CÁLCULO MULTIVARIABLE

Unidad 1

1. Usar métodos vectoriales para probar que las diagonales de un paralelogramo se bisecan entre sí.

2. Usar notación de conjuntos o vectorial para describir los puntos de la recta que pasa por $(-1,-1,-1)$ en la dirección de $\hat{j}$.

3. Hallar los puntos de intersección de la recta $x = 3 + 2t$, $y = 7 + 8t$ y $z = -2 + t$, esto es $\vec{l}(t) = (3 + 2t, 7 + 8t, -2 + t)$, con los planos coordenados.

4. Calcular $\vec{u} \cdot \vec{v}$, donde $\vec{u} = \sqrt{5}\hat{\imath} - \sqrt{2}\hat{\jmath} + \sqrt{2}\hat{k}$ y $\vec{v} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$.

5. Hallar una ecuación del plano que:

   a) pasa por $(3, 2, -1)$ y $(1, -1, 2)$; y es paralelo a la recta $v = (1, -1, 0) + t(3, 2, -2)$

   b) es perpendicular a la recta $l(t) = (-1, -2, 3)t + (0, 7, 1)$ y pasa por $(2, 4, -1)$

6. Calcular $a\cdot(b\times c)$, donde a y b son: $a = i-2j+k$, $b = 2i+j+k$ y $c = 3i-j+2k$. Así como hallar el área del paralelepípedo que tiene como lados a los vectores antes mencionados.

7. Calcule $\|\vec{u}\|$, $\|\vec{v}\|$ y $\vec{u} \cdot \vec{v}$ cuando: $\vec{u} = (-1, 2, 0)$ y $\vec{v} = (1, -1, 0)$; $\vec{u} = (-1, 3, 1)$ y $\vec{v} = (-2, -3, -7)$.

8. ¿Cuál es el volumen de paralelepípedo con aristas $-\sqrt{3}\hat{\imath} + e^4\hat{\jmath} + \sqrt{5}\hat{k}$ y $-\sqrt{5}\hat{\imath} + \frac{\pi}{2}\hat{\jmath} + \sqrt{3}\hat{k}$.

9. Mostrar que en coordenadas esféricas que:

   a) $\phi = \cos^{-1}(v \cdot k/\|v\|)$, donde $v = xi + yj + zk$

   b) $\theta = \cos^{-1}(u \cdot i/\|u\|)$, donde $u = xi + yj$

10. Demuestre la desigualdad de Cauchy-Schwarz sin usar el argumento del coseno del ángulo que existe entre los vectores.

11. Pruebe las propiedades del producto interno a partir de su definición (Recuerde que son 4 propiedades).

12. Usar métodos vectoriales para describir el plano determinado por los tres puntos (x_0, y_0, z_0), (x_1, y_1, z_1) y (x_2, y_2, z_2).

13. Mostrar que todo punto sobre la recta $v = (1, -1, 2) + t(2, 3, 1)$ satisface $5x - 3y - z - 6 = 0$

14. Mostrar que no hay puntos (x, y, z) que satisfagan $2x - 3y + z - 2 = 0$ y que estén sobre la recta $\vec{l} = (2, -2, -1) + t(1, 1, 1)$

15. Probar $(A \times B) \times C = (A \cdot C)B - (B \cdot C)A$.

16. Probar $(u \times v) \times w + (v \times w) \times u + (w \times u) \times v = 0$

17. Probar $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = \vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$ si y solo si $(\vec{u} \times \vec{w}) \times \vec{v} = 0$

18. Un triángulo tiene vértices $(0, 0, 0)$, $(1, 1, 1)$ y $(0, -2, 3)$. Hallar su área.

19. Describir el significado geométrico de las siguientes asociaciones en coordenadas cilíndricas

    a) $(r, \theta, z) \to (r, \theta, -z)$
    b) $(r, \theta, z) \to (r, \theta + \pi, -z)$
    c) $(r, \theta, z) \to (r, \theta - \pi/4, z)$

20. Describir el significado geométrico de las siguientes asociaciones en coordenadas esféricas:

    a) $(\rho, \theta, \varphi) \to (\rho, \theta + \pi, \varphi)$
    b) $(\rho, \theta, \varphi) \to (\rho, \theta, \pi - \varphi)$

21. Dados dos vectores distintos de cero $\vec{a}$ y $\vec{b}$ en $\mathbb{R}^3$, mostrar que el vector $\vec{V} = \|\vec{a}\|\vec{b} + \|\vec{b}\|\vec{a}$ biseca el ángulo entre $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

22. Muestre que en $\mathbb{R}^n$ se cumple:

    a) $\|\vec{x} - \vec{y}\|\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2$
    b) $4(\vec{x} \cdot \vec{y}) = \|\vec{x} + \vec{y}\|^2 - \|\vec{x} - \vec{y}\|^2$

23. Calcule: $\|\vec{u}\|$, $\|\vec{v}\|$, $\vec{u} \cdot \vec{v}$, encuentre el ángulo entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$, y normalizarlos cuando dichos vectores están dado por: $\vec{u} = (-1, 2, -3)$ y $\vec{v} = (-1, -3, 4)$.

24. Usando métodos vectoriales, mostrar que la distancia entre dos rectas no paralelas l_1 y l_2 está dada por:

$$d = \frac{|(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) \cdot (\vec{a}_1 \times \vec{a}_2)|}{\|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2\|}$$

donde $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ son dos puntos cuales quiere cobre l_1 y l_2 respectivamente y $\vec{a}_1$ y $\vec{a}_2$ son las direcciones de l_1 y l_2.

25. Realice los cálculos siguientes

   a) $(-21, 23) - (?, 6) = (-25, ?)$
   b) $800(0{,}03, 0, 0) = (?, ?, ?)$
   c) $(3, 4, 5) + (6, 2, -6) = (?, ?, ?)$

26. Mostrar que dos planos, dador por las ecuaciones $Ax + By + Cz + D_1 = 0$ y $Ax + By + Cz + D_2 = 0$, son paralelos y que la distancia entre ellos es:

$$\frac{|D_1 - D_2|}{(A^2 + B^2 + C^2)^{1/2}}$$

27. Si sabemos que $\|\vec{a}\| = 1$, $\|\vec{b}\| = 3$ y $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. Encontrar lo siguiente: $(\vec{a} - \vec{b}) \cdot (2\vec{a} + \vec{b})$.

28. Considere las rectas L_1 y L_2, encontrar el punto donde se cortan las rectas y dar el ángulo de intersección

$$L_1 = \begin{cases} x = 1 \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$$

$$L_2 = \begin{cases} x = u \\ y = 1 + u \\ z = 0 \end{cases}$$

   $\forall u, t \in \mathbb{R}$.

29. Determinar un vector unitario $\widehat{u} = (u_x, u_y, u_z)$ y el intervalo de valores para l de tal forma que la ecuación paramétrica siguiente

$$L_p = \begin{cases} x = 6 + lu_x \\ y = -5 + lu_y \\ z = 1 + lu_z \end{cases}$$

   sean una parametrización del segmento de recta que empieza en $P(0, -2, 7)$ y termina en $P(-4, 0, 11)$.

