\,dy$ y la región del plano xy delimitada por la intersección de las curvas $y = x$ y $y = x^2$.

44. Si $\vec{f} = 3yz\hat{\imath} - 2xz\hat{\jmath} + x^2y\hat{k}$ calcular $\iint_S \vec{f} \cdot d\vec{S}$ donde S es el cilindro parabólico $z = 16 - y^2$ y acotado por los planos $x = 0$ y $x = 7$ en el primer octante.

45. Calcular el área de la superficie del paraboloide invertido $z = 81 - x^2 - y^2$ acotado por los planos coordenados yz y xz en el primer octante.

46. Calcular el trabajo que realiza una fuerza $\vec{f} = 3x^2y\hat{\imath} + 5x^2y^2\hat{\jmath}$ a lo largo de la rama positiva de la elipse $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{49} = 1$.

47. Para la función vectorial

$$f = (3xy^2z^2 + 2xz^2 - 4xy)\hat{\imath} + (3x^2yz^2 - 2x^2 + 3z^2)\hat{\jmath} + (3x^2y^2z + 2x^2z + 6yz)\hat{k}$$

   a) Comprobar que $\nabla \times f = 0$

   b) Hallar el potencial escalar ϕ tal que $f = \nabla\phi$.

   c) Comprobar que $\int_C f \cdot dr = \phi(P_f) - \phi(P_i)$, donde $P_i = (1, -1, 1)$ y $P_f = (-1, 2, -1)$ y C es cualquier curva que una dichos puntos.

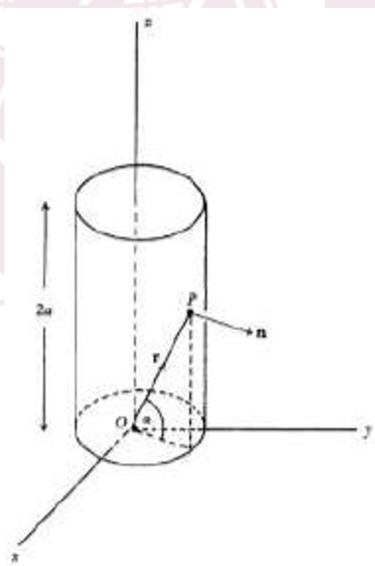
48. Comprobar el teorema de Green para $\oint_C 3xy^2dx - 4x^2ydy$ y la región del plano xy delimitada por las curvas $y = x$ y $y = x^3$ en el primer cuadrante.

49. Si $\vec{f} = 2yz\hat{\imath} - 3x^2z\hat{\jmath} + 2xy\hat{k}$, calcular $\iint_S \vec{f} \cdot d\vec{S}$ donde S es el cilindro parabólico $z = 9 - x^2$ y acotado por los planos $y = 0$ y $y = 8$ en el primer octante.

50. Calcular $\iiint_R \nabla \times \mathbf{f}\, dV$ si $\mathbf{f} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + y\mathbf{k}$ y R es cualquier región del espacio con volumen V.

51. Si $\mathbf{f} = ax\mathbf{i} + by\mathbf{j} + cz\mathbf{k}$, a, b, c son constantes, demuestre que $\iint_S \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = \frac{4\pi}{3}(a + b + c)$, donde S es es la superficie de una esfera unitaria. (Utilizar los teoremas integrales) .

52. $\mathbf{r}$ denota al vector posicion del punto P con respecto al origen O. Evalue $\iint_S \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S}$, donde S es la superficie curva del cilindro $x^2 + y^2 = a^2$, $0 \le z \le 2a$.



53. Si C es una curva cerrada, mostrar que $\oint_C \nabla\phi \cdot d\mathbf{r} = 0$. (Utilizar los teoremas integrales) .

54. Evaluar la integral de línea $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{r}$, donde $\vec{f}(x, y) = x^2\hat{\imath} + xy\hat{\jmath}$ y C es el perímetro del cuadrado unitario en $\mathbb{R}^2$.

55. Evaluar la integral doble trazando la región correspondiente, donde R es la región limitada por $x = -y$, $x = y$ y $y = 2$:
$$\iint_R e^{y^2}\, dA$$

56. Evaluar la integral de línea $\int_C ydx + zdy + xdz$ Donde C es el segmento de recta que une al punto $(4, 0, 0)$ a $(6, 8, 10)$, seguido por el segmento de recta que une al punto $(6, 8, 10)$ a $(6, 8, 0)$.

57. Calcular $\int_C \Phi d\vec{r}$ para $\Phi = x^3y + 2y$ de $(1, 1, 0)$ a $(2, 4, 0)$ a lo largo de la parábola $y = x^2$.

