



CÁLCULO - IIA - LCD

Unidad 1

1. Encuentre el dominio y el recorrido de la siguiente función

$$f_0(x) = \frac{1}{2-x}$$

Determine si la función es par, impar o ninguna de ellas. Luego, si definimos la siguiente composición de funciones $f_{n+1} = f_0 \circ f_n$ para $n = 0, 1, 2, \dots$, encuentre una fórmula general para $f_n(x)$. (Note que para $n = 0$ se obtiene $f_1 = f_0 \circ f_0$).

- a) Determine el conjunto solución que satisfacen las siguientes desigualdades

$$24 - 12x^2 \geq -2x^3 - 10x$$

2. Dibujar la gráfica de la función calculando el dominio, contradominio, intersecciones con los ejes, simetría y asíntotas.

$$f(x) = 4 \left(1 - \frac{1}{x^2} \right)$$

3. Considere las siguientes funciones:

$$g(x) = x^2 - 4 \quad h(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+4}$$

Realice cada una de las siguientes operaciones y obtenga el dominio de cada una de las funciones resultantes:

- a) $g + h$
b) $\frac{h}{g}$
c) $h \circ g$
4. Dada la siguiente función f , demuestre que f es inyectiva, luego halle la función inversa de f y finalmente verifique que son funciones inversas.

$$f(x) = \frac{x-2}{5x+2}$$

5. Dadas las siguientes funciones

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + x - 6} \quad y \quad g(x) = \sqrt{x}$$

Obtenga (a) $f \circ g$; (b) $g \circ f$ y determine el dominio de cada función resultante.



6. Considere la función

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$$

- Encuentre un subconjunto donde la función es inyectiva y demuéstrelo.
- Encuentre la función inversa.
- Realice la composición de funciones:

$$f \circ f^{-1} \quad \text{y} \quad f^{-1} \circ f$$

7. Usar la gráfica base de la función coseno (solo un periodo) para bosquejar la gráfica de la función

$$f(x) = 2 \cos(2x) - 1$$

8. a) Determinar todos los valores de c de manera que el dominio de la función $f(x)$ sea el conjunto de todos los números reales.

$$f(x) = \frac{x + 1}{x^2 + 2cx + 4}$$

b) Determine el conjunto solución que satisface siguiente desigualdad

$$\left| \frac{3x + 12}{x + 2} \right| > 1$$

9. Dibujar la gráfica de la función calculando el dominio, rango, intersecciones con los ejes, simetría y asíntotas.

$$f(x) = \frac{4}{x^2} + 1$$

10. Determine el conjunto solución que satisfacen las siguientes desigualdades

a)

$$x^3 + 3x < 4x^2$$

b)

$$|x - 1| - |x - 3| \geq 5$$

11. Dibujar la gráfica de la función calculando el dominio, rango, intersecciones con los ejes, simetría y asíntotas.

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 4}}$$



12. Dibuje la gráfica de las siguientes funciones, usando traslaciones, reflexiones, compresiones y estiramientos de una función adecuada.

a)

$$y = \frac{1}{1-x}$$

b)

$$y = |2x - 1| + 1$$

13. Encuentre fórmulas para $f \circ g$ y $g \circ f$, y determine el dominio de las composiciones, si

$$f(x) = \frac{1+x}{1-x}, \quad g(x) = \frac{x}{1-x}$$

14. Suponga que f tiene dominio $(-\infty, \infty)$. Determine si la siguiente función es par o impar o ninguna de las dos.

$$g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$$

15. Encuentre la inversa de la función

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

16. Halle el dominio y el recorrido de la función dada.

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

17. Determine si la función es par, impar o ninguna de las dos cosas.

$$H(\theta) = \sin(\theta^2)$$

18. Determine si existe una constante c tal que la recta $x + cy = 1$:

a) Tenga pendiente 4.

19. Calcule las funciones compuestas $f \circ g$ y $g \circ f$ y determine sus dominios respectivos.

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad g(x) = x^{-4}$$

20. Resuelva la siguiente ecuación:

$$\sin(2x) + \cos(x) = 0 \quad \text{para } 0 \leq x < 2\pi.$$



21. Halle el dominio y el recorrido de la función dada.

$$g(t) = \sqrt{2-t}$$

22. Determine si la función es par, impar o ninguna de las dos cosas.

$$f(t) = \frac{1}{t^4 + t + 1} - \frac{1}{t^4 - t + 1}$$

23. Halle la ecuación de la recta que corta:

a) el eje x en $x = 4$ y el eje y en $y = 3$

24. Sean las funciones h y g . Calcule las funciones compuestas $h(g(x))$ y $g(h(x))$ y halle sus dominios.

$$h(x) = \cos x, \quad g(x) = x^{-1}$$

25. Demuestre que si $\tan \theta = c$ y $0 \leq \theta \leq \pi/2$, entonces:

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1+c^2}}$$

26. Obtenga el valor de x solución en la inecuación

$$|x+3| \leq 2x-5.$$

27. De $f(x) = |x^2-1|$; $g(x) = |x-1|$, determine la función resultante y el dominio en $(f-g)(x)$,

$$(f \cdot g)(x), \quad \left(\frac{f}{g}\right)(x) \quad \text{y} \quad (f \circ g)(x).$$

28. Determine de forma analítica toda la información de

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-9}}$$

que incorpore dominio, simetría, punto de intersección en los ejes y asíntotas si existen. Confirme sus conclusiones y bosqueje la función en una gráfica.

29. Halle toda información analítica de la función

$$f(x) = 3 \operatorname{sen} \left(3x - \frac{\pi}{3} \right) + 3$$

en el primer periodo positivo y bosqueje la gráfica transformada.



30. Establezca el conjunto solución para las siguientes desigualdades:

a)

$$\frac{1}{x} \leq \frac{1}{x+1} - \frac{2}{x+2}$$

b)

$$||x+1| - |x-1|| < 1$$

31. Demuestre lo siguiente:

a) Si a y b son dos reales cualquiera, entonces:

$$|a+b| \leq |a| + |b|$$

b) Demuestre que si $|x| \leq 1$, entonces:

$$x^2 \leq x$$

32. Un plan de telefonía celular tiene una carga básica de 35 dólares al mes. El plan incluye 400 minutos gratis y cargos de 10 centavos de dólar por cada minuto adicional de uso. Escriba el costo mensual C , como una función del número x de minutos utilizados, y grafique C como una función para $0 \leq x \leq 600$.

33. Grafique la siguiente funciones a mano, sin trazar puntos, si no empezando con la gráfica de una función esencial, hasta llegar a la función solicitada:

a)

$$y = |\cos(\pi x)|$$

b)

$$y = x^2 + 6x + 4$$

Coloque elementos que permitan identificar las diferencias en cada gráfica, de ser necesario.

34. Realice lo que se le pide

a) Resuelva la siguiente ecuación para x

$$\ln(\ln(x)) = 1$$

b) Halle una fórmula para la inversa de la función:

$$y = \frac{e^x}{1 + 2e^x}$$



35. Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Recuerde que si la respuesta es verdadero, debe argumentar por que lo es; de ser falso, deberá dar un contra ejemplo.

a) Si f es una función, entonces

$$f(s + t) = f(s) + f(t).$$

b) Si $f(s) = f(t)$, entonces $s = t$.

c) Si f es una función, entonces

$$f(3x) = 3f(x)$$

d) Si x es cualquier número real, entonces

$$\sqrt{x^2} = x.$$

e)

$$\tan^{-1}(-1) = \frac{3\pi}{4}$$

36. Establezca el conjunto solución para las siguientes desigualdades:

a)

$$\left| 4 - \frac{7}{2x - 1} \right| \geq 7$$

b)

$$-3 < \frac{1}{x} \leq 1$$

37. Demuestre lo siguiente:

a) Si $|x + 3| < \frac{1}{2}$, entonces $|4x + 13| < 3$

b) Si $0 < a < b$, entonces $a^2 < b^2$



38. Realice lo que se le pide:

a) Encuentre el dominio de la función:

$$f(u) = \frac{u + 1}{1 + \frac{1}{u + 1}}$$

b) Si el punto $(5, 3)$ está en la gráfica de una función par ¿Cuál otro punto también debe estar en la gráfica?. Si el punto $(5, 3)$ está en la gráfica de una función impar. ¿Cuál otro punto también debe estar en la gráfica?

c) Si f y g son funciones pares, ¿es $f + g$ par?. Si f y g son funciones impares, ¿es $f + g$ impar?. ¿Qué sucede si f es par y g es impar?. Justifique sus respuestas.

39. ¿Cómo es la gráfica de $y = 2 \operatorname{sen}(x)$ en relación con la gráfica de $y = \operatorname{sen}(x)$. Grafique $y = 2 \operatorname{sen}(x)$. ¿Cómo es la gráfica de $y = 1 + \sqrt{x}$ en relación con la gráfica de $y = \sqrt{x}$?. Grafique $y = 1 + \sqrt{x}$.