30. Considerar el punto $P(x_0, y_0, z_0)$ y la recta $y = mx + b$ en el plano xy, encontrar la distancia entre el punto y la recta dada.

31. Establecer si el plano dado por $-3x + 2y + 7z = 9$ y el plano que contiene a los puntos $(-2, 6, 1)$, $(-2, 5, 0)$, $(-1, 4, -3)$ son paralelos, ortogonales o secantes.

32. Identificar que tipo de superficie representan las siguientes ecuaciones, realizar un bosquejo

    a) $5x^2 + 2y^2 - 6z^2 - 10 = 0$
    b) $2x^2 - 3y^2 - 6 = 0$
    c) $x - y^2 + 2z^2 = 0$

33. Convertir la ecuación escrita en coordenadas esféricas a una ecuación en coordenadas rectangulares.
$$\csc(\varphi) = 2\cos(\theta) + 4\sin(\theta)$$

34. Trazar las curvas de nivel (en el plano xy) para las funciones dadas f y valores especificados de c. Esbozar la gráfica de $z = f(x, y)$.

    a) $f(x, y) = (64 - x^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}$, $c = 0, 2\sqrt{15}, \sqrt{48}, \sqrt{39}$.
    b) $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{1/2}$, $c = -1, 0, 1, 2$.

35. Describa las superficies de nivel de la función
$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R} \\ (x, y, z) &\mapsto x^2 + y^2 \end{aligned}$$

36. Muestre, al menos gráficamente, que el siguiente subconjunto del plano es abierto
$$C = \{(x, y) : 2 < x^2 + y^2 < 4\}$$

37. Asuma que los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son vectores conocidos. Sea $\vec{C}$ un vector desconocido tal que $\vec{A} \cdot \vec{B} = u$, con u una cantidad conocida y $\vec{A} \times \vec{C} = \vec{B}$. Encuentre a $\vec{C}$ en términos de $\vec{A}$, $\vec{B}$, u, la magnitud de $\vec{A}$ y alguna operación entre ellos.

38. Hallar una ecuación del plano que contiene a la recta $\vec{v} = (-1, 1, 2) + t(3, 2, 4)$ y es perpendicular al plano $2x + y - 3z + 4 = 0$.

39. Realice lo que se le pide:

    a) Halle la proyección de $\vec{u} = -\hat{\imath} + \hat{\jmath} + \hat{k}$ sobre $\vec{v} = 2\hat{\imath} + \hat{\jmath} - 3\hat{k}$.
    b) Hallar la ecuación de la recta que pasa por $(3, 1, -2)$ que interseca y es perpendicular a la recta $x = -1 + t$, $y = -2 + t$ y $z = -1 + t$.
    c) ¿Qué restricción se debe tener sobre b para que el vector $(2, b, 0)$ sea ortogonal a los vectores $(-3, 2, 1)$ y $(0, 0, 1)$?

40. Determinar:
    a) Dado el vector $\vec{v} = \langle -1, 3\rangle$ y su punto inicial $P(4, 2)$, hallar el punto final de $\vec{v}$. Presente gráficamente el vector.
    b) Encontrar la magnitud de $\vec{v} = \langle 4, 3\rangle$.
    c) Hallar el vector unitario en la dirección de $\vec{u} = \langle 3, 1, 2\rangle$ y verificar que tiene longitud uno.
    d) Determinar si los puntos $P(1, -2, 3)$, $Q(2, 1, 0)$ y $R(4, 7, -6)$ son colineales.
41. Encontrar el volumen del paralelepípedo cuyos vértices dados son $A(0, 0, 0)$, $B(3, 0, 0)$, $C(0, 5, 1)$, $D(3, 5, 1)$, $E(2, 0, 5)$, $F(5, 0, 5)$, $G(2, 5, 6)$ y $H(5, 5, 6)$.
42. Hallar el conjunto de ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por $P(2, 3, 4)$ y es perpendicular al plano $3x + 2y - z = 6$.
43. Hallar la ecuación del plano que contiene las rectas:
$$\frac{x-1}{-2} = y - 4 = z \quad \text{y} \quad \frac{x-2}{-3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-2}{-1}$$
44. Hallar el ángulo formado entre los planos $x + y + z = 1$ y $x - 2y + 3z = 1$.
45. De la ecuación $x^2 + y^2 + z^2 - 2z = 0$:
    a) Convertir a coordenadas cilíndricas.
    b) Convertir a coordenadas esféricas.
    c) Trazar en el plano tridimensional la superficie.
    d) Obtener la ecuación vectorial de la intersección con $y+z = 2$, tomando como parámetro $z = t$.
46. Determinar para el sistema de superficies $x^2 - y^2 = z$ y $x^2 + y^2 = 1$:
    a) Bosquejo en el plano tridimensional de las superficies para ambas.
    b) Obtener la ecuación vectorial de la intersección, tomando como parámetro $x = r\cos(\theta)$.
47. Determinar los intervalos de continuidad de la función vectorial:
$$\vec{r}(t) = \langle e^{-t}, t^2, \tan(t)\rangle$$
48. Determinar las ecuaciones paramétricas de la recta tangente a la curva $x = 1 + 2\sqrt{t}$, $y = t^3 - t$, $z = t^3 + t$ en el punto $P(3, 0, 2)$ y la pendiente de la recta.

49. Sean $\vec{a} = (4, 5, -2)$, $\vec{b} = 3\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + 2\hat{k}$ y $\vec{c} = (-3, -1, -2)$ vectores en $\mathbb{R}^3$. Calcular:

    a) $(\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{a} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{a} + \vec{a}$
    b) $(\vec{a} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} - (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{a}$
    c) $2\,\mathrm{Proy}_{\vec{a}}(\vec{b}) \times 2\,\mathrm{Proy}_{\vec{b}}(\vec{a})$

50. Considere una pecera que tiene vértices en el origen, $\vec{u} = 5\hat{\imath} + 10\hat{\jmath}$, $\vec{v} = 5\hat{\imath} - 10\hat{\jmath}$, $\vec{w} = 20\hat{k}$, $\vec{u} + \vec{v}$, $\vec{u} + \vec{w}$, $\vec{v} + \vec{w}$ y $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$. Dibuje dicha pecera y calcule su área, su volumen y el ángulo entre sus aristas que salen del origen.

51. Demuestre que los vectores $(\vec{u} \times \vec{v})$ y $(5\vec{v} \times -6\vec{u})$ son siempre paralelos y los vectores $(\vec{u} \times \vec{v})$ y $5\vec{v}$ son siempre perpendiculares para cualquier par de vectores $\vec{u}, \vec{v}$.

52. Considere la recta $L_1 : \dfrac{x-3}{4} = \dfrac{y-2}{5} = \dfrac{z-2}{5}$ encuentre una recta L_2 que se intersecte a L_1 en un solo punto y estas sean perpendiculares entre sí.

53. Considere el plano P_1 que contiene a los vectores $(1, 3, -2)$, $(2, 4, 5)$, $(2, 2, -5)$. Y sea P_2 el plano que pasa por el $(3, 2, -1)$ y paralelo al plano $x - y + z = 6$. Hallar $P_1 \cap P_2$.