58. Hallar una función escalar de potencial para el campo vectorial:
$$\vec{F} = (y + z\cos(xz))\hat{\imath} + x\hat{\jmath} + (x\cos(xz))\hat{k}$$

59. Mediante una integral triple determinar el volumen de un cilindro de radio $1u$ y una altura de $10u$.

60. Evaluar la integral $\iint_R x\sin(y^3)dA$, donde R es el triángulo con vértices $(0, 0)$, $(0, 2)$ y $(1, 2)$.

61. Evaluar la integral de línea $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{r}$, donde $\vec{f}(x, y, z) = yz\hat{\imath} + xz\hat{\jmath} + xy\hat{k}$ y C está formada por los segmentos de recta que unen a $(1, 0, 0)$ a $(0, 1, 0)$ a $(0, 0, 1)$.

62. Evaluar la integral doble trazando la región correspondiente, donde R es la región limitada por $y = x^2$, $y = 2x$:
$$\iint_R 4x^3y\, dA$$

63. Evaluar la integral de línea $\oint_C d\vec{r}$. Donde C es el círculo $x^2 + y^2 = a^2$, con a una constante. item Calcular $\int_C \Phi d\vec{r}$ para $\Phi = x^3y + 2y$ de $(1, 1, 0)$ a $(2, 4, 0)$ a lo largo de la parábola $y = x^2$.

64. Mostrar que el campo vectorial $\vec{F} = (2xy + z^3)\hat{\imath} + x^2\hat{\jmath} + 3xz^2\hat{k}$ es conservativo, determinar el potencial escalar y el trabajo realizado cuando un objeto se mueve del origen a $(1, 1, 1)$.

65. Mediante una integral triple determinar el volumen de la región entre una esfera de radio 10 y una esfera de radio igual al número de letras de tu nombre.

66. Evaluar la integral $\iint_R 3y^2\sqrt{x}\, dA$, donde R es la región limitada por $y = x^2$, $y = -x^2$ y $x = 4$.

67. Evalúe directamente y mediante el teorema de Green la integral $\oint_C (3x^2 + 2y, -(x + 3y)) \cdot (dx, dy)$, alrededor del paralelogramo cuyos vértices están en $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(2, 1)$ y $(0, 1)$.

68. Evalúe $\iint_S \vec{r} \cdot \hat{n}\, dS$, donde:

    a) S es la esfera de radio 3 con centro en $(0, 0, 0)$.

    b) S es la superficie del cubo limitado por $x = \pm 1$, $y = \pm 1$, $z = \pm 1$.

    c) S es la superficie limitada por $z = 4 - (x^2 + y^2)$.

69. Si $\mathbf{F}(x, y, z) = ax\mathbf{i} + by\mathbf{j} + cz\mathbf{k}$, calcular $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, sobre cualquier superficie cerrada S, que encierre una región de volumen V en el espacio.

70. Use el teorema de Stokes o el teorema de Green en el plano para hallar el área de una circunferencia de radio a en el plano XY, centrada en el origen.

71. Calcular $\iint_S \mathbf{r} \times d\mathbf{S}$, donde S es la superficie esférica cerrada representada por $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

72. Dada la función vectorial $\mathbf{f} = (3x^2y^2z^3 - 6xy^2 + 7z^2)\mathbf{i} + (2x^3yz^3 - 6x^2y + 3y^2z)\mathbf{j} + (3x^3y^2z^2 + 14xz + y^3)\mathbf{k}$.

73. Dada la función vectorial $\mathbf{f} = (14xy^3z^3 + 10xz^2 + 3x^2z^2)\mathbf{i} + (21x^2y^2z^3 + 6y^2z^2)\mathbf{j} + (21x^2y^3z^2 + 10x^2z + 2x^3z)\mathbf{k}$. a) Mostrar que $\nabla \times \mathbf{f} = \mathbf{0}$. b) Hallar una función escalar ϕ tal que $\mathbf{f} = \nabla\phi$.

74. Para la función vectorial $\mathbf{f} = (6xy^3z^2 - 10xy^3 + 14xz^2)\mathbf{i} + (9x^2y^2z^2 - 15x^2y^2 - 6y^2z^2)\mathbf{j} + (6x^2y^3z + 14x^2z - 4y^3z)\mathbf{k}$: a) Demostrar que es conservativo. b) Hallar el potencial escalar ϕ tal que $\mathbf{f} = \nabla\phi$. c) Comprobar que $\int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \phi(P_f) - \phi(P_i)$, donde $P_i = (2, 1, -1)$ y $P_f = (5, 4, -3)$ y C es cualquier curva que una dichos puntos.

75. Comprobar el teorema de Green en el plano para la región encerrada entre las curvas $y = x^2$ y $y = x$. Siendo $\mathbf{f} = 3xy^2\mathbf{i} - 2x^2y\mathbf{j}$.