40. Realice lo que se le pide

a) Pruebe que:

$$\cos(\operatorname{sen}^{-1}(x)) = \sqrt{1 - x^2}$$

b) Halle una fórmula para la inversa de la función:

$$y = x^2 - x$$

para $x \geq \frac{1}{2}$



41. Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Recuerde que si la respuesta es verdadero, debe argumentar por que lo es; de ser falso, deberá dar un contra ejemplo.

a) Si f y g son funciones, entonces $f \circ g = g \circ f$.

b) Si f es uno a uno, entonces

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{f(x)}.$$

c) Siempre se puede dividir por e^x .

d) Si $x > 0$ y $a > 1$, entonces

$$\frac{\ln(x)}{\ln(a)} = \ln\left(\frac{x}{a}\right)$$

e)

$$\tan^{-1}(x) = \frac{\text{sen}^{-1}(x)}{\text{cos}^{-1}(x)}$$

42. Supongamos que g es una función par y sea $h = f \circ g$. ¿Es h siempre una función par?!

43. Encuentre lo que se le pide:

a) Simplifique la expresión:

$$\tan(\text{sen}^{-1}(x))$$

b) Encuentre el valor exacto de la siguiente expresión:

$$\text{sen}\left(2 \text{sen}^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)\right)$$

44. Grafique las siguientes funciones. Determine el dominio, intersección con los ejes y las asíntotas.

a) $f(x) = \frac{(x^2-4)(x-3)}{x^2-x-6}$

b) $f(x) = \frac{x^3-2x^2}{x-2}$

c) $f(x) = \frac{-x^2+x+6}{(x+1)(x^2+1)}$

45. Dibuje la gráfica de la función escalón (o salto) unitario denotada por U y definida por:

$$U(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } 0 \leq x \end{cases}$$



46. Defina la siguiente función a trozos y dibuje su gráfica:

$$U(x - 1)$$

47. Encontrar el conjunto solución de las siguientes desigualdades:

a) $\frac{2x+1}{3x-6} \geq 3$

b) $\left| \frac{2x+1}{3x-6} \right| \geq 3$

48. Desigualdades.

a) $|x^2 - 1| \leq -(x + 1)$

b) $\frac{x^2-2x+1}{x^2-2x-3} \leq 0$

49. Funciones.

a) Para $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$ Determina y simplifica $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

b) Determine: a) $f + g$, b) $f - g$, c) fg , d) $\frac{f}{g}$, e) $f \circ g$, f) $g \circ f$, g) $f \circ f$, h) $g \circ g$ y calcula sus dominios si

$$f(x) = \tan x$$

$$g(x) = x^2 - 4x$$

50. A medida que el aire seco se mueve hacia arriba, aumenta su volumen y se enfría. Si la temperatura del suelo es de 20 °C y la temperatura a la altura de 1 km es de 10 °C, expresa la temperatura T , en °C; como función de la altura h , en km; suponiendo que es un modelo lineal.

a) ¿Cuál es la temperatura a una altura de 1.5 km?

b) Resolver la desigualdad

$$|x + 2| \leq 2|1 - x|$$

c) Determinar el dominio de la siguiente función

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 4}{x + 1}}$$

d) Elaborar un bosquejo de la siguiente función

$$g(x) = \frac{1 - 2x}{x + 3}$$

e) Elaborar un bosquejo de la siguiente función

$$g(x) = \frac{x^2 - 2x + 8}{x - 3}$$



51. Encuentre el dominio de la siguiente función:

$$f(t) = \sqrt{3-t} - \sqrt{2+t}$$

52. Encuentre el dominio y grafique la siguiente función

$$g(x) = \sqrt{|x| - 5}$$

53. Determine si f es par o impar o ninguna de las dos.

$$f(x) = x|x|$$

54. Grafique la función a mano, sin trazar puntos, sino empezando con la gráfica de una de las funciones esenciales y después aplicando las transformaciones apropiadas.

$$f(x) = |\sqrt{x} - 1|$$

55. Encuentre las funciones a) $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$ y $g \circ g$ y sus dominios, con

$$f(x) = x + \frac{1}{x}, \quad g(x) = \frac{x+1}{x+2}$$

56. Demostrar las siguientes identidades trigonométricas

a) $\frac{\tan(x) - \sin(x)}{\sin^3(x)} = \frac{\sec(x)}{1 + \cos(x)}$

b) $\tan(x) + \tan(y) = \tan(x) \tan(y) (\cot(x) + \cot(y))$

c) $\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4} + \sin(x) \cos(x)$

57. Resolver las siguientes ecuaciones

a) $\log_{\sqrt{2}}(x-3) + \log_{\sqrt{2}}(x+2) = 4 + \log_{\sqrt{2}}(x)$

b) $7(3)^{x+1} - 5^{x+2} = 3^{x+4} - 5^{x+3}$

58. Obtenga el valor de x que corresponde la solución de la inecuación $x + 5 < 3 - x < x - \pi$.

59. Determine el valor de x que corresponde la solución de $\frac{|2x-1|-x}{x-5} < 2$.

60. Bosqueje la gráfica de la función $f(x) = \frac{|x|+1}{x^2-1}$, siguiendo el procedimiento analítico de toda la información que incorpore simetría, punto de intersección en los ejes, dominio y asíntotas si existen.

61. Obtenga el valor de x que corresponde la solución de las siguiente inecuación: $|x+3| \leq |2x-6|$

62. Resolver la siguiente desigualdad: $||x-1| - 1| < 1$



63. Dada la función determinar si es inyectiva, sobreyectiva, biyectiva o ninguna y dar su dominio, rango y un bosquejo de su gráfica:

a) $f(x) = \sqrt{x^2 - 9} - 4$

b) $f(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 0 \\ x + 1, & 0 < x < 2 \\ x^2 - 1, & x \geq 2 \end{cases}$

64. Complete la tabla siguiente:

| $f(x)$ | $g(x)$ | $f(g(-3))$ | $f \circ g$ | $g \circ f$ |
|-------------------|-------------------|------------|-------------------|-------------|
| $4x - 5$ | $3x + 2$ | | | |
| $\frac{x-1}{x+2}$ | $\frac{x-2}{x+1}$ | | | |
| $2x^2 - 5$ | | | $2x^2 + 12x + 13$ | |
| | $3x - 2$ | | | $30x - 17$ |

65. Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $2\text{sen}(x) + 1 = 3 \text{csc}(x)$

b) $4^{x-1} + 2^{x+2} = 48$

66. Resolver la desigualdad.

a) $|x - 1| < 2|x - 3|$

b) $|3x + 1| \leq 2x + 2$

67. Hallar la amplitud, desplazamientos vertical y horizontal, periodo, punto inicial y grafique.

$$y = 4\text{sen}[4(x - 0,5)] + 3$$

68. Obtener la función inversa

$$y = \cos(3x + 7)$$

69. Hallar el dominio e imagen de la función, graficar.

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 1 & \text{para } x > 0 \\ 1 & \text{para } x = 0 \\ -x - 3 & \text{para } x < 0 \end{cases}$$

70. Dada la función \sqrt{x} , aplicar las transformaciones indicadas graficando. Desplazar la función 2 unidades a la izquierda, alargar verticalmente por un factor de 3 y reflejar en el eje x .



Unidad 2

1. Calcular el siguiente límite algebraico

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{1}{h\sqrt{1+h}} - \frac{1}{h} \right)$$

2. Calcular el siguiente límite

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{9x^6 - x}}{x^3 + 1}$$

3. Demuestre, mediante la definición $\epsilon - \delta$, que los siguientes límites existen:

a) $\lim_{x \rightarrow a} x^3 = a^3$
b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2} = 5$

4. Realice lo que se le pide a continuación:

a) Si $4x - 9 \leq f(x) \leq x^2 - 4x + 7$ para $x \geq 0$, encuentre $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$.
b) Explique por qué la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+2} & x \neq -2 \\ 1 & x = -2 \end{cases}$$

es continua en $x = -2$. Así mismo, dibuje la función.

5. Demuestre, mediante la definición $\epsilon - \delta$, que los siguientes límites existen:

a) $\lim_{x \rightarrow a} x^2 = a^2$
b) $\lim_{x \rightarrow 1.5} \frac{9 - 4x^2}{3 + 2x} = 6$

6. Realice lo que se le pide:

- a) Explique por qué la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2 - 5x - 3}{x - 3} & x \neq 3 \\ 6 & x = 3 \end{cases}$$

es continua en $x = 3$. Así mismo, dibuje la función.