54. Considere la recta L que pasa por el punto $(5, 1, 5)$ y perpendicular al plano yz, y considere el plano con intersección en los ejes dadas por $2\hat{\imath}, 3\hat{\jmath}, 4\hat{k}$. Hallar $P \cap L$.

55. Dibuje y encuentre la ecuación de la esfera que está centrada en $(8, 7, 9)$ y es tangente al plano $x + y + z = 2$.

56. Considere la curva $\vec{\gamma}(t) = (\cos(t), \mathrm{sen}(t), t)$.

    a) Haga un bosquejo de la imagen de la curva.
    b) Encuentre un plano que no intersecte a la curva.
    c) Encuentre la ecuación de la recta tangente en el punto $\vec{\gamma}(\pi/4)$, y grafíquela.

57. Sean $\vec{f}(t)$ y $\vec{g}(t)$ dos curvas, demuestre que: $(\vec{f} \times \vec{g})' = \vec{f} \times \vec{g}\,' + \vec{f}\,' \times \vec{g}$ Aplique el resultado para calcular
$$\left[\left(t, \frac{1}{t}, t^2\right) \times \left(t-3, \frac{1}{t-5}, (t-1)^2\right)\right]'.$$

58. Sean $\vec{v} = (-2, 5)$ y $\vec{w} = (3, -2)$.

    a) Calcule $5\vec{w} - 3\vec{v}$ y $5\vec{v} - 3\vec{w}$.
    b) Encuentre la longitud de $\vec{v} + \vec{w}$.
    c) Exprese $\hat{\imath}$ como una combinación lineal $r\vec{v} + s\vec{w}$.
    d) Encuentre un escalar α tal que $\|\vec{v} + \alpha\vec{w}\| = 6$.

59. Encuentre a tal que las líneas $\vec{r}_1 = (1, 2, 1) + t(1, -1, 1)$ y $\vec{r}_2 = (3, -1, 1) + t(a, 4, -2)$ se intersecten.

60. Sean $\vec{v} = (1, 3, -2)$ y $\vec{w} = (2, -1, 4)$.

    a) Calcule el ángulo entre $\vec{v}$ y $\vec{w}$.
    b) Encuentre la proyección de $\vec{v}$ sobre $\vec{w}$.
    c) Encuentre el volumen del paralelepípedo generado por $\vec{v}$, $\vec{w}$ y $\vec{u} = (1, 2, 6)$.
    d) Todos los vectores ortogonales a $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

61. Encuentre la ecuación del plano que pasa por el punto $P = (4, -1, 9)$ y que contiene a la recta $\vec{r}(t) = (1, 4, -3) + t(2, 1, 1)$.

62. Encuentre la intersección de los planos $x + y + z = 1$ y $3x - 2y + z = 5$.

63. Determine el tipo de superficie cuadrática:

    a) $x^2 + 4y^2 - z^2 - 6x + 8y + 4z = 0$
    b) $x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 4y + 12z = 0$
    c) $x^2 + y^2 - z^2 - 2x + 4y + 5 = 0$

64. Escriba la superficie $x^2 + y^2 - z^2 = 2(x + y)$ como una ecuación en coordenadas cilíndricas de la forma $r = f(\theta, z)$.

65. Dadas las magnitudes de los siguientes vectores $\|\vec{a}\| = 3$, $\|\vec{b}\| = 2$ y $\theta = 120°$ el ángulo entre $\vec{a}$ y $\vec{b}$, si $\vec{p} = \vec{a} + 2\vec{b}$ y $\vec{q} = 2\vec{a} - \vec{b}$, hallar:

    a) $\|\vec{p}\| = \|\vec{a} + 2\vec{b}\|$ y $\|\vec{q}\| = \|2\vec{a} - \vec{b}\|$
    b) $\vec{p} \cdot \vec{q}$
    c) γ, el ángulo entre $\vec{p}$ y $\vec{q}$

66. Encuentra las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por $(1, -2, 3)$ y que es perpendicular tanto al eje x como a la recta

$$\frac{x - 4}{2} = \frac{y - 3}{-1} = \frac{z}{5}.$$

67. Determine los puntos en que la recta tangente a la curva descrita por la función $\vec{f}(t) = (3t - t^3)\hat{\imath} + 3t^2\hat{\jmath} + (3t + t^3)\hat{k}$ es paralela al plano $3x + y + z = 5$.

68. Siendo

$$\frac{d^2\vec{A}}{dt^2} = \langle 6t, -24t^2, 4\,\mathrm{sen}\,t\rangle,$$

hallar $\vec{A}$ bajo las siguientes condiciones:

$$\vec{A}(0) = (2, 1, 0) \qquad \text{y} \qquad \frac{d\vec{A}(0)}{dt} = (-1, 0, -3).$$

69. Sean $\hat{a}$ y $\hat{b}$ vectores unitarios. Calcular $(3\hat{a} - 4\hat{b}) \cdot (2\hat{a} + 5\hat{b})$ si $\|\hat{a} + \hat{b}\| = \sqrt{3}$.

70. Dados los puntos $P(2, 1, 3)$, $Q(1, 2, 1)$, $R(-1, -2, -2)$ y $S(1, -4, 0)$ hallar la mínima distancia entre las rectas PQ y RS.

71. Determinar la ecuación del plano que es paralelo a la recta

$$\frac{x-2}{-1} = \frac{y+7}{3} = \frac{z}{-2}$$

y pasa por la línea de intersección de los planos $x - y + z = 0$, $y + z - 4 = 0$

72. Encontrar dos vectores unitarios que formen un ángulo de 60° con el vector $\vec{v} = 3\hat{\imath} + 4\hat{\jmath}$. Una vez determinados dichos vectores, trace una gráfica de ellos junto con el vector $\vec{v}$.

73. Utilizando las propiedades del producto punto, demostrar que si θ es el ángulo entre dos vectores no nulos $\vec{u}$ y $\vec{v}$ entonces $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos\theta$.

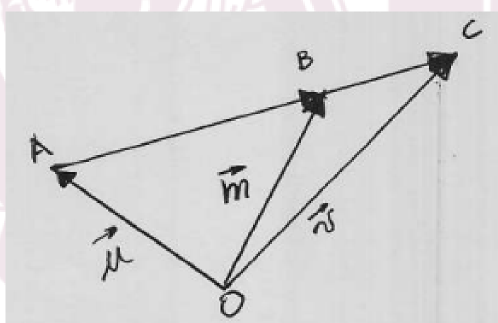
74. Tres vectores $\vec{A}, \vec{B}$ y $\vec{C}$ de $\mathbb{R}^3$ satisfacen las siguientes propiedades:

$$\|\vec{A}\| = \|\vec{C}\| = 5, \qquad \|\vec{B}\| = 1, \qquad \|\vec{A} - \vec{B} + \vec{C}\| = \|\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}\|.$$

Si el ángulo que forman $\vec{A}$ y $\vec{B}$ es $\frac{\pi}{8}$, hallar el ángulo que forman $\vec{B}$ y $\vec{C}$.