76. Si $\vec{f} = -3yz\hat{\imath} + 5xz\hat{\jmath} - x^2y\hat{k}$, calcular $\iint_S \vec{f} \cdot d\vec{S}$, donde S es el cilindro parabólico $z = 13 - y^2$ y acotado por los planos $x = 0$ y $x = 9$ en el primer octante.

77. Calcular el trabajo que realiza una fuerza $\mathbf{f} = 3xz\mathbf{i} + 5x^2z\mathbf{j} - 2x^2y\mathbf{k}$ a lo largo de la línea quebrada que une los puntos $A = (0, 0, 0)$, $B = (-1, 3, 5)$ y $C = (2, -4, -7)$.

78. Para la función vectorial $\mathbf{f} = (10xy^3z^3 + 4xy^3 - 6xz^3)\mathbf{i} + (15x^2y^2z^3 + 6x^2y^2 + 8yz^3)\mathbf{j} + (15x^2y^3z^2 - 9x^2z^2 + 12y^2z^2)\mathbf{k}$:

    a) Demostrar que es conservativo.

    b) Hallar el potencial escalar ϕ tal que $\mathbf{f} = \nabla\phi$.

    c) Comprobar que $\int_C \mathbf{f}\cdot d\mathbf{r} = \phi(P_f) - \phi(P_i)$, donde $P_i = (3, -1, 2)$ y $P_f = (-5, -3, 1)$ y C es cualquier curva que una dichos puntos.

79. Comprobar el teorema de Green para $\oint_C 3x^2y dx - 2xy^2 dy$ y la región del plano xy encerrada por las curvas $y = 1 - x^2$ y $y = 1 - x$.

80. Si $\vec{f} = 3yz\hat{\imath} - 5xz\hat{\jmath} + 2xy^2\hat{k}$, calcular $\iint_S \vec{f}\cdot d\vec{S}$, donde S es el cilindro parabólico $z = 11 - x^2$ y acotado por los planos $y = 0$ y $y = 9$ en el primer octante.

81. Muestre que la integral dada es independiente de la trayectoria. Evalúe.

$$\int_{(1,2,1)}^{(3,4,1)} (2x + 1)\, dx + 3y^2\, dy + \frac{1}{z}\, dz$$

82. Emplee el teorema de Green para evaluar la integral

$$\oint_C 2x^3y\, dx + (3x + y)\, dy,$$

donde C es la elipse

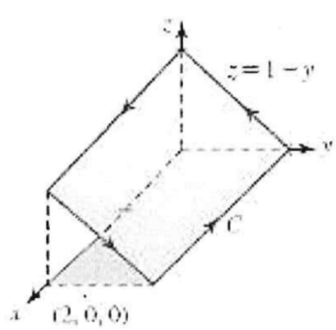
$$9(x - 1)^2 + 4(y - 3)^2 = 36$$

83. Usando el teorema de Stokes, evalúe

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}.$$

$$\mathbf{F} = (2z + x)\mathbf{i} + (y - z)\mathbf{j} + (x + y)\mathbf{k}$$

Suponga que C está orientada en sentido contrario al de las manecillas del reloj cuando se observa desde arriba. C es la frontera del plano $z = 1 - y$ que se ilustra en la figura.



84. Mediante el teorema de la divergencia. Determine el flujo hacia fuera

$$\iint_S (\mathbf{F}\cdot\mathbf{n})\, dS$$

del campo vectorial dado $\mathbf{F}$.

$$\mathbf{F} = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{(x^2+y^2+z^2)}$$

D la región acotada por las esferas concéntricas

$$x^2+y^2+z^2 = a^2, \qquad x^2+y^2+z^2 = b^2, \qquad b > a$$

85. Calcular el área de la superficie del paraboloide invertido

$$z = 49 - x^2 - y^2$$

acotado por los planos coordenados yz y zx en el primer octante.

86. Calcular la integral

$$\oint_C \mathbf{f}\times d\mathbf{r}$$

si

$$\mathbf{f} = -2xy^2\mathbf{i} + 5x^2y\mathbf{j}$$

y la curva C es la parte de la elipse

$$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$$

en el primer cuadrante.

87. Comprobar el teorema de Green en el plano para la región encerrada entre las curvas

$$y = \sqrt{-x}$$

y

$$y = \frac{x^2}{2}.$$

Siendo

$$\mathbf{f} = -7xy^2\mathbf{i} + 4x^2y\mathbf{j}.$$

88. Si

$$\vec{f} = 4yz^2\mathbf{i} - 3xz\mathbf{j} + 2xy\mathbf{k},$$

calcular

$$\iint_S \vec{f}\cdot d\vec{S},$$

donde S es la superficie cerrada que se forma con el cilindro parabólico

$$z = 25 - x^2$$

acotado por los planos $y = 0$ y $y = 13$ en el primer octante.