- b) Encuentre los valores de a y b que hace a f continua para toda x

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2} & x < 2 \\ ax^2 - bx + 3 & 2 \leq x < 3 \\ 2x - a + b & x \geq 3 \end{cases}$$



7. Obtenga los siguientes límites de manera analítica.

- a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$
b) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{2 - x} - \frac{4}{4 - x^2} \right)$
c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{20x - 3}{\sqrt{4x^2 + 9}}$
d) $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(3t)\text{sen}(5t)}{t^2}$

8. Considere la siguiente función

$$h(x) = \begin{cases} x^3 - 3, & \text{si } x \leq 0 \\ x - 3, & \text{si } 0 < x \leq 2 \\ \frac{x-3}{x^2-9}, & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

- a) Determine si h es continua en $x = 0$ y en $x = 2$.
b) Determine todas las discontinuidades y clasifíquelas.
c) Determine si f es continua en el intervalo cerrado $[0, 2]$.

9. Calcular los siguientes límites utilizando métodos algebraicos

- a) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4}{\sqrt{x} - \sqrt{8 - x}}$
b) $\lim_{t \rightarrow 4^-} \left(\frac{2}{t^2 + 3t - 4} - \frac{3}{t + 4} \right)$
c) $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\cos 2\theta - \cos \theta}{\theta}$

10. Demostrar las proposiciones utilizando la definición $\epsilon - \delta$:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow a} \sqrt{x} = \sqrt{a}.$$

11. Determinar en qué puntos son continuas las funciones:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 6}{x - 3}, & x \neq 3, \\ 5, & x = 3, \end{cases} \quad y = \frac{1}{|x| + 1} - \frac{x^2}{2}.$$

12. Calcular los límites:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2} \cos x\right)}{\sin^2 x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\beta x}(e^{-ax} + \beta x - 1)}{x}.$$



13. Determinar para qué valores de b la función

$$g(x) = \begin{cases} x - b, & x < 0, \\ b + 1, & x = 0, \\ x^2 + b, & x > 0 \end{cases}$$

es continua para todo $x \in \mathbb{R}$.

14. Determinar en qué puntos son continuas las funciones:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}, & x \neq 2, x \neq -2, \\ 3, & x = 2, \\ 4, & x = -2, \end{cases} \quad y = |x - 1| + \sin x.$$

15. Calcular los límites:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{\pi}{2} \cos(\tan x)\right), \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{\sqrt[3]{x}}{2}\right)}{\sqrt[4]{x}}.$$

16. Determinar para qué valores de a y b la función

$$g(x) = \begin{cases} ax + 2b, & x \leq 0, \\ x^2 + 3a - b, & 0 < x \leq 2, \\ 3x - 5, & x > 2 \end{cases}$$

es continua para todo $x \in \mathbb{R}$.

17. Determinar si existe un número a tal que el límite exista; si existe, encontrar los valores de a y el límite:

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2 + ax + a + 3}{x^2 + x - 2}.$$

18. Calcular el límite:

$$\lim_{x \rightarrow 27} \frac{x - 27}{x^{1/3} - 3}.$$

19. Utilizando métodos algebraicos, calcular el límite trigonométrico:

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\cos(m\theta) - 1}{\theta^2}.$$

20. Calcular el límite:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(2\sqrt{x} - \sqrt{x+2}\right).$$



21. Encontrar el valor de las constantes a y b que hacen continua en todos los reales a la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} + 1, & x < -1, \\ x + 1, & -1 \leq x \leq 1, \\ -x^2 + ax + b, & -1 \leq x \leq 1, \\ \frac{x^3 - 1}{x - 1}, & x > 1. \end{cases}$$

22. Dibujar la gráfica de la función calculando dominio, rango, intersecciones con los ejes, simetría y asíntotas:

$$f(x) = \frac{2x^2}{x^2 - 4}.$$

23. Evaluar el límite usando la identidad $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ y $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x}.$$

24. De la función racional, encontrar las asíntotas horizontales, verticales y oblicuas, si las tiene:

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}.$$

25. Calcule los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{x-4}-2}{x-8}$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{12x+1}{\sqrt{9x^2+4}}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)(1-\cos x)}{x^2}$

26. Para la siguiente función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x^3+1} & \text{si } x \leq 1 \\ 3x-4 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- Determine todas las discontinuidades y clasifíquelas.
 - Escriba los intervalos abiertos donde la función es continua.
 - Determine si la función es continua en $[1, \infty)$.
27. Utilice el teorema de compresión para determinar el valor del siguiente límite.

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$



28. a) Halle todos los valores de c para los que el límite existe

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3x + c}{x - 1}$$

- b) ¿Para qué signo el límite existe y cuánto vale?

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \pm \frac{1}{x(x-1)}$$

29. a) Utilizando métodos algebraicos calcule el siguiente límite trigonométrico

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(3h) - 1}{\cos(2h) - 1}$$

- b) Calcule el siguiente límite

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{9x^3 + x} - x^{3/2} \right)$$

30. Hallar el valor de a y b que hace a f continua en todas partes

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 12}{x^2 - 9}, & \text{si } x < -3 \\ ax^2 + bx - 2, & \text{si } -3 \leq x \leq 1 \\ \frac{1 - x}{x^2 - 1}, & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

31. a) Calcular el siguiente límite algebraico

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + x}}$$

- b) Halle todos los valores de c para los que el límite existe. Luego, calcule el valor de dicho límite.

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{x^2 - 5x - 6}{x - c}$$

32. a) Calcular el siguiente límite en el infinito

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + ax} - \sqrt{x^2 + bx}$$

- b) Calcular el siguiente límite trigonométrico

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x) \sin(2x)}{x \sin(5x)}$$



33. Hallar el valor de a y b que hace a f continua en todas partes

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x+4}{12-3x^2}, & \text{si } x < -2 \\ ax^2 - bx + 3, & \text{si } -2 \leq x \leq 4 \\ \frac{x-4}{\sqrt{x}-\sqrt{8-x}}, & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

34. Evalúe el límite si existe. Si no existe, determine si los límites laterales existen (o son infinitos).

a)

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \right)$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(4x)}{\text{sen}(3x)}$$

c)

$$\lim_{x \rightarrow b} \frac{x^3 - b^3}{x - b}$$

35. Encuentre un valor de k , si existe, tal que la siguiente función sea continua en todo número real.

$$f(x) = \begin{cases} 9 - x^2, & x \geq 3 \\ k/x^2, & x < 3 \end{cases}$$

36. Calcule el valor de

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}{x}} + \frac{\csc 3x}{\cot x}$$

use algebra preliminares y técnicas de límites, NO regla de L'Hopital.

37. Encuentre

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\csc 2x}{\cot 2x} + \frac{\text{sen } 3x}{3x^2 + 2x} \right)$$

usando algebra preliminares y técnicas de límites; No regla de L'Hopital.



38. Calcule los límites siguientes, si estos existen. Si el límite no existe, explique por qué:

a) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\text{sen}(6x)}{3 \cos^2(x) - \text{sen}^2(x)}$

b) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \ln(x^2 - 9)$

además, muestre que:

$$\frac{d}{dx} f(g(x)) = \frac{df}{dg} \frac{dg}{dx}$$

mediante la definición de derivada.

39. ¿Para qué valores de la constante c la función f dada por:

$$f(x) = \begin{cases} cx^2 + 2x & x < 2 \\ x^3 - cx & x \geq 2 \end{cases}$$

es continua sobre $(-\infty, \infty)$?

40. Calcule los límites siguientes, si estos existen. Si el límite no existe, explique por qué:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} e^{-\beta x} \left(\frac{e^{-x+\beta x} - 1}{x} \right)$

b) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{|x|} \right)$

además, muestre que:

$$\frac{d}{dx} v(x) u(x) = v(x) \frac{du(x)}{dx} + u(x) \frac{dv(x)}{dx}$$

mediante la definición de derivada.

41. Encuentre los números en los que f dada por:

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & x < 0 \\ e^x & 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x & x > 1 \end{cases}$$

es discontinua. ¿En cuáles de estos números f es continua por la derecha, por la izquierda o por ninguna de las dos? Trace la gráfica de f .



42. Calcule los límites siguientes, si existen:

a)

$$\lim_{x \rightarrow -6} \frac{2x + 12}{x + 6}$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\sqrt{1 + 2\sqrt{x}})}{3\sqrt{x}}$$

c)

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{|\operatorname{sen}(2x)| + |\tan(2x)|}{|1 + \cos(2x)|}$$

43. Halla las asíntotas horizontales y verticales de la función siguiente y grafica la función.

$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{(x - 1)(x^2 - 4)}$$

44. Límites.

a) $\lim_{x \rightarrow 16} \frac{2\sqrt{x} + x^{3/2}}{\sqrt[4]{x} + 5}$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{6-x} - 2}{\sqrt{3-x} - 1}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+4} - \frac{1}{4}}{x}$

d) $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x+\Delta x)^3 - x^3}{\Delta x}$

e) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \tan(x)}{\sin(x) - \cos(x)}$

f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{2x^2}$

g) $\lim_{x \rightarrow \ln(2)} \frac{e^{3x} - 8}{e^{2x} - 4}$

45. Halle el valor de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\csc x}{\cot x} + \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}$ usando únicamente técnicas de límites y/o algebra preliminares; NO regla de L'Hopital.