75. Demostrar que si $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ entonces $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{c} = \vec{c} \times \vec{a}$.

76. En la figura:

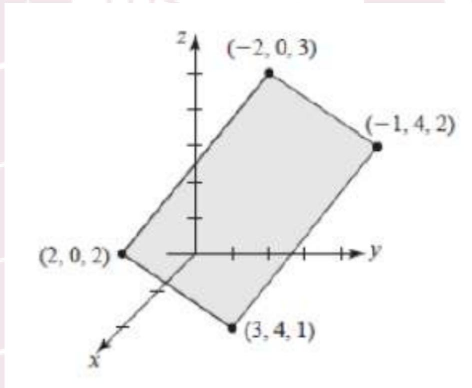


Se tiene que $\overrightarrow{AB} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}$. Expresar el vector $\vec{m}$ en términos de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

77. Un barco se localiza en el punto O, inicia su viaje al punto M recorriendo 15 km en dirección Noroeste, llegando a M se dirige al punto N que se encuentra a 35 km en dirección Este 30° Norte, ahí cambia de dirección al punto L que está a 20 km al Sur de N. Determinar la posición del punto final del recorrido del barco, L. Obtener el desplazamiento que hizo el barco.

78. Los siguientes vectores son las diagonales de un paralelogramo, $\vec{a} = 3\hat{\imath} - 4\hat{\jmath} - 2\hat{k}$ y $\vec{b} = \hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + \hat{k}$. Mostrar que dicho paralelogramo es un rombo. Hallar sus ángulos y la longitud de sus lados. Recuerde que un rombo tiene todos sus lados iguales.

79. Determinar el área del siguiente paralelogramo.



80. Demostrar $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$

81. Localiza los siguientes vectores en el espacio tridimensional: $\vec{a} = (2, -1, 3), \vec{b} = (-1, 4, 0)$, y dibuja los vectores posición correspondientes a:

   a) $\vec{a} + \vec{b}$
   b) $3\vec{a} - 2\vec{b}$

82. Calcula la proyección del vector $\vec{a} = (3, 4, -1)$ sobre el vector $\vec{b} = (-1, 6, 1)$.

83. Encuentra el área del paralelogramo formado por los puntos: $A(1, 0, 0), B(2, 1, 0), C(3, 2, -6), D(2, 1, 1)$.

84. Determina si los puntos $P(1, 2, 3)$, $Q(2, 3, 4)$, $R(0, 1, 2)$ y $S(3, 4, 5)$ están en el mismo plano.

85. Encuentra el volumen del paralelepípedo determinado por los vectores: $\vec{a} = (1, -5, 3), \vec{b} = (4, 8, -2), \vec{c} = (7, 8, 9)$.

86. Dibuje las curvas en el espacio determinadas por las siguientes funciones vectoriales.

   a) $\vec{r}(t) = (1 + t, 2 - t, 3t)$
   b) $\vec{r}(t) = (2\cos(t), \mathrm{sen}(t), 0{,}5t)$

87. Localiza los siguientes vectores en el espacio tridimensional: $\vec{a} = (3, -1, 5), \vec{b} = (-2, 4, 1)$, y dibuja los vectores posición correspondientes a:

   a) $\vec{a} + \vec{b}$
   b) $3\vec{a} - 2\vec{b}$

88. Encuentra el ángulo entre los vectores: $\vec{a} = (1, 1, 1), \vec{b} = (2, 1, \sqrt{3})$. ¿Son paralelos, ortogonales u oblicuos? ¿Qué puede decir de la dirección de cada uno de ellos?

89. Calcula la proyección del vector $\vec{a} = (-1, 6, 1)$ sobre el vector $\vec{b} = (3, 4, -1)$.

90. Encuentra el área del paralelogramo formado por los puntos:

$$A(2, 0, 0), \qquad B(-2, -1, 0), \qquad C(2, 1, 1), \qquad D(3, 2, -6).$$

91. Encuentra el volumen del paralelepípedo determinado por los vectores:

$$\vec{a} = (1, 2, 1), \qquad \vec{b} = (0, 3, -1), \qquad \vec{c} = (2, 1, 2).$$

92. Dibuje la curva en el espacio determinada por la siguiente función vectorial.
$\vec{r}(t) = (3\cos(t), t, 2\,\mathrm{sen}(t))$

93. Verificar que los tres planos tienen un punto en común y calcular sus coordenadas.

$$x - 2y + z - 7 = 0, \qquad 2x + y - z + 2 = 0, \qquad x - 3y + 2z - 11 = 0.$$

94. Encontrar el plano que pasa por los puntos $P_1(1, 2, 3)$, $P_2(3, 2, 1)$ y es perpendicular al plano

$$4x - y + 2z = 7.$$

95. Determinar para qué valores de a y b los planos

$$2x - y + 3z = 2, \qquad x + 2y - z = b, \qquad ax + y - 6z = -10$$

tienen un punto en común y pasan por una recta.

96. Determine el punto de intersección de las siguientes rectas: $(x, y, z) = (-1, 2, 1) + t(1, 1, -1)$ y $(x, y, z) = (1, 1, 2) + t(-4, 2, -2)$.

97. Hallar el punto donde se intersecan la recta y el plano.

$$x = -2 - 2t, \qquad y = 1 + 3t, \qquad z = 3 + 2t,$$

$$x + 2y - 2z + 6 = 0.$$

98. Si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son vectores unitarios y θ es el ángulo entre ellos, demostrar que:

$$\frac{1}{2}\|\vec{a} - \vec{b}\| = \left|\mathrm{sen}\,\frac{\theta}{2}\right|.$$

99. Hallar la ecuación para el plano que pasa por $(2, -1, 3)$, $(0, 0, 5)$ y $(5, 7, -1)$.

100. Hallar una ecuación para el plano que pasa por el punto $(1, 2, -3)$ y es perpendicular a la recta $\vec{v} = (0, -2, 1) + t(1, -2, 3)$.

101. Hallar la ecuación de la recta que pasa por $(1, -2, -3)$ y es perpendicular al plano $3x - y - 2z + 4 = 0$.

102. Hallar una ecuación del plano que contiene las dos rectas paralelas:

$$\vec{r}_1 = (0, 1, -2) + t(2, 3, -1)$$

$$\vec{r}_2 = (2, -1, 0) + t(2, 3, -1)$$

103. Calcular la distancia del punto $(2, 1, -1)$ al plano $x - 2y + 2z + 5 = 0$.

104. Demostrar que el área del triángulo con vértices (x_0, y_0), (x_1, y_1) y (x_2, y_2) es el valor absoluto de:

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_0 & x_1 & x_2 \\ y_0 & y_1 & y_2 \end{vmatrix}$$

b) Calcule el área del triángulo con vértices $(0, 0)$, $(1, 2)$, $(-1, -1)$.