89. Calcular la integral

$$\oint_C \mathbf{f} \times d\mathbf{r}$$

si

$$\mathbf{f} = 5x^2y\mathbf{i} + 3x^2y^2\mathbf{j}$$

y la curva C es la parte de la elipse

$$\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{49} = 1$$

en el primer cuadrante.

90. Comprobar el teorema de Green en el plano para la región encerrada entre las curvas

$$y = \sqrt{x}$$

y

$$y = \frac{x}{2}.$$

Siendo

$$\mathbf{f} = -5xy^2\mathbf{i} + 3x^2y\mathbf{j}.$$

91. Si

$$\vec{f} = 5y^2z\mathbf{i} - 2xz\mathbf{j} + 3xy\mathbf{k},$$

calcular

$$\iint_S \vec{f} \cdot d\vec{S},$$

donde S es la superficie cerrada que se forma con el cilindro parabólico

$$z = 16 - y^2$$

acotado por los planos $x = 0$ y $x = 7$ en el primer octante.

92. Siendo

$$\vec{A} = (2y + 3)\hat{\imath} + xz\hat{\jmath} + (yz - x)\hat{k},$$

hallar

$$\int_C \vec{A} \cdot d\vec{r}$$

a lo largo de las siguientes trayectorias:

$$x = 2t^2, \qquad y = t, \qquad z = t^3$$

desde $t = 0$ a $t = 1$.

93. Evalúe la integral cambiando a coordenadas polares

$$\iint_R \cos(x^2+y^2)\,dA,$$

donde R es la región localizada arriba del eje x dentro del círculo

$$x^2+y^2=9.$$

94. Evalúe

$$\iiint_E \sqrt{x^2+y^2}\,dV,$$

donde E es la región que yace dentro del cilindro

$$x^2+y^2=9$$

y entre los planos $z=-4$ y $z=5$.

95. En la región $\varphi(A) : x+y=10,\ x+y=4,\ x=0,\ y=0$ se define la integral siguiente:

$$\iint_{\varphi(A)} (x+y)\,dxdy$$

Considerando lo anterior determinar lo siguiente

a) Dibujar la región $\varphi(A)$ en coordenadas rectangulares (x,y).
b) Escribir las integrales dobles en los órdenes $dxdy$ y $dydx$ con sus límites de integración asociados.
c) Resolver una de las integrales anteriores (la que considere más sencilla).

96. Sea S la región acotada por la superficie

$$S=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+(z-1)^2\leq 1\right\}.$$

Dibujar el sólido S y las proyecciones en los planos correspondientes, así como escribir los 6 órdenes de integración asociados.

$$\iiint_S dxdydz$$

97. Dibujar la región Q que da lugar a la integral doble, cambiar el orden de integración y calcular entonces la integral.

$$\int_{-1}^{0}\int_{-\sqrt{y+1}}^{\sqrt{y+1}} x^2\,dxdy$$

98. Sea S la región acotada por la superficie

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + (z-1)^2 \leq 1\right\}.$$

Dibujar el sólido S y las proyecciones en los planos correspondientes, así como escribir los 6 órdenes de integración asociados.

$$\iiint_S dxdydz$$

99. En la región $\varphi(A) : x = y,\ y = 5x,\ xy = 2,\ xy = 4$ se define la integral siguiente:

$$\iint_{\varphi(A)} dxdy$$

Considerando lo anterior determinar lo siguiente

a) Dibujar la región $\varphi(A)$ en coordenadas rectangulares (x, y).
b) Escribir las integrales dobles en los órdenes $dxdy$ y $dydx$ con sus límites de integración asociados.
c) Proponer un cambio de variable y dibujar la región A asociada.
d) Escribir la integral utilizando el teorema de cambio de variable.
e) Resolver una de las integrales anteriores (la que considere más sencilla).

100. Sea S la región acotada por las superficies

$$z = 0, \qquad z = 5, \qquad y = 9, \qquad y = x^2,$$

determinar el valor de una de las integrales siguiendo los órdenes de integración indicados. Dibujar el sólido S y las proyecciones en los planos correspondientes

a) $\displaystyle\iiint_S z\, dzdxdy$

b) $\displaystyle\iiint_S z\, dydxdz$

c) $\displaystyle\iiint_S z\, dzdxdy$

101. Hallar
$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{r}$$
a lo largo de la curva cerrada C de la figura dada, sabiendo que
$$\vec{A} = (x - y)\hat{\imath} + (x + y)\hat{\jmath}.$$