46. Encuentre los valores de c y k para que la función

$$f(x) = \begin{cases} x + 2c & \text{si } x < -2 \\ 3cx + k & \text{si } -2 \leq x \leq 1 \\ 3x - 2k & \text{si } 1 < x \end{cases}$$

sea CONTINUA en todo \mathbb{R} ; y del cálculo analítico, bosqueje la función resultante.

47. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sec(x)}{x^2 \sec(x)}$

48. Calcular el siguiente límite: $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{3}} - a^{\frac{1}{3}}}$

49. Hallar los puntos máximos, mínimos relativos, puntos de inflexión y asíntota oblicua de la función $y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$.



50. Hallar las asíntotas verticales y horizontales de la función $f(x) = \sqrt{\frac{2x^2+1}{x-5}}$.

51. Hallar los límites:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(2x)}{\text{sen}(5x)}$

b) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{4x^2+x^6}{1-5x^8}$





Unidad 3

1. Encuentre los valores máximo y mínimo absoluto de f sobre el intervalo dado.

a) $f(x) = x + \frac{1}{x}$ para $x \in [0, 2, 4]$

b) $f(x) = xe^{-x^2/8}$ para $x \in [-1, 4]$

2. Considere a y como la variable independiente y a x como la variable dependiente y utilice la derivación implícita para calcular dx/dy de:

a) $x^4y^2 - x^3y + 2xy^3 = 0$

b) $y \sec(x) = x \tan(y)$

3. ¿En qué números son derivables las siguientes funciones?

a) $g(x) = \begin{cases} 2x & x \leq 0 \\ 2x - x^2 & 0 < x < 2 \\ 2 - x & x \geq 2 \end{cases}$

b) $h(x) = |x - 1| + |x + 2|$

así mismo, proporcione una fórmula para cada una de las derivadas y las gráficas, tanto de las funciones como de las derivadas.

4. Encuentre la derivada de cada una de las siguientes funciones aplicando la definición de derivada. Establezca los dominios de la función y su derivada.

a) $f(x) = x^2 - 2x^3$

b) $g(x) = \sqrt{9 - x}$

c) $g(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$

5. Encuentre los puntos críticos de $g(\theta) = 4\theta - \tan(\theta)$

6. Realice lo que se le pide:

a) Si $r(x) = f(g(h(x)))$, donde $h(1) = 2$, $g(2) = 3$, $h'(1) = 4$, $g'(2) = 5$ y $f'(3) = 6$, encuentre $r'(1)$

b) Si $F(x) = f(3f(4f(x)))$, donde $f(0) = 0$ y $f'(0) = 2$, encuentre $F'(0)$.

c) Si $F(x) = f(xf(xf(x)))$, donde $f(1) = 2$, $f(2) = 3$, $f'(1) = 4$, $f'(2) = 5$ y $f'(3) = 6$, Halle $F'(1)$.



7. Encuentre la derivada de cada una de las siguientes funciones aplicando la definición de derivada. Establezca los dominios de la función y su derivada.

a) $f(x) = \frac{x^2-1}{2x-3}$

b) $g(x) = x^n$

c) $g(t) = \frac{1-2t}{3+t}$

8. Encuentre la derivada por medio de la definición de la siguiente función.

$$f(x) = \frac{1}{x-5}$$

9. Utilice las reglas de derivación para encontrar la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \text{sen}(2x) \sqrt{\frac{\tan(3x) + 2x}{x^3 - 3x^2}}$

b) $\text{sen}(2x - y) = \frac{x^2}{y}$

10. Determine los valores a y b tales que la función f sea derivable en $x = 1$

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } x < 1 \\ ax + b, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

11. Sea $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 9}$, determine:

- Puntos críticos y máximos y mínimos locales.
 - Intervalos donde la función es creciente y decreciente.
 - Intervalos donde la función es convexa y cóncava.
 - Puntos de inflexión y asíntotas verticales y horizontales.
12. Un hombre de 1.6m de altura se aleja de un poste de luz de 5 m a una velocidad de 1.4m/s. Halle la rapidez con que su sombra aumenta de longitud.
13. Encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ en $x = 1$ si

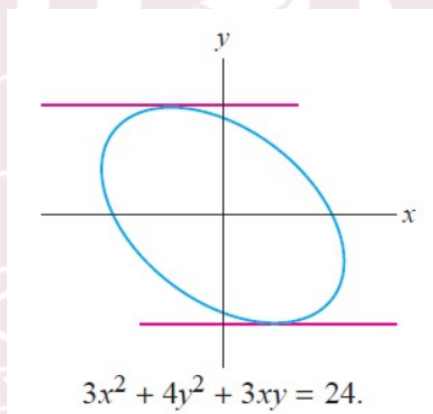
$$f(x) = \frac{1}{6} \ln(x^2 + 1) + \frac{1}{3} x^3 \arctan x - \frac{1}{6} x^2$$



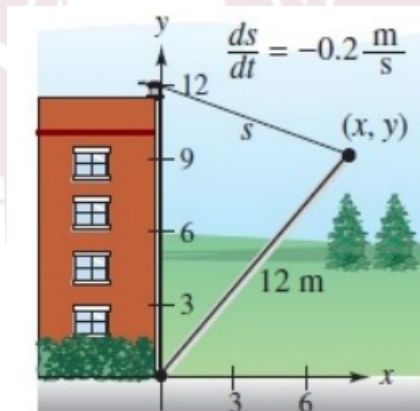
14. a) Encontrar la derivada de la siguiente función usando derivación logarítmica $y = \frac{e^{3x}(x-2)^2}{(x+1)^2}$.
- b) Verificar si la función $y = f(x)$ es una solución de la ecuación diferencial $y'' - 2y' + 5y = 0$.

$$y = e^x [3 \cos(2x) - 4 \sin(2x)]$$

15. Encuentre todos los puntos de la gráfica de $3x^2 + 4y^2 + 3xy = 24$ cuya recta tangente es horizontal (véase la figura).



16. Una polea situada en lo alto de un edificio de 12 metros levanta un tubo de la misma longitud hasta colocarlo en posición vertical, como se muestra en la figura. La polea recoge la cuerda a razón de $-0,2$ m/s. Calcular las razones de cambio vertical y horizontal del extremo del tubo cuando $y = 6$.

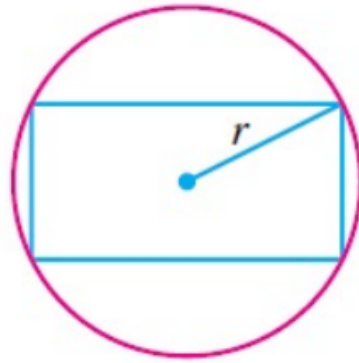


17. Analizar y dibujar la gráfica de la función calculando: dominio, simetría, intersecciones, asíntotas, extremos relativos, concavidad y puntos de inflexión.

$$f(x) = x(8-x)^{1/3}$$



18. Encuentre las dimensiones del rectángulo de área máxima que pueda inscribirse en un círculo de radio $r = 4$ (véase la figura).



19. La medición de la circunferencia de un círculo produce un valor de 56 cm, con un posible error de 1,2 cm.
- Aproximar el error absoluto, relativo y porcentual en el cálculo del área del círculo.
 - Estimar el máximo error porcentual permisible en la medición de la circunferencia si el error en el cálculo del área no excede el 3%.
20. Encuentre la derivada por medio de la definición de la siguiente función.

$$f(x) = \sqrt{x - 8}$$

21. Utilice las reglas de derivación para encontrar la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \cos\left(\sqrt{\frac{x^2 + 2}{2x - 5}}\right)$

b) $x^2 + \operatorname{sen} y = xy^2 + 1$

22. Determine si f es derivable en $x = 3$

$$f(x) = \begin{cases} 5 - 6x, & \text{si } x \leq 3 \\ -4 - x^2, & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

23. Sea $f(x) = x^4 - 4x^3$, determine:

- Puntos críticos y máximos y mínimos locales.
- Intervalos donde la función es creciente y decreciente.
- Intervalos donde la función es convexa y cóncava.
- Puntos de inflexión y asíntotas verticales y horizontales.



24. Un tubo flexible de 4m se dobla en forma de L. ¿Donde debe hacerse el pliegue para que la distancia entre los extremos sea mínima?