105. Usar métodos vectoriales para probar que la distancia del punto (x_1, y_1) a la recta $ax+by = c$ está dada por

$$\frac{|ax_1 + by_1 - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

106. Si $\vec{A} = \hat{\imath} + 3\hat{\jmath} - 2\hat{k}$, $\vec{B} = 4\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + 4\hat{k}$, calcular:

a) $\vec{A} \cdot \vec{B}$
b) $\vec{A}, \vec{B}$
c) $|3\vec{A} + 2\vec{B}|$
d) $(2\vec{A} + \vec{B}) \times (\vec{A} - 2\vec{B})$

107. Encuentre los valores de p, para que los vectores $(p + 1)\hat{\imath} + (p - 2)\hat{\jmath} - 2p\hat{k}$, $(p - 1)\hat{\imath} + (7 - 2p)\hat{\jmath} + (p - 5)\hat{k}$, $-2p\hat{\imath} + (p - 2)\hat{\jmath} + (p + 1)\hat{k}$, sean coplanares.

108. Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ dos vectores en distinta dirección y $\vec{A} = (x + 4y)\vec{a} + (x - 3y - 1)\vec{b}$, $\vec{B} = (y - x + 3)\vec{a} + (2x - 3y - 1)\vec{b}$. Hallar los valores de x y y, de modo que $2\vec{A} = 3\vec{B}$.

109. Demostrar la identidad

$$(\vec{A} + \vec{B}) \cdot [(\vec{B} + \vec{C}) \times (\vec{C} + \vec{A})] = 2\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})$$

110. Demostrar que los vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$ se encuentran sobre una línea si cumplen

$$\vec{A} \times \vec{B} + \vec{B} \times \vec{C} + \vec{C} \times \vec{A} = \vec{0}$$

111. Sean ABC los vértices de un triángulo arbitrario, y sea O un punto cualquiera dentro del triángulo donde $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ y $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$. Demostrar que el área del triángulo ABC es igual a

$$\frac{|\vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a}|}{2}$$

112. En un trapecio rectangular $ABCD$ las diagonales son mutuamente perpendiculares y la razón entre las longitudes de las bases es $|BC|/|AD| = \lambda$. Hallar la razón entre sus diagonales.

113. Sea $\vec{r}(t)$ una función vectorial tal que $|\vec{r}(t)| = R =$ cte con $\left|\frac{d\vec{r}(t)}{dt}\right| = A =$ cte, demostrar que $\vec{r}(t)$ y $\frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}$ son paralelos.

114. Si $\frac{d\vec{a}}{dt} = \vec{w} \times \vec{a}$, y $\frac{d\vec{b}}{dt} = \vec{w} \times \vec{b}$, demostrar que

$$\frac{d(\vec{a} \times \vec{b})}{dt} = \vec{w} \times (\vec{a} \times \vec{b})$$

Unidad 2

1. Calcular los límites siguientes, si es que existen:

   a) $\lim_{(x,y)\to(0,1)} e^x y$

   b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x-y)^2}{x^2+y^2}$

2. Probar que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto ye^x + \text{sen}(x) + (xy)^4$ es continua.

3. ¿Se puede hacer continua $\frac{x^4-y^4}{x^2+y^2}$ definiéndola de manera adecuada en $(0, 0)$?

4. Mostrar que f es continua en x_0 si y solo si

$$\lim_{x\to x_0} \|f(x) - f(x_0)\| = 0$$

5. Evaluar las derivadas parciales $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ en los puntos indicados para $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ en $(0, 0)$ y $(\frac{a}{2}, \frac{a}{2})$.

6. Calcular la matriz de derivadas parciales de la siguiente función: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$$f(x, y) = (xye^{xy}, x\text{sen}(y), 5xy^2)$$

7. Encuentre la función vectorial $r(t)$ que describe la curva C de intersección entre las superficies:

$$z = x^2 + y^2$$

   con $y = x$.

8. Sea $f(x, y) = e^{xy}$. Mostrar que $x\frac{\partial f}{\partial x} = y\frac{\partial f}{\partial y}$.

9. Calcular el gradiente de la función:

$$f(x, y, z) = z^2 e^x \cos(y)$$

10. Hallar la ecuación del plano tangente a:

    a) $z = x^2 + 2y^3$ en $(1, 1, 3)$

    b) $25 - x^2 - y^2$ en $(3, -4, 0)$

11. Probar que la siguiente función es diferenciable, y hallar sus derivadas en un punto arbitrario: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$(x, y) \mapsto x^2 + y^2$$

12. Dados los vectores $A = (2, 1, 1)$ y $B = (1, -1, 2)$

   a) Determine si los vectores A y B son linealmente independientes o no.
   b) Mediante la definición de producto punto, obtenga el ángulo entre los vectores A y B. E identifique si son perpendicular o no.
   c) Encuentre la proyección del vector A en la dirección de B
   d) De la definición de producto vectorial. Hallar el vector unitario del vector $A \times B$
   e) Mediante el producto triple escalar mostrar que el vector $A \times B$ es perpendicular a los vectores A y B.
   f) Encuentre la función vectorial de la recta que pasa por los puntos $P(3, 2, 1)$ y $Q(-1, -2, 3)$ (elabore un dibujo)
   g) Construya las ecuaciones paramétricas para un parámetro t de la recta anterior.
   h) Indique cómo se obtiene y cuál es el dominio de la función vectorial de dicha recta.

13. Calcular los siguientes limites

   a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\tan(x+y)}{x+y}$
   b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{(x^2+y^2)}-1}{x+y}$

14. Verifique mediante la definición $\epsilon - \delta$ que el limite:

   a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = 0$
   b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} = 0$
   c) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{10xy^2}{x^2+y^2} = 0$

   se cumplen.

15. Si $u = f(x, y)$, donde $x = e^s \cos(t)$ & $y = e^s \text{sen}(t)$, demuestre que:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^{-2s}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right]$$

16. Demuestre que la función $f(x, y)$ dada, no es diferenciable en $(0, 0)$.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

17. Encuentre la derivada direccional de:

    a) $f(x, y, z) = (x + y^2 + z^2)^2$ en $(1, -1, 1)$ en la dirección de $(1, 1, 0)$
    b) $f(x, y, z) = x\cos(y)\text{sen}(z)$ en la dirección del vector $(2, -1, 4)$ y en el punto $(1, \pi, \frac{\pi}{4})$
    c) $f(x, y) = x + 2xy - 3y^2$ en la dirección del vector $v = \left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right)$ y en el punto $(1, 2)$
    d) $f(x, y) = xy^2 + x^3y$ en la dirección del vector $v = \left(\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}\right)$ y en el punto $(4, -2)$
    e) $f(x, y) = e^x\text{Cos}(\pi y)$ en la dirección del vector $v = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ y en el punto $(0, -1)$

18. Calcular las segundas derivadas parciales $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ de la función:

$$f(x, y) = \cos(xy^2)$$

19. Utilice la regla de la cadena para encontrar $\frac{dP}{du}$ cuando

$$p = \frac{r}{2s + t}$$

    con $s = \frac{1}{u}$ y $t = \sqrt{u}$.