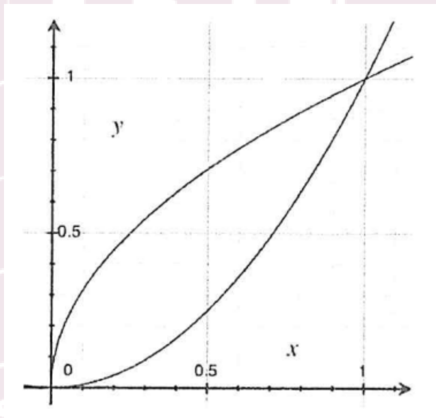


Figura 1: Curva C dada por: $y = x^2$ y $y^2 = x$

102. Hallar
$$\iint_S \vec{A} \cdot \hat{n}\, dS$$
donde
$$\vec{A} = y\hat{\imath} + 2x\hat{\jmath} - z\hat{k}$$
y S es la superficie del plano
$$2x + y = 6$$
situada en el primer octante y limitada por el plano
$$z = 4.$$

103. Hallar
$$\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2}\, dxdydz$$
siendo V la región limitada por
$$z = x^2 + y^2$$
y
$$z = 8 - (x^2 + y^2).$$
Emplear coordenadas cilíndricas.

104. Sea

$$\vec{B} = (2x - y + z)\hat{\imath} + (x + y - z^2)\hat{\jmath} + (3x - 2y + 4z)\hat{k}$$

un campo vectorial. Evalúe la integral de línea

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r},$$

donde C es un círculo con centro en el origen y de radio 3, en el plano XY.

105. Con una integral triple determine el volumen del sólido acotado por las gráficas de las ecuaciones

$$z = 1 - y^2, \qquad y = 2x, \qquad x = 3,$$

en el primer octante.

106. Evalúe la integral doble

$$\iint_D (x^2 + y^2)^{-2}\, dA,$$

donde D está definido por

$$2 \leq x^2 + y^2 \leq 4.$$

107. Sea

$$\phi = 2xy^2z + x^2y,$$

evalúe

$$\int_C \phi\, d\vec{r},$$

donde C es la curva

$$x = t, \qquad y = t^2, \qquad z = t^3,$$

con $0 \leq t \leq 1$.

108. Evalúe la integral doble

$$\iint_D (1 + x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}}\, dA,$$

donde D es la región acotada por

$$x^2 + y^2 = 16$$

en el primer cuadrante.

109. Sea $\vec{F} = 2y\hat{\imath} - z\hat{\jmath} + x\hat{k}$. Evalúe $\int_C \vec{F} \times d\vec{r}$ a lo largo de la curva $x = \cos(t)$, $y = \text{sen}(t)$ y $z = 2\cos(t)$, de $t = 0$ a $t = \frac{\pi}{2}$.

110. Sea $\vec{A} = (4xy - 3x^2z^2)\hat{\imath} + 2x^2\hat{\jmath} - 2x^3z\hat{k}$. Demuestre que $\int_C \vec{A} \cdot d\vec{r}$ es independiente de la curva C que une a dos puntos dados. ¿Hay una función diferenciable tal que $\vec{A} = \nabla\phi$? En caso afirmativo, determine la función ϕ.

111. Evalúe las integrales

   a) $\iint_R \text{sen}^2(x)dA$ donde R está acotada por $y = \cos(x)$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, $y = 0$.

   b) $\iint_R \cos(\sqrt{x^2 + y^2})dA$ donde R es el disco con centro en el origen y radio 2.

   c) $\iiint_R (xy + z^2)dV$ donde R es la caja limitada por $[0, 2] \times [0, 1] \times [0, 3]$.

112. Sea $\vec{A} = -x\hat{\jmath}$ y $\vec{B} = 2\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} + \hat{k}$. Evalúe $\oint_C (\vec{A} \times \vec{B}) \times d\vec{r}$ alrededor de la circunferencia en el plano xy, con centro en el origen y con radio igual a 2, que se recorre en la dirección positiva.

113. Para el siguiente campo vectorial:

   a) Demuestre que $\vec{F} = (y^2\cos(x) + z^3)\hat{\imath} + (2y\text{sen}(x) - 4)\hat{\jmath} + (3xz^2 + 2)\hat{k}$ es un campo de fuerzas conservativo.

   b) Determine el potencial escalar para $\vec{F}$.

   c) Calcule el trabajo realizado cuando un objeto se mueve en este campo, de $(0, 1, -1)$ a $(\pi, -1, 2)$.

114. Evalúe las integrales

   a) invirtiendo el orden de integración $\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 \sqrt{y^3 + 1}dydx$.

   b) $\iint_R \text{sen}(x^2+y^2)dA$ donde R es la región del primer cuadrante entre las circunferencias con centro en el origen y radios 1 y 3.

   c) $\int_1^2 \int_0^{2z} \int_0^{\ln(x)} xe^{-y}dydxdz$.

115. Dada la función vectorial $f = (3x^2y^2z^3 - 6xy^2 + 7z^2)\hat{\imath} + (2x^3yz^3 - 6x^2y + 3y^2z)\hat{\jmath} + (3x^3y^2z^2 + 14xz + y^3)\hat{k}$. a) Mostrar que $\nabla \times f = 0$. b) Hallar una función escalar tal que $f = \nabla\phi$.