25. Hallar y simplificar la derivada de las siguientes funciones

$$y = 25 \arcsin\left(\frac{x}{5}\right) - x\sqrt{25 - x^2}, \quad y = \sqrt{\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}}$$

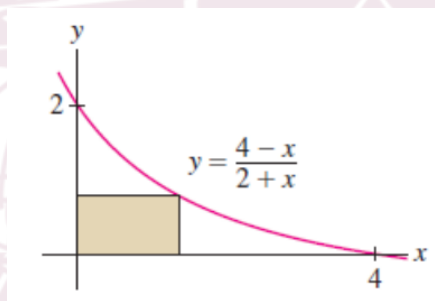
26. Encontrar la ecuación de la recta tangente a la función en el punto dado utilizando derivación implícita.

$$3(x^2 + y^2)^2 = 100(x^2 - y^2) \quad (4, 2)$$

27. Analizar y dibujar la gráfica de la función calculando: dominio y rango, simetría, intersecciones, asíntotas, extremos relativos, concavidad y puntos de inflexión.

$$f(x) = 18(x - 3)(x - 1)^{2/3}$$

28. Halle el área máxima del rectángulo inscrito en la región limitada por la gráfica de $y = \frac{4-x}{2+x}$ y los ejes (véase la figura).



29. Mediante la definición de derivada, mostrar que si g es derivable en x y f es derivable en $g(x)$, entonces la composición $y = f \circ g$ es derivable en x y:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}, \quad y = f(u), \quad u = g(x).$$

Además, calcular la derivada de $g(x) = \sqrt{9 - x}$ y calcular $\frac{d}{dx} [\tan x]$.

30. Hallar las ecuaciones de las dos rectas tangentes a la elipse

$$x^2 + 4y^2 = 36$$

que pasan por el punto $(12, 3)$.

31. Utilizar la aproximación lineal para estimar:

$$\sqrt[3]{1001}.$$

32. Mediante la definición de derivada, mostrar que si g y f son funciones derivables, entonces:

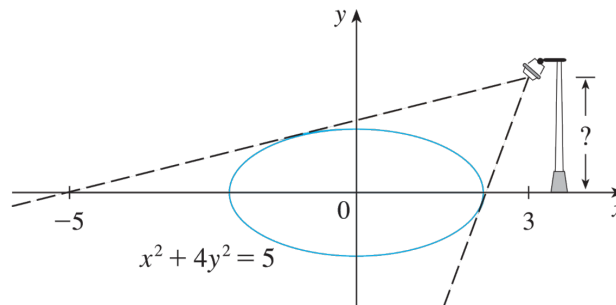
$$\frac{d}{dx} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{g(x) \frac{d}{dx} [f(x)] - f(x) \frac{d}{dx} [g(x)]}{[g(x)]^2}.$$

Además, calcular la derivada de

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{2x - 3}$$

y calcular $\frac{d}{dx} [\sin x]$.

33. En la figura se muestra una lámpara colocada tres unidades hacia la derecha del eje y , y una sombra creada por la región elíptica $x^2 + 4y^2 \leq 5$. Si el punto $(-5, 0)$ está en el borde de la sombra, determinar qué tan arriba del eje x está colocada la lámpara.



34. Utilizar la aproximación lineal para estimar:

$$e^{-0,015}.$$

35. Para la función

$$2 \cos \theta + \cos^2 \theta, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

encontrar los intervalos donde crece o decrece, los máximos y mínimos locales, los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión.

36. Encontrar los valores de x en los que las rectas tangentes a

$$y = 2x^3 + 1 \quad \text{y} \quad y = x^2 + 4x$$

sean paralelas.

37. Encontrar la derivada de la función, simplificando el resultado a su mínima expresión:

$$y = \frac{1}{2} \left[x\sqrt{4-x^2} + 4 \arcsin \left(\frac{x}{2} \right) \right].$$

38. Mostrar que el polinomio cúbico $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tiene exactamente un punto de inflexión (x_0, y_0) , donde:

$$x_0 = -\frac{b}{3a}, \quad y_0 = \frac{2b^3}{27a^2} - \frac{bc}{3a} + d.$$

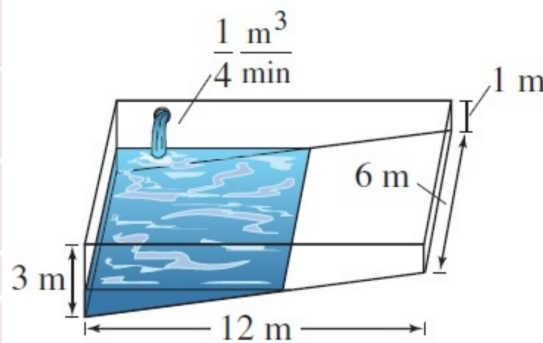
Utilizar esta fórmula para determinar el punto de inflexión de $p(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.

39. Encontrar todos los puntos de la gráfica de la ecuación

$$y^4 + 1 = y^2 + x^2$$

en los que la recta tangente sea vertical.

40. Una piscina tiene 12 metros de largo, 6 de ancho y una profundidad que oscila desde 1 hasta 3 m. Se bombea agua a razón de $\frac{1}{4} \text{ m}^3/\text{min}$ y ya hay 1 m de agua en el extremo más profundo. Determinar qué porcentaje de la piscina está lleno y a qué razón se eleva el nivel del agua.

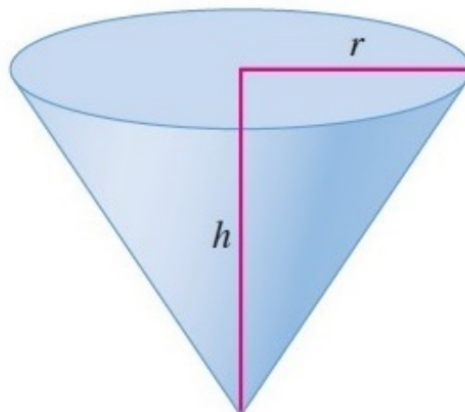


Problema 4

41. Analizar y dibujar la gráfica de la función calculando dominio, simetría, intersecciones, asíntotas, extremos relativos, concavidad y puntos de inflexión:

$$y = 3(x - 1)^{2/3} - (x - 1)^2.$$

42. El volumen de un cono circular recto es $V = \frac{\pi}{3} r^2 h$ y su área es $S = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}$. Hallar las dimensiones del cono con área 1, es decir $S = 1$, y máximo volumen.





43. La dosis D , en miligramos, de difenhidramina para un perro de masa corporal m , en kg, es:

$$D = 4,7m^{2/3} \text{ mg.}$$

Estimar el máximo error admisible en m , para un Cocker Spaniel de masa $m = 10$ kg, si el porcentaje de error en la dosis D no puede superar el 3 %.

44. Un globo es inflado a razón de 4,5 pies cúbicos por minuto. Calcular la razón de cambio del radio del globo cuando el radio es de 2 pies, considerando que el globo es esférico.
45. Graficar la función dentro del dominio $[0, 2\pi]$ y usar la prueba de la segunda derivada para obtener los extremos relativos:

$$f(x) = 2 \cos x - \cos(2x).$$

46. Evaluar el límite de la forma indeterminada aplicando la regla de L'Hopital:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{x}\right)^{2x}.$$

47. Use la definición para calcular $f'(x_0)$.

$$f(x) = x^2 - 3x \quad x_0 = 2$$

48. Utilice las reglas de derivación para encontrar la derivada de las siguientes funciones:

a)

$$f(x) = e^{-5x} \sqrt{\frac{\tan x}{\cos x - 4}}$$

b)

$$f(x) = x^{5x}$$

49. Halle una ecuación de la recta tangente a la curva en el punto que se indica.

$$xy + x^2y^2 = 5 \quad (2, 1)$$

50. Calcule la derivada de la siguiente función

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } x < -1 \\ -1 - 2x, & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$$



51. Sea $f(x) = x^3 - 2x^2$, determine:

- puntos críticos.
- máximos y mínimos locales.
- intervalos donde la función es creciente y decreciente.
- intervalos donde la función es convexa y cóncava.
- puntos de inflexión.
- Bosquejo de la gráfica.

52. Un hilo de alambre de $12m$ se corta en dos trozos y con los trozos se forma un cuadrado y un círculo. Como debe cortarse el alambre de manera que la suma de las áreas sea mínima.

53. Una escalera de $7m$ de longitud está apoyada sobre una pared. Si la base de la escalera se empuja horizontalmente hacia la pared a una tasa de $1,5m/s$. Qué tan rápido se desliza hacia arriba la parte superior de la escalera sobre la pared cuando su base se encuentra a $2m$ de la pared?

54. Encuentre el valor de k tal que la recta sea tangente a la gráfica de la función.

$$f(x) = k\sqrt{x}, \quad y = x + 4$$

55. Use la definición de derivada para encontrar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de en $x = -1$.

$$f(x) = \frac{1-x}{2+x}$$

56. Encuentre la derivada de la siguiente función, simplificando el resultado a su mínima expresión.

$$y = \frac{\sqrt{x^2 + 4}}{2x^2} - \frac{1}{4} \ln \left(\frac{2 + \sqrt{x^2 + 4}}{x} \right).$$

57. a) Demuestre que cualquier función de la forma $y = A \sinh(mx) + B \cosh(mx)$ cumple con la ecuación diferencial $y'' = m^2y$.