20. Hallar el valor aproximado de:

    a) $\sqrt[3]{26{,}98}\sqrt{36{,}01}$
    b) $\sqrt{9(1{,}95)^2 + (8{,}1)^2}$

21. Calcular la matriz de derivadas parciales de:

    a) $f(x, y) = (e^x, \text{Sen}(xy))$
    b) $f(x, y) = (x + y, x - y, xy)$
    c) $f(x, y, z) = (x + z, y - 5z, x - y)$
    d) $f(x, y) = (xe^y + \text{Cos}(y), x + e^y)$
    e) $f(x, y, z) = (x + e^z + y, yx^2)$

22. El radio de la base y la altura de un cono circular recto miden 10cm y 25 cm respectivamente. Con un posible error en la medición de $0{,}01$cm. Utilizar diferenciales para estimar el error máximo en el volumen calculado del cono.

23. Emplee multiplicadores de Lagrange para encontrar los extremos con restricciones de las siguientes funciones:

    a) $f(x, y, z) = xyz$ sujeta a $x^2 + \frac{1}{4}y^2 + \frac{1}{9}z^2 = 1$ para $x > 0, y > 0, z > 0$
    b) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ sujeta a $2x + y + z = 1$ y $-x + 2y - 3z = 4$
    c) $f(x, y) = xy$ sujeta a $x^2 + y^2 = 2$

24. Encuentre el punto sobre la curva C de intersección de la esfera $x^2+y^2+z^2=9$ y el plano $x-y+3z=6$ que está más alejada del plano xy. Luego determine el punto sobre C que está más cercano al plano xy.

25. Encuentre los extremos relativos de la función:

$$f(x,y)=4x^3+y^3-12x-3y$$

26. Encuentre los extremos relativos de las siguientes funciones:

    a) $f(x,y)=-x^2-y^2+8x+6y$
    b) $f(x,y)=xy-\frac{2}{x}-\frac{4}{y}+8$
    c) $f(x,y)=(x+5)(2y+6)$

27. Sea $f(u,v)=(\tan(u-1)-e^v, u^2-v^2)$ y $g(x,y)=(e^{x-y}, x-y)$. Calcular $f\circ g$ y $D(f\circ g)(1,1)$

28. Sea $f(u,v,w)=(e^{u-w}, \text{Cos}(v+u)+\text{Sen}(u+v+w))$ y $g(x,y)=(e^x, \text{Cos}(y-x), e^{-y})$. Calcular $f\circ g$ y $D(f\circ g)(0,0)$.

29. Verificar la regla de la cadena para:

    a) $f(u,v)=\frac{u^2+v^2}{u^2-v^2}$ con $u(x,y)=e^{-(x+y)}$ y $v(x,y)=e^{xy}$
    b) $f(x,y)=xy$, $c(t)=(e^t, \text{Cos}(t))$
    c) $f(x,y)=xe^{(x^2+y^2)}$, $c(t)=(t,-t)$

30. Considere que $\vec{a}$ es un vector constante y $\vec{r}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$. Verificar las siguientes identidades:

    a) $\nabla\cdot\vec{r}=3$
    b) $(\vec{a}\times\nabla)\times\vec{r}=-2\vec{a}$
    c) $\nabla\cdot(\vec{a}\times\vec{r})=0$

31. Sea $w=f(x,y)$ un función C^2 de dos variables y sea $x=u+v$, $y=u-v$. Mostrar que:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

32. Esboce la gráfica correspondiente a las funciones. Para tal efecto, emplee curvas de nivel e intersección con los ejes:

    a) $-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$; con $a > 0$, $b > 0$ y $c > 0$.

    b) $cz = \frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2}$; con $a > 0$ y $b > 0$.

33. Identificar la gráfica correspondiente de cada ecuación:

    a) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1$
    b) $15x^2 - 4y^2 + 15z^2 = -4$
    c) $4x^2 - y^2 + 4z^2 = 4$
    d) $y^2 = 4x^2 + 9z^2$
    e) $4x^2 - 4y + z^2 = 0$
    f) $4x^2 - y^2 + 4z = 0$

34. Realice lo que se le pide:

    a) Calcule el siguiente límite, si es que existe: $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-y}{x^2+y^2}$

    b) ¿Se puede hacer continua a la función $\frac{\sin(x+y)}{x+y}$ definiéndola de manera adecuada en $(0,0)$? De ser afirmativa su respuesta, especifique cómo redefiniría a la función.

35. Halle lo que se le pide:

    a) Dado que $g(x,y) = (x^2+1, y^2)$ y $f(u,v) = (u+v, u, v^2)$, calcular la derivada de $f \circ g$ en $(1,1)$ usando la regla de la cadena.
    b) Muestre que la siguiente relación:

    $$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right) = -1$$

    Idea: Considere a la función $F(x,y,z) = 0$ que define a $x = f(y,z)$, $y = g(x,z)$ y $z = h(x,y)$.

36. Hallar una normal unitaria a la superficie $x^3y^3 + y - z + 2 = 0$ en $(0,0,2)$.

37. Sea $\vec{r} = (x,y,z)$ y $r = ||\vec{r}||$. Probar que:

$$\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\vec{r}}{r^3}$$

38. Sea $f(x,y)$ definida como:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

 a) Si $(x,y) \neq (0,0)$ calcular $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$.
 b) Mostrar que $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.
 c) Mostrar que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = -1$.

39. Encuentre los extremos relativos y/o absolutos de las siguientes funciones, según sea el caso:

 a) $f(x,y) = \sin(x) + \sin(y)$
 b) $f(x,y) = 4x - 6y$ sobre la región cerrada R definida por: $\frac{1}{4}x^2 + y^2 \leq 1$.

40. Calcular la ecuación del plano tangente a la superficie definida por $3xy+z^2 = 4$ en $(1,1,1)$.

41. Determinar los puntos críticos de $z = x^2y + y^2x$. Justifique mediante la prueba de las segundas derivadas parciales la existencia de un extremo.

42. Emplee el método de multiplicadores de Lagrange para determinar máximos y/o mínimos de $f(x,y,z) = x + y + z$ sujeto a $x^2 + y^2 = 2$ y $x + z = 1$.

43. Emplee el método de multiplicadores de Lagrange para determinar máximos y/o mínimos de $g(x,y,z) = x + 2y + 3z$ con ligaduras: $x - y + z = 1$ y $x^2 + y^2 = 1$.

44. Si $\vec{a}$ es un vector constante y $\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$, verifique las siguientes identidades:

 a) $\nabla \cdot (\vec{a} \times \vec{r}) = 0$
 b) $\nabla \times (\vec{a} \times \vec{r}) = 2\vec{a}$

45. Sean $\vec{F}(x,y,z) = (x^2, y^2, z^2)$, $\vec{G}(x,y,z) = (x-y, y-z, z-x)$ y $\phi(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^{3/2}$ calcular:

 a) $\nabla \cdot (\phi\vec{F} + \phi\vec{G})$
 b) $\nabla \times (\nabla \cdot \phi + \vec{F} \times \vec{G})$

46. Sean $f(x,y) = \sqrt{81 - x^2 - y^2}$ y $g(x,y) = \ln(y - x - 2)$. Dibujar el dominio de cada una y encuentre 3 curvas de nivel de cada una y graficarlas.