116. Dada la función vectorial $f = (14xy^3z^2 - 10xz - 9)\hat{\imath} + (21x^2y^2z^2 + 6yz^3 + 3)\hat{\jmath} + (14x^2y^3z - 5x^2 + 9y^2z^2 + 5)\hat{k}$. a) Mostrar que $\nabla \times f = 0$. b) Hallar una función escalar tal que $f = \nabla\phi$.

117. Calcular el área de la superficie del paraboloide invertido $z = 64 - x^2 - y^2$ acotado por los planos coordenados yz y zx en el primer octante.

118. Calcular el trabajo $W = \int_C f \cdot dr$ que realiza una fuerza $f = 5xy^2\hat{\imath} - 3x^2y^2\hat{\jmath}$ aplicada a una partícula que se mueve a lo largo la curva C que es la parte de la elipse en el primer cuadrante:

$$\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{25} = 1$$

119. Para la función vectorial $f = (x^2y^3z^3 - x^4y^5 - 4y)\hat{\imath} + (x^3y^2z^3 - x^5y^4 + 2y^3z^4 - 4x + 2z)\hat{\jmath} + (x^3y^3z^2 + 2y^4z^3 + 2y)\hat{k}$. a) Demostrar que es conservativo. b) Hallar el potencial escalar ϕ tal que $f = \nabla\phi$. c) Comprobar que $\int_C f \cdot dr = \phi(P_f) - \phi(P_i)$ donde $P_i = (-1, -1, -1)$ y $P_f = (1, 1, 1)$ y C es cualquier curva que una dichos puntos.

120. Comprobar el teorema de Green en el plano para la región encerrada entre las curvas $y = \sqrt{x}$ y $y = x$. Siendo $f = 3xy^2\hat{\imath} - 5x^2y\hat{\jmath}$.

121. Si $\vec{f} = 4yz^2\hat{\imath} - 3xz\hat{\jmath} + 2xy\hat{k}$, calcular $\iint_S \vec{f} \cdot d\vec{S}$, donde S es la superficie cerrada que se forma con el cilindro parabólico $z = 25 - x^2$ acotado por los planos $y = 0$ y $y = 13$ en el primer octante.

122. Calcular el área de la superficie del paraboloide invertido $z = 36 - x^2 - y^2$ acotado por los planos coordenados yz y zx en el primer octante.

123. Calcular el trabajo $W = \int_C f \cdot dr$ que realiza una fuerza $f = -5xy^2\hat{\imath} + 2x^2y^2\hat{\jmath}$ aplicada a una partícula que se mueve a lo largo la curva C que es la parte de la elipse en el primer cuadrante:
$$\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{25} = 1$$

124. Para la función vectorial $f = (x^2y^3 + 3yz - 15x^2z^3 + 2z)\hat{\imath} + (x^3y^2 + yz^2 + 3xz)\hat{\jmath} + (y^2z + 3xy - 15x^3z^2 + 2x)\hat{k}$. a) Demostrar que es conservativo. b) Hallar el potencial escalar ϕ tal que $f = \nabla\phi$. c) Comprobar que $\int_C f \cdot dr = \phi(P_f) - \phi(P_i)$ donde $P_i = (-1, -1, -1)$ y $P_f = (1, 1, 1)$ y C es cualquier curva que una dichos puntos.

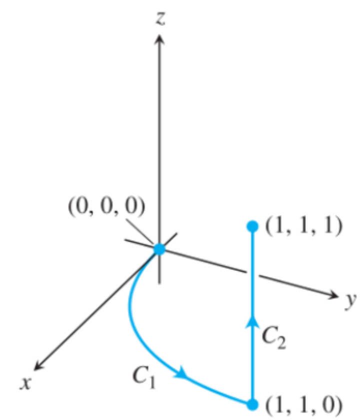
125. Comprobar el teorema de Green en el plano para la región encerrada entre las curvas $y = x^2$ y $y = x$. Siendo $f = 4xy^2\hat{\imath} - 3x^2y\hat{\jmath}$.

126. Si $\vec{f} = -5y\hat{\imath} - 3xz\hat{\jmath} + 4x^2y\hat{k}$ calcular $\oint_S \vec{f} \cdot d\vec{S}$ donde S es la superficie cerrada que se forma con el cilindro parabólico $z = 16 - x^2$ acotado por los planos $y = 0$ y $y = 10$ en el primer octante.