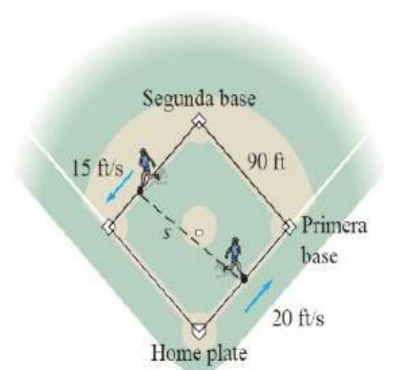
b) Recuerde que $\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ y que $\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$. Determine $y = y(x)$ tal que $y'' = 9y$,

$$y(0) = -4 \quad y'(0) = 6.$$

58. Pruebe, derivando la ecuación, que si la recta tangente a un punto (x, y) de la curva $x^2y - 2x + 8y = 2$ es horizontal, entonces $y = 1/x$. A continuación, sustituya este resultado en la expresión original para encontrar los puntos de la curva $x^2y - 2x + 8y = 2$ cuya recta tangente es horizontal.



59. El jugador 1 corre hacia la primera base a una velocidad de 20 ft/s , mientras que el jugador 2 corre desde la segunda base hacia la tercera a una velocidad de 15 ft/s . Si la distancia entre los dos jugadores es s . ¿Con qué rapidez está cambiando s cuando el jugador 1 está a 30 ft del home plate y el jugador 2 está a 60 ft de la segunda base?



Problema 4

60. Analizar y dibujar la gráfica de la función calculando: dominio, simetría, intersecciones, asíntotas, extremos relativos, concavidad y puntos de inflexión.

$$y = 1 - \frac{3}{x} + \frac{4}{x^3}$$

61. Una caja de 72 m^3 de volumen, con base cuadrada y sin tapa se construye a partir de dos materiales diferentes. El coste de la base es de $\$40/\text{m}^2$ y el coste de los lados es de $\$30/\text{m}^2$. Halle las dimensiones de la caja que minimizan el coste total.
62. Se encuentra que la medición de un lado de un triángulo rectángulo es igual a $9,5 \text{ cm}$ y el ángulo opuesto a ese lado es de $26,75^\circ$ con un posible error de $0,25^\circ$.

(Sugerencia: Trabaje los ángulos en radianes y no en grados)

- Aproximar el error absoluto, relativo y porcentual en el cálculo de la longitud de la hipotenusa.
- Estimar el máximo error porcentual permisible en la medición del ángulo si el error en el cálculo de la longitud de la hipotenusa no puede ser mayor a 2% .



63. Encuentre la derivada de la siguiente función, simplificando el resultado a su mínima expresión.

$$y = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} + \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

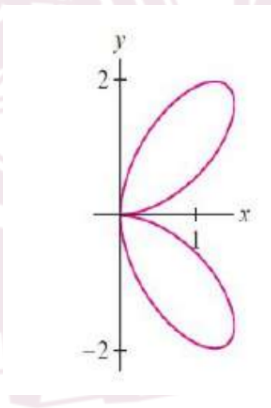
64. Mediante los principios de la física se puede demostrar que cuando un cable cuelga entre dos postes toma la forma de una curva $y = f(x)$ que cumple con la ecuación diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\rho g}{T} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$

donde ρ es la densidad lineal del cable, g es la aceleración de la gravedad y T es la tensión del cable en su punto más bajo. El sistema coordenado se elige en forma adecuada. Recordando que $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$, compruebe que la siguiente función es una solución de esta ecuación diferencial.

$$y = f(x) = \frac{T}{\rho g} \cosh\left(\frac{\rho g x}{T}\right)$$

65. Halle los 4 puntos del folium $(x^2 + y^2)^2 = \frac{25}{4}xy^2$ para los cuales $x = 1$. Después, calcule la pendiente de la recta tangente a la curva en esos puntos.



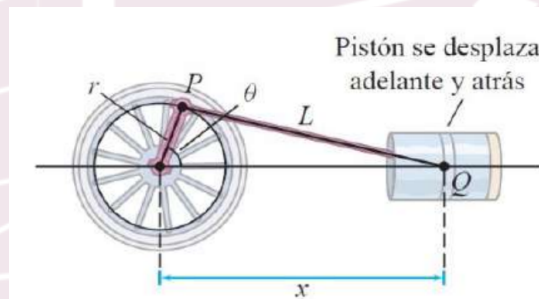
66. Cuando la rueda de radio r cm de la figura 4 está girando, la varilla de longitud L unida al punto P impulsa un pistón adelante y atrás en línea recta. Sea x la distancia del origen al punto Q donde acaba la varilla, tal y como se muestra en la figura.

a) Use el teorema de Pitágoras para demostrar que:

$$L^2 = (x - r \cos \theta)^2 + r^2 \sin^2 \theta.$$

b) Derive la ecuación anterior con respecto a t .

c) Calcule la velocidad del pistón cuando $\theta = \frac{\pi}{2}$, suponiendo que $r = 10\text{cm}$, $L = 30\text{cm}$ y que la rueda gira a 4 revoluciones por minuto.



67. Halle las dimensiones de un cilindro de volumen 1 m^3 de coste mínimo, si la parte superior e inferior están realizadas con un material que cuesta dos veces más que el material utilizado para el lado.

68. Suponga que no tiene una fórmula para $g(x)$ pero sabe que $g(2) = -4$ y $g'(x) = \sqrt{x^2 + 5}$ para toda x . Use diferenciales para estimar $g(1,95)$ y $g(2,05)$.

69. Use la definición para calcular $f'(a)$ y encuentre la ecuación de la recta tangente en $a = 3$ para la función

$$f(t) = \sqrt{t^2 + 1}$$

70. Encuentre la derivada de las siguientes funciones, simplificando a su mínima expresión.

a)

$$h(z) = \left(z + (z + 1)^{1/2} \right)^{-3/2}$$

b)

$$y = \frac{1}{(1 - x)\sqrt{2 - x}}$$



71. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva

$$e^{2x-y} = \frac{x^2}{y}$$

en el punto (2, 4).

72. Encuentre los intervalos en los cuales la función

$$f(x) = \frac{1}{x^4 + 1}$$

es creciente o decreciente, cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo y los máximos o mínimos locales.

73. Pruebe que si deriva a ambos lados de $x^2 + 2y^3 = 6$, el resultado es

$$2x + 6y^2 \frac{dy}{dx} = 0$$

A continuación, despeje $\frac{dy}{dx}$ y evalúe esta derivada en el punto (2, 1).

74. Determine en ambos problemas los intervalos de concavidad/convexidad de la función y halle los puntos de inflexión.

$$y = x^2 - 4x + 3, \quad y = \frac{1}{x^2 + 3}$$

75. Calcule la tasa de variación de la velocidad de escape respecto a la distancia r al centro de la Tierra.

$$v_{esc} = (2,82 \times 10^7) r^{-1/2} \text{ m/s}$$

76. De la siguiente función, dibuje su gráfica y determine su asíntota oblicua:

$$y = \frac{x^2}{x + 2}$$

77. Halle el punto sobre la recta $f(x) = x$ mas cercano al punto P . Tip: Minimiza el cuadrado de la distancia.

$$y = x, \quad P = (1, 0)$$

78. Determine la derivada

$$e^{xy} = x^{\operatorname{sen} x} \ln(\cos x).$$



79. Utilice la definición de la derivada y obtenga la ecuación de la recta normal a la curva

$$y = \frac{8x}{x^2 + 3}$$

en el punto (3, 2).

80. Una persona de 6 *ft* de estatura camina hacia un edificio a una tasa de $5 \frac{ft}{s}$. Si hay una lámpara en el piso a 50 *ft* del edificio, ¿qué tan rápido disminuye la sombra de la persona proyectada en el edificio cuando la persona está a 30 *ft* del edificio?

81. Bosquee la gráfica de la función

$$f(x) = \begin{cases} \text{sen } x & \text{si } 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ \text{sen} \left(x - \frac{\pi}{2} \right) & \text{si } \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi \end{cases}$$

siguiendo el procedimiento analítico de toda la información que incorpore dominio, simetría, punto de intersección en los ejes, asíntotas, números críticos, puntos de inflexión y sus propiedades al concluir toda información en una tabla que confirme sus estimaciones.

82. Con la definición de la derivada, halle la ecuación de la recta normal a la curva

$$y = x^3 - 3x$$

que sea paralela a la recta $2x + 18y - 9 = 0$.

83. Resuelve aplicando las técnicas de la derivadas a la ecuación

$$y^{\cos y} \sqrt{y} = x^{\cos x} \sqrt{x}$$

y halle y' .