47. Encuentre la linealización de las siguientes funciones en los puntos dados:

    a) $z = 4x^2y - 2x^3y - 2xy$ en $(2, 2)$ y aproxime en $(2{,}001, 2{,}001)$.

    b) $w = \operatorname{sen}(xyz)$ en $(1, 2, \pi)$ y aproxime en $(1{,}001, 2{,}001, 3{,}1416)$.

    Además encuentre la derivada direccional en los puntos dados en la dirección $(1, 1)$ y $(1, 1, 1)$ respectivamente.

48. Sea $\phi(x, y) = \dfrac{5xy}{2x^2 + 2y^2}$.

    a) Calcular el límite cuando $(x, y) \to (0, 0)$.

    b) Calcular la magnitud de su gradiente.

    c) Calcular $\partial_{xy}\phi$.

49. Considere la superficie $xy + z = 8$. Determinar todos los puntos sobre ella que sean más cercanos al origen.

50. Se va a construir una caja rectangular cerrada de tal modo que su volumen sea de $6m^3$. El costo del material para la tapa superior y el fondo es de 10 pesos por m^2 y 20 pesos por m^2 respectivamente. El costo de los lados es de 5 pesos por m^2. Determine la función de costo $c(x, y)$ donde x, y son la longitud y ancho de la caja respectivamente. Calcule las dimensiones de la caja que producirán un costo mínimo.

51. En negocios un índice de utilidad U es una función que depende de la venta de las unidades de 2 artículos diferentes digamos x, y respectivamente dependientes entre sí. Si $U(x, y) = x^{1/3}y^{1/3}$ encuentre sus extremos sujetos a la relación lineal, cuando vendemos 18 unidades del primer producto no vendemos nada del segundo producto y cuando vendemos 3 unidades del segundo producto no vendemos nada del primero.

52. Sean $\vec{r}_1(t) = (t^2, 1, 2t)$, $\vec{r}_2(t) = (1, 2, e^t)$. Calcule

$$\frac{d}{dt}\left[\vec{r}_1(t) \cdot \vec{r}_2(t)\right]\Big|_{t=1}$$

    de dos formas:

    a) Calcule $\vec{r}_1(t) \cdot \vec{r}_2(t)$ y luego derive.

    b) Use la regla del producto.

53. Determine si los siguientes límites existen:

    a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}$

    b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{3x^2 + 2y^2}$

54. Encuentre los puntos sobre la gráfica de $z = 3x^2 - 4y^2$ en los cuales el vector $\vec{n} = (3, 2, 2)$ es normal al plano tangente.

55. Sean $f(x, y, z) = \operatorname{sen}(xy + z)$ y $P = (0, -1, \pi)$. Calcule $D_{\vec{u}} f(P)$, donde $\vec{u}$ es un vector unitario que hace un ángulo $\theta = 30^\circ$ con ∇f_P.

56. Sean $x = s + t$ y $y = s - t$. Demuestre que para cualquier función diferenciable $f(x, y)$,

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 = \frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial f}{\partial t}.$$

57. Encuentre los puntos críticos de la función $f(x, y) = xye^{-x^2-y^2}$ y determine si son máximos locales, mínimos locales o puntos silla.

58. Encuentre los valores máximo y mínimo de la función sujeta a la restricción dada.

    a) $f(x, y) = (x^2 + 1)y, \quad x^2 + y^2 = 5$
    b) $f(x, y) = 4x^2 + 9y^2, \quad xy = 4$

59. Hallar:

    a) $\dfrac{\partial z}{\partial x}$
    b) $\dfrac{\partial z}{\partial y}$

    si z se define implícitamente como una función de x e y, dada por

$$2x^3 z - x^2 y^2 + 4z^2 + 2xyz - 3 = 0.$$

60. Si $z = f(x, y)$ y tiene derivadas parciales de segundo orden continuas, y $x = r^2 + s^2$, $y = 2rs$, determina

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}.$$

61. Comprobar que la función $z = xe^y + ye^x$ satisface la ecuación

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = x\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} + y\frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2}.$$

62. Calcule

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{xy}{x^2 + y^2}\right).$$

    Demostrar la existencia o no de dicho límite.

63. La ecuación

$$\left(P + \frac{n^2 a}{V^2}\right)(V - nb) = nRT$$

es conocida como ecuación de Van Der Waals. Considerar el volumen V como una función de la temperatura y la presión. Determinar

$$\frac{\partial V}{\partial T} \quad \text{y} \quad \frac{\partial V}{\partial P}.$$

64. Encontrar todos los extremos relativos de la función

$$f(x, y) = xy - \frac{2}{x} - \frac{4}{y} + 8.$$

65. Obtener la derivada de $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, donde

$$f(x, y, z) = (x + e^z + y, yx^2).$$

66. Considere la siguiente función

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Obtener lo siguiente:

a) $\dfrac{\partial}{\partial x} f(x, y)$ usando la definición de derivada parcial.
b) $\dfrac{\partial}{\partial y} f(x, y)$ usando la definición de derivada parcial.
c) Si $g(x, y) = (at, bt)$ con a y b constantes. Obtener $f \circ g$.

67. Calcular la derivada direccional de $f(x, y) = e^x \cos(\pi y)$ a lo largo de $(x_0, y_0) = (0, -1)$ en la dirección de

$$\vec{v} = -\frac{1}{\sqrt{5}}\hat{\imath} + \frac{3}{\sqrt{10}}\hat{\jmath}.$$

68. Escribir la regla de la cadena para

$$h(x, y, z) = f(u(x, y, z), v(x, y), w(x)).$$

Escribir un ejemplo numérico.

69. Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie $z = x^2 + y^3$ en $(3, 1, 10)$. Graficar.

70. Resolver lo siguiente:

    a) Obtener la divergencia y rotacional del campo vectorial

$$\vec{F}(x,y,z) = yz\ln(x)\,\hat{i} + (2x - 3yz)\,\hat{j} + xy^2z^3\,\hat{k}.$$

    b) Demostrar que

$$\nabla \cdot (\vec{F} + \vec{G}) = \nabla \cdot \vec{F} + \nabla \cdot \vec{G}.$$

71. Encuentre los extremos relativos de la función

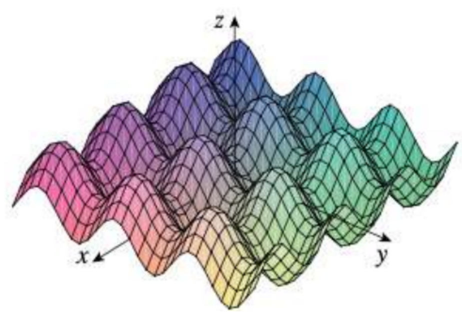
$$f(x,y) = 2x^2 + 4y^2 - 2xy - 10x - 2y + 2.$$

72. Utilice los multiplicadores de Lagrange para encontrar los extremos de

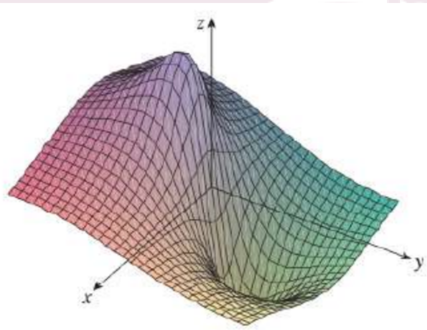
$$f(x,y) = 3x^2 + 3y^2 + 5$$

sujeta a $x - y = 1$.