127. Integre $f(x, y, z) = x + \sqrt{y} - z^2$ sobre la trayectoria que va desde $(0, 0, 0)$ hasta $(1, 1, 1)$ dada por:

   a) $C_1 : r(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} \quad 0 \leq t \leq 1$

   b) $C_2 : r(t) = \mathbf{i} + \mathbf{j} + t\mathbf{k} \quad 0 \leq t \leq 1$

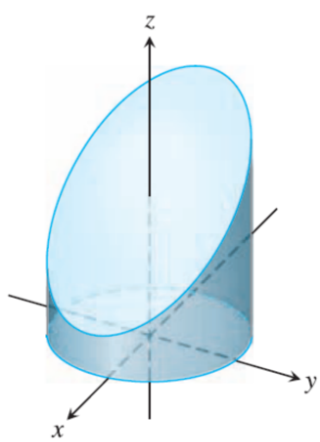


128. Determine el volumen del sólido en el primer octante acotado por los planos coordenados, el plano $x = 3$ y el cilindro parabólico $z = 4 - y^2$.

129. Calcule el jacobiano $\partial(x, y, z)/\partial(u, v, w)$ para la transformación:

$$x = 2u - 1, \quad y = 3u - 4, \quad z = (1/2)(w - 4)$$

130. Cálculo de volúmenes de la región cortada en el cilindro $x^2 + y^2 = 4$ por el plano $z = 0$ y el plano $x + z = 3$.



131. Cambie el orden de integración de manera adecuada para que sea más conveniente de integrar:

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_{x^2}^1 12xze^{zy^2}\, dy\, dx\, dz$$

132. Verifique la igualdad

$$\oint_C P dx + Q dy = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

si $\vec{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j} = (3x + 4y)\mathbf{i} + (2x - 3y)\mathbf{j}$ y $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 4\}$

133. Calcular la integral de superficie

$$\iint_S \vec{F} \cdot dS \quad \text{con} \quad \vec{F}(x, y, z) = \frac{x^2}{2}\mathbf{i} + \frac{y^2}{2}\mathbf{j} + \frac{z^2}{2}\mathbf{k}$$

Y S la esfera de radio 1 centrada en el origen.

134. Calcular las siguientes integrales de línea $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ si

   a) $\vec{F}(x, y) = 2x^2\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ y C es la curva dada por el segmento de recta que une los puntos $P = (-3, -2)$ y $Q = (3, 2)$.
   b) $\vec{F}(x, y, z) = y\mathbf{i} - z\mathbf{j} - x\mathbf{k}$ y C es la curva dada por el segmento de recta que une los puntos $P = (-3, -2, -1)$ y $Q = (3, 2, 1)$.

135. Calcular

$$\iiint_D (x^2 + y^2 + z^2) dxdydx$$

Con $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, 1 \le z \le 3\}$

136. a) Usar una integral de superficie para determinar el área del triángulo $T \subset \mathbb{R}^3$ con vértices en $P_1 = (1, 1, 0)$, $P_2 = (2, 1, 2)$ y $P_3 = (2, 3, 3)$. Usar una función $z = g(x, y)$ que nos dé el triángulo requerido.
   b) Usar el producto vectorial para verificar tu respuesta.

137. Sea $\vec{F}(x, y, z) = 2x^2y\mathbf{i} - y^2\mathbf{j} + 4xz^2\mathbf{k}$ y S la superficie cerrada, limitada por $y^2 + z^2 = 9$, $x = 2$ y el primer octante. Calcular la integral de superficie usando la fórmula del teorema de la divergencia de Gauss:

$$\iint_S \vec{F} \cdot dS = \iiint_V \text{div}(\vec{F}) dxdydz$$

138. Sea $\vec{F}$ un campo de fuerzas definido como

$$\vec{F} = (2xy + z^3)\hat{\imath} + x^2\hat{\jmath} + 3xz^2\hat{k}.$$

   a) Determine si el campo $\vec{F}$ es un campo conservativo.
   b) En caso de que sea conservativo determine el potencial escalar.
   c) Calcule el trabajo realizado por una partícula que se mueve de $(1, -1, 1)$ a $(1, 2, 3)$.

139. Sea $\vec{A} = (2y+3)\hat{\imath}+xz\hat{\jmath}+(yz-x)\hat{k}$. Evalúe $\int_C \vec{A}\cdot d\vec{r}$ a lo largo de las trayectorias siguientes C:

   a) $x(t) = 2t^2$, $y(t) = t$ y $z(t) = t^3$ de $t = 0$ a $t = 1$.
   b) Las líneas rectas de $(0, 0, 0)$ a $(0, 0, 1)$, después a $(0, 1, 1)$ y luego a $(2, 1, 1)$.
   c) La línea recta que une a $(0, 0, 0)$ y $(2, 1, 1)$.

140. Evalúe $\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ donde $\vec{F} = (x - 3y)\hat{\imath} + (y - 2x)\hat{\jmath}$ y C es la curva cerrada en el plano xy, $x(t) = 2\cos(t)$, $y(t) = 3\sin(t)$ de $t = 0$ a $t = 2\pi$.