84. Demuestre por derivación implícita que la recta tangente a la elipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

en el punto (x_0, y_0) es

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$$

85. a) Si desplazamos la curva a la izquierda, ¿qué sucede con su reflexión sobre la recta $y = x$?. En vista de este principio geométrico, encuentre una expresión para la inversa de $g(x) = f(x + c)$, donde f es una función uno a uno.

b) Encuentre una expresión para la inversa de $h(x) = f(cx)$, donde $c \neq 0$.



86. Sea $f(x)$ dado por:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$$

- Encuentre las asíntotas verticales, horizontales y oblicuas (si las hay).
- Halle los intervalos donde crece o decrece.
- Busque los valores máximos y mínimos locales.
- Encuentre los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión.
- Utilice la información de los incisos a) – d) para esbozar la gráfica de f .

87. Sea $f(x)$ dado por:

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 4}$$

- Encuentre las asíntotas verticales, horizontales y oblicuas (si las hay).
- Halle los intervalos donde crece o decrece.
- Busque los valores máximos y mínimos locales.
- Encuentre los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión.
- Utilice la información de los incisos a) – d) para esbozar la gráfica de f .

88. Para la función:

$$\cos^2(x) - 2 \operatorname{sen}(x)$$

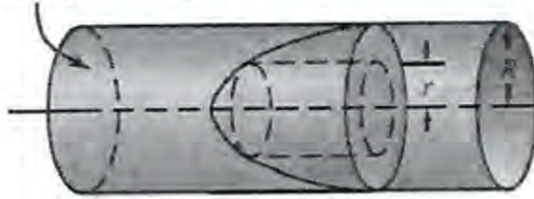
con $0 \leq x \leq 2\pi$. Encuentre:

- los intervalos donde crece o decrece la función.
- Los valores máximos y mínimos locales.
- Los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión.

89. Se producirá una caja, abierta por la parte superior, de una pieza cuadrada de cartón cortando un cuadrado de cada esquina y doblando los lados. Dado que la pieza de cartón mide L unidades por lado, encuentre las dimensiones de la caja con que se obtiene el volumen máximo. ¿Cuál es el volumen máximo?

90. El físico francés Jean Louis Poiseuille descubrió que la velocidad $v(r)$ en cm/s del flujo sanguíneo que circula por una arteria con sección transversal de radio R está dada por $v(r) = \frac{P}{4vl}(R^2 - r^2)$ donde P, v, l son constantes positivas.
- Determine el intervalo cerrado sobre el que está definida v .
 - Determine las velocidades máxima y mínima del flujo sanguíneo.

Sección transversal circular



91. Use criterio de la primera o segunda derivada para graficar las siguientes funciones.

a) $f(x) = x^{2/3}(6 - x)^{1/3}$

b) $f(x) = e^{1/x}$

92. Usando la definición deriva

$$f(x) = \frac{1}{(x - 2)^2}$$

93. La derivada de la función

$$f(x) = \frac{a - x^2}{(b - x^2)(x^2 - 1)}$$

94. Obtenga la derivada de $y^y \sqrt{y} = x^x \sqrt{x}$.

95. Halle y' de $x^2 \cos y + \sin 2y = xy$.

96. Calcule las ecuaciones de las tangentes y la normal a la curva $x + y = \sqrt{x^2 + y}$ en el punto $(3, 7)$.

97. Demuestre que $y = \cos 2x + \sin 2x$ es solución de la ecuación diferencial $y'' + 4y = 0$.

98. Bosqueje la gráfica de la función $f(x) = 3x^5 + 5x^3$, determinando de forma analítica toda la información que incorpore dominio, simetría, punto de intersección en los ejes, asíntotas, números críticos, puntos de inflexión y sus propiedades si existe e incorpore al concluir toda información en una tabla que confirme sus estimaciones.



99. Una escalera de 25 pies de longitud está apoyada sobre una pared vertical. Su base se desliza a razón de 2 pies por segundo.

- ¿A qué ritmo está bajando su extremo superior por la pared cuando la base está a 7 pies de la pared?
- Determinar el ritmo al que cambia el área del triángulo formado por la escalera, el suelo y la pared, cuando la base de la primera está a 7 pies de la pared.
- Calcular el ritmo de cambio del ángulo formado por la escalera y la pared cuando la base está a 7 pies de la pared.
- Calcular la aceleración del extremo superior de la escalera cuando su base está a 7 pies de la pared.

100. Utilizando el método de Newton encontrar al menos una de las raíces de la siguiente función con un épsilon de 10^{-3} : $f(x) = x - \sin(x + 1)$

101. Derivar implícitamente $x^y \operatorname{sh}(x - y^2) \ln(y^3 x^3) = 0$.

102. Hallar la tasa de variación media de la siguiente función en el intervalo indicado:

$$f(x) = \frac{5x + 3}{x - 1}, \text{ en } [2, 2 + h]$$

103. Hallar las siguientes derivadas:

- $h(t) = \frac{\operatorname{senh}(t)}{t+1}$
- $f(x) = \ln(x^{-4} + x^4)$
- $x^2 \tan(y) + y^3 \sec(x) = 7x$
- $f(x) = [\arccos(3x - 4)]^4$

104. Calcular la ecuación de la recta tangente de la función $f(x) = \sqrt{2x - 1}$ en el punto $x = 5$.

105. Hallar los valores extremos de la función $y = 2 + \sqrt{x + 3}$.

106. Obtener las siguientes derivadas:

- $x^4 y^5 + 4x = 5y^2 + 16$
- $y = \sec(\sqrt{5x} - 4)$

107. Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los valores extremos de la función $f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2 - 1}$.



Unidad 4

1. a) Evaluar la siguiente integral con dos cambios de variable diferentes: i) $u = \sin x$ y ii) $u = \cos x$. ¿Cuál resultó ser mejor opción?

$$\int \sin x \cos^2 x dx$$

- b) Evalúe la siguiente integral utilizando integración por partes, cambio de variable o ambas si es necesario.

$$\int \sqrt{x} e^{\sqrt{x}} dx$$

2. a) Calcule la siguiente integral trigonométrica

$$\int_0^{\pi/2} \sin^5 x dx$$

- b) Utilice el método de sustitución trigonométrica para probar que

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 4x + 8}} = \ln |\sqrt{(x-2)^2 + 4} + x - 2| + C$$

3. Encontrar la integral usando cada método.

$$\int x \sqrt{4+x} dx$$

- a) Sustitución trigonométrica
- b) Sustitución $u^2 = 4 + x$
- c) Sustitución $u = 4 + x$
- d) Integración por partes $dv = \sqrt{4+x} dx$

4. Encuentre las siguientes integrales por el método indicado.

- a) $\int (3x^2 + 1)e^{3x} dx$ (Método de integración por partes)
- b) $\int_2^3 \frac{dx}{(x^2 - 1)^{3/2}}$ (Método de sustitución trigonométrica)
- c) $\int \frac{dx}{(x-4)(x-1)(x+3)}$ (Método de Fracciones Parciales)
- d) $\int_0^1 \frac{x}{(x^2 + 1)^3} dx$ (Método de Sustitución)



5. Encuentre las siguientes integrales por el método indicado.

a) $\int_0^1 \frac{xe^x}{(1+x)^2} dx$ (Método de integración por partes)

b) $\int_0^{2\pi} \text{sen}^2 x \cos^2 x dx$

c) $\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{36-x^2}} dx$ (Método de sustitución trigonométrica)

d) $\int \frac{10}{(x-1)(x^2+9)} dx$ (Método de Fracciones Parciales)

e) $\int_1^2 x\sqrt{x-1} dx$ (Método de Sustitución)

6. Hallar las integrales que se presentan a continuación utilizando los siguientes métodos: cambio de variable, integración por partes y fracciones parciales.

a) $\int_1^6 \frac{2x-1}{\sqrt{x+3}} dx$

b) $\int_1^2 \frac{x+1}{x(x^2+1)} dx$

c) $\int x^3 \ln(x) dx$

7. Mostrar que:

$$\int \frac{dv}{\sqrt{v^2+a^2}} = \ln(v + \sqrt{v^2+a^2}) + C.$$

8. Mostrar que:

$$\int \sqrt{v^2+a^2} dv = \frac{v}{2}\sqrt{v^2+a^2} + \frac{a^2}{2} \ln(v + \sqrt{v^2+a^2}) + C.$$

9. Utilizar el método de fracciones parciales para resolver:

$$\int \frac{e^x}{(e^{2x}+1)(e^x-1)} dx.$$



10. Encuentre las siguientes integrales.

a) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{9-x^2}}$

b) $\int \frac{6x^2+7x-6}{(x-2)(x+2)^2} dx$

c) $\int \frac{(\ln x)^2}{x^2} dx$

11. Resuelva las siguientes integrales por el método indicado

a) $\int x^{-2} \tan^{-1} x dx$ (integración por partes)

b) $\int x^2 (\ln x)^2 dx$ (integración por partes)

c) $\int \frac{dt}{(t-3)^2(t+4)}$ (fracciones parciales)

d) $\int \frac{dx}{x^{3/2} + ax^{1/2}}, a > 0$ (sustitución)

e) $\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}-1}}$ (sustitución)

12. Usando un Método adecuado calcule la integral dada.

$$\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{1-e^x}} dx$$

13. Aplique el método más adecuado en la respuesta de las integrales siguientes:

a) $\int \frac{1}{\sec x (1 + \sen^2 x)} dx$

b) $\int_0^1 \frac{\sqrt{16-e^{2x}}}{e^x} dx$

14. Obtenga la integral indefinida

$$\int \csc^3 3t dt,$$

según el método más conveniente.



15. Muestre que:

$$\int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln \left(x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right) + C$$

16. Haga una sustitución para expresar el integrando como una función racional y después evalúe la integral de:

$$\int \frac{\sqrt{1 + \sqrt{x}}}{x} dx$$

Sustitución trigonométrica

17. $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{4-x^2}}$

18. $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2+1}}$

19. $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} dx$

Por partes

20. $\int e^x x^2 dx$

21. $\int x^2 \sin x dx$

Fraciones parciales

22. $\int \frac{9x^2-16x+4}{x(x-1)(x-2)} dx$

23. $\int \frac{x^2-x+4}{(x-1)^2(x-2)} dx$

24. $\int \frac{5x^2+20x+6}{x(x+1)^2} dx$

25. $\int t \arctan(t) dt$

26. $\int \frac{dx}{\sqrt{16+6x-x^2}}$

27. $\int \frac{2x+21}{2x^2+9x-5} dx$

28. $\int \frac{\text{sen} \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$

29. $\int \frac{ax dx}{x^4+b^4}$

30. $\int \sqrt{10-4x+4x^2} dx$

31. $\int \frac{\cos^5(t)}{\sqrt[3]{\text{sen}(t)}} dt$



32. $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-9}}$

33. $\int \text{sen}^4(ax)dx$

34. Hallar la integral

$$\int \frac{x^2 + 1}{x(x^2 - 2)} dx$$

35. Hallar la integral

$$\int e^x \text{sen}(x) dx$$

36. Hallar la integral, dibujar el triángulo rectángulo.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2}}$$

37. Hallar la integral.

$$\int \frac{1}{2x^2 + 3x + 4} dx$$

38. Hallar la integral.

$$\int \cot^3 x dx$$

39. Hallar las integrales:

a) $\int x e^{5x} dx$

b) $\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}} dx$

c) $\int \frac{2x+10}{x^2-x-6} dx$



Unidad 5

1. Calcule la siguiente integral definida por medio del límite de una suma de Riemann.

$$\int_{-1}^3 (-4x^2 + 7x) dx$$

2. Dibuje la región limitada por las curvas, y calcule su área como una integral.

$$y = 2\sqrt{x}, \quad y = x.$$

3. Dibuje la región limitada por las curvas y halle el volumen del sólido obtenido mediante rotación de la región, respecto al eje $x = -1$.

$$y = x^2 + 1, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 2$$

4. Calcule la siguiente integral definida por medio del límite de una suma de Riemann.

$$\int_{-1}^2 (5x^2 - 2x + 7) dx$$

5. Dibuje la región limitada por las curvas, y calcule su área como una integral.

$$y = -3x, \quad y = -x^2 + 4.$$

6. Dibuje la región limitada por las curvas y halle el volumen del sólido obtenido mediante rotación de la región, respecto al eje $y = -1$.

$$y = 2\sqrt{x}, \quad y = x.$$

7. Demostrar, mediante sumas de Riemann, que:

$$\int_a^b x^2 dx = \frac{b^3 - a^3}{3}.$$

8. Aplicar las propiedades de la integral para verificar la desigualdad sin realizar la integral:

$$\int_0^4 (x^2 - 4x + 4) dx \geq 0.$$

9. Realizar la integral:

$$\int_0^\pi \sec^2 x dx.$$

10. Encontrar $g'(x)$, cuando:

$$g(x) = \int_x^\pi \sqrt{1 + \sec t} dt.$$



11. Evaluar la integral:

$$\int_{-1}^1 |3x - 2x| dx.$$

12. Demostrar, mediante sumas de Riemann, que:

$$\int_0^b x^2 dx = \frac{b^3}{3}.$$

13. Aplicar las propiedades de las integrales para verificar la desigualdad sin realizar la integral:

$$2 \leq \int_{-1}^1 \sqrt{1+x^2} dx \leq 2\sqrt{2}.$$

14. Realizar la integral:

$$\int_{\pi/3}^{\pi} \sec \theta \tan \theta d\theta.$$

15. Encontrar $g'(x)$, cuando:

$$g(x) = \int_1^{\sqrt{x}} \frac{z^2}{z^4 + 1} dz.$$

16. Evaluar la integral:

$$\int_0^{\pi/2} |\sin x - \cos(2x)| dx.$$

17. Encontrar el área acotada por las curvas e integrar respecto a la variable adecuada:

$$y^2 = 1 - x, \quad 2y = x + 2.$$

18. Utilizando el método de disco, determinar el volumen de una esfera de radio a :

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}, \quad V = \int_a^b \pi [f(x)]^2 dx.$$

19. Encontrar el área S de la superficie que se forma al girar la curva alrededor del eje x , en el intervalo $[1, 4]$:

$$y = \sqrt{x}, \quad S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

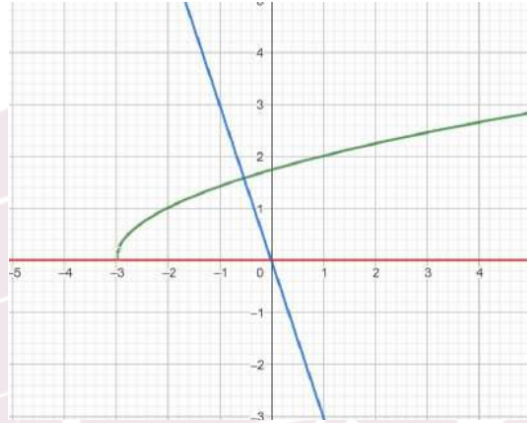
20. Evaluar la integral impropia con una discontinuidad infinita:

$$\int_0^e \ln x dx.$$

21. Dibuje la región limitada por las curvas: $y = 8 - 3x$, $y = 6 - x$ y $y = 2$, luego calcule su área como una integral con respecto a x .



22. Considere la región limitada por las curvas $y = \sqrt{x+3}$, $y = -3x$ y $y = 0$.



- Utilice el método de discos para hallar el volumen de revolución respecto al eje x de la región descrita arriba.
- Utilice el método de capas cilíndricas para hallar el volumen de revolución respecto al eje x de la región descrita arriba.

23. Evalúe las siguientes integrales definidas

a)

$$\int_{-3}^3 |x^2 - 4| dx$$

b)

$$\int_0^{\ln 3} e^{x-e^x} dx$$

24. Encuentre el área de la región encerrada por las gráficas de las siguientes funciones

a)

$$y = 2 - x^2, \quad y = x$$

b)

$$x = y^2 - 9, \quad x = 15 - 2y$$

25. Determine el área exacta de la región limitada por el trapecio cuyos vértices son $(-3, 4)$, $(-1, -3)$, $(3, 4)$ y $(8, -3)$.

26. Obtenga el volumen del sólido de revolución generado si la región acotada $[0, \pi]$ por un arco de la curva senoidal se gira alrededor del eje X .

27. Determine el área de la superficie de revolución generada al girar el arco de la catenaria

$$y = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$$

desde $x = 0$ hasta $x = a$ al girar alrededor del eje X .



28. Considere $y \geq 0$ y determine el área de la superficie de revolución generada al lazo de la curva descrita a continuación, girando alrededor del eje X .

$$18y^2 = x(6 - x)^2$$

29. Calcule el área encerrada por la región delimitada por:

$$y = \cos(x), \quad y = 2 - \cos(x), \quad 0 \leq x \leq 2\pi$$

30. Encuentre el volumen del sólido obtenido al hacer girar la región delimitada por las curvas descritas a continuación, alrededor del eje x

$$y = 1 - x^2, \quad y = 0$$

31. Evalúe la siguiente integral:

$$\int_0^{\pi/2} |\operatorname{sen}(x) - \cos(2x)| dx$$

32. Encuentre el volumen del sólido obtenido al hacer girar la región delimitada por las curvas descritas a continuación, alrededor del eje y .

$$x = 2\sqrt{y}, \quad x = 0, \quad y = 9$$

33. Evalúe la siguiente integral:

$$\int_0^{3/4} \frac{\sin(\sqrt{1-x})}{\sqrt{1-x}} dx$$

34. Evalúe la siguiente integral:

$$\int x^2 \arcsen(x) dx$$

35. Hallar el área de la región acotada por las funciones $f(x) = x^2 + 1$ y $g(x) = \sqrt{x} + 1$. Graficar las funciones y resaltar la región a calcular.