73. Dibuje los mapas de contorno de las siguientes superficies



(a)



(b)

74. Sea

$$f(x,y) = \frac{x^4 - 4y^2}{x^2 + 2y^2}$$

   a) Calcule

   $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

   b) Argumente si la función es continua en $(0,0)$.

   c) Especifique el dominio de la función.

75. Calcula las derivadas parciales de la función

$$f(x,y,z) = \frac{3}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} - x^2 e^x yz.$$

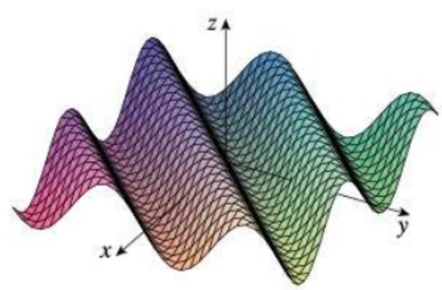
76. Suponga que necesitamos conocer una ecuación del plano tangente a la superficie S en el punto $P(-2,1,-3)$. No tenemos una ecuación para S, pero sabemos que las curvas

$$r_1(t) = \langle -2+3t, 1-t^2, -3-4t+t^2 \rangle$$
$$r_2(u) = \langle 2-2u, 2u-3, 2u^2-11 \rangle$$

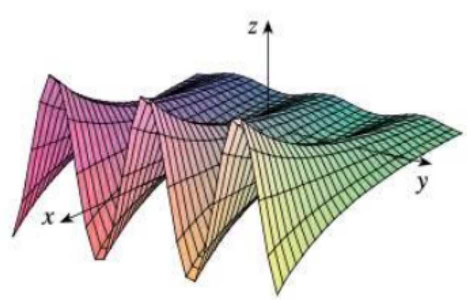
se encuentran ambas en S. Encuentre una ecuación del plano tangente en P.

77. Estime la cantidad de metal en una lata cilíndrica cerrada que mide $12\,cm$ de altura y $4{,}2\,cm$ de diámetro. Se sabe que el metal para la parte superior y el fondo es de $0{,}2\,cm$ de grueso y el metal de los lados tiene $0{,}1\,cm$ de espesor.

78. Dibuje los mapas de contorno de las siguientes superficies



(a)



(b)

79. Sea
$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + 4y^2}$$

   a) Calcule
   $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

   b) Argumente si la función es continua en $(0,0)$.

   c) Especifique el dominio de la función.

80. Calcula las derivadas parciales de la función
$$f(x,y,z) = \frac{3}{\sqrt{x^3 + y^2 + z^3}} - x^2 \ln(x) yz.$$

81. Suponga que necesitamos conocer una ecuación del plano tangente a la superficie S en el punto $P(5,-1,-3)$. No tenemos una ecuación para S, pero sabemos que las curvas
$$r_1(t) = \langle 5 + 3t, -1 - t^2, -3 - 4t + t^2 \rangle$$
$$r_2(u) = \langle 3u - 1, 2u - 5, 2u^2 - 11 \rangle$$
se encuentran ambas en S. Encuentre una ecuación del plano tangente en P.

82. Estime la cantidad de metal en una lata cilíndrica cerrada que mide $14\,cm$ de altura y $3\,cm$ de diámetro. Se sabe que el metal para la parte superior y el fondo es de $0{,}3\,cm$ de grueso y el metal de los lados tiene $0{,}5\,cm$ de espesor.

83. La temperatura en un punto (x,y) es $T(x,y)$, medida en grados Celsius. Un insecto se arrastra de tal modo que su posición después de t segundos está dada por
$$x = \sqrt{1+t}, \qquad y = 2 + \frac{1}{3}t,$$
donde x y y se miden en cm. La función temperatura satisface
$$T_x(2,3) = 4 \qquad \text{y} \qquad T_y(2,3) = 3.$$
¿Qué tan rápido se eleva la temperatura del insecto en su trayectoria después de 3 segundos?

84. La producción de trigo en un año dado, W, depende de la temperatura promedio T y de la precipitación pluvial anual R. Los científicos estiman que la temperatura promedio se eleva a razón de $0{,}15°C$/año, y que la precipitación está disminuyendo a razón de $0{,}1cm$/año. También estiman que, a niveles de producción actuales,

$$\frac{\partial W}{\partial T} = -2 \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial W}{\partial R} = 8.$$

a) ¿Cuál es el significado de los signos de estas derivadas parciales?

b) Estime la razón de cambio actual de la producción de trigo $\dfrac{dW}{dt}$.

85. Sea

$$P = \sqrt{x^2e^{2y} + y^2e^{2x} + e^{2xy}}.$$

a) Exprese P como una función de las variables u, v y w, donde $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ y $w = w(x, y)$.

b) Use la regla de la cadena para calcular $\dfrac{\partial P}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial P}{\partial y}$.

86. Sea

$$W = r^2 \cos(\theta) \operatorname{sen}(\theta) + r^2\theta \operatorname{sen}(\theta) + r^2\theta \cos(\theta).$$

a) Exprese W como una función de las variables x, y y z, donde $x = x(r, \theta)$, $y = y(r, \theta)$ y $z = z(r, \theta)$.

b) Use la regla de la cadena para calcular $\dfrac{\partial W}{\partial r}$ y $\dfrac{\partial W}{\partial \theta}$.

87. La temperatura en un punto (x, y) es $T(x, y)$, medida en grados Celsius. Un insecto se arrastra de tal modo que su posición después de t segundos está dada por

$$u = \sqrt{1 + 2t}, \qquad v = 1 + \frac{1}{4}t,$$

donde u y v se miden en cm. La función temperatura satisface

$$T_u(3, 2) = 4 \qquad \text{y} \qquad T_v(3, 2) = 3.$$

¿Qué tan rápido se eleva la temperatura del insecto en su trayectoria después de 4 segundos?

88. La producción de trigo en un año dado, P, depende de la temperatura promedio T y de la precipitación pluvial anual R. Los científicos estiman que la temperatura promedio se eleva a razón de $0{,}15°C$/año, y que la precipitación está disminuyendo a razón de $0{,}1cm$/año. También estiman que, a niveles de producción actuales,

$$\frac{\partial P}{\partial T} = -3 \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial P}{\partial R} = 9.$$

   a) ¿Cuál es el significado de los signos de estas derivadas parciales?
   b) Estime la razón de cambio actual de la producción de trigo $\frac{dP}{dt}$.

89. Dadas $\mathbf{A} = xz^2\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} - 3xzk\mathbf{k}$ y $\mathbf{B} = 3xz\mathbf{i} + 2yz\mathbf{j} - z^2k\mathbf{k}$. Encuentre $\mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B})$ y $(\mathbf{A} \times \nabla) \times \mathbf{B}$ en el punto $(1, -1, 2)$.

90. Pruebe que $\mathbf{A} = (