141. Evalúe $\iint_R e^{y^2}\, dA$, donde R es la región limitada por $x = -y$, $x = y$ y $y = 2$.

142. Demuestre que el campo vectorial $\vec{V} = \frac{-x\hat{\imath}-y\hat{\jmath}}{\sqrt{x^2+y^2}}$ es un campo sumidero.

143. Calcular el área de la superficie del paraboloide invertido $z = 81 - x^2 - y^2$ acotado por los planos coordenados yz y zx en el primer octante.

144. Calcular el trabajo $W = \int_C \mathbf{f}\cdot d\mathbf{r}$ que realiza una fuerza $\mathbf{f} = 3xy^2\mathbf{i} + 5x^2y\mathbf{j}$ aplicada a una partícula que se mueve a lo largo la curva C que es la parte de la elipse $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{81} = 1$ en el primer cuadrante.

145. Para la función vectorial $\mathbf{f} = (10xy^3z^2 - 6xz^3 + 6x^2y^2 + 4)\mathbf{i} + (15x^2y^2z^2 + 4x^3y - 14yz^2 + 5)\mathbf{j} + (10x^2y^3z - 9x^2z^2 - 14y^2z - 3)\mathbf{k}$

   a) Demostrar que es conservativo.
   b) Hallar el potencial escalar ϕ tal que $\mathbf{f} = \nabla\phi$.
   c) Comprobar que $\int_C \mathbf{f}\cdot d\mathbf{r} = \phi(P_f) - \phi(P_i)$, donde $P_i = (2, 1, -1)$ y $P_f = (-1, 1, -3)$ y C es cualquier curva que una dichos puntos.

146. Comprobar el teorema de Green en el plano para la región encerrada entre las curvas $y = \sqrt{x-5}$ y $y = \frac{1}{4}(x - 5)$. Siendo $\mathbf{f} = 7xy^2\mathbf{i} - 2x^2y\mathbf{j}$.

147. Si $\vec{f} = -3yz^2\hat{\imath} + 5xz\hat{\jmath} - 4xy\hat{k}$, calcular $\iint_S \vec{f}\cdot d\vec{S}$, donde S es la superficie cerrada que se forma con el cilindro parabólico $z = 36 - x^2$ acotado por los planos $y = 0$ y $y = 10$ en el primer octante.

148. Determine las ecuaciones simétricas para la recta perpendicular a la gráfica de la superficie dada por la ecuación:

$$z = -4x^2 + 3y^3$$

en el punto $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{10}{3})$.

149. Sean $\vec{F} = 3yx^2\hat{\imath} + xz\hat{\jmath} + 2zy^4\hat{k}$ y $\phi = x^2y^3z$. En el punto $(1, -1, 2)$ determine lo siguiente:

a) $\nabla \times (\phi\vec{F})$

b) $\nabla \times (\nabla \times \vec{F})$

c) $\nabla \cdot [\vec{F} \times (\nabla\phi)]$

d) $\nabla \cdot \vec{F}$

150. Calcule el trabajo total realizado por una fuerza dada por:

$$\vec{F} = -x\hat{\imath} + z\hat{\jmath} + y\hat{k}$$

que actúa sobre una partícula para desplazarla a lo largo de una hélice elíptica, cuyas ecuaciones paramétricas son:

$$x = \cos(t), \quad y = t, \quad z = 3\text{sen}(t)$$

de $t = 0$ a $t = \pi$.

151. a) Demuestre que $\vec{F} = (2xy + z^3)\hat{\imath} + x^2\hat{\jmath} + 3xz^2\hat{k}$ es un campo de fuerzas conservativo.

b) Encuentre el potencial escalar.

c) Calcule el trabajo realizado cuando un objeto se mueve de $(2, -1, 3)$ a $(4, -2, 2)$.

152. Sea $f(x, y) = (\tan(x - 1) - y^y, x^2 - y^2)$ y $g(u, v) = (e^{u-v}, u - v)$. Calcule la derivada de $f \circ g$ evaluada en $(1, 1)$.

153. Suponga que una partícula sigue la trayectoria $c(t) = (4e^t, 6t^4, \cos t)$. En el instante $t_0 = 0$ la partícula sale de su trayectoria siguiendo ahora una trayectoria tangencial a la curva en dicho instante. Encuentre la coordenada de la partícula en el instante $t_1 = 1$.

154. Suponga que un pato nada siguiendo una trayectoria circular dada por $x = \cos t$ y $y = \sin t$ y la temperatura del agua está dada por $T = x^2e^y - xy^3$. Encuentre dT/dt la razón de cambio de la temperatura que experimenta el pato.

155. Encuentre $(\partial/\partial s)(f \circ T)(1, 0)$ en donde $f(u, v) = \cos u \sin v$ y $T(s, t) = (\cos(t^2s), \log(\sqrt{1 + s^2}))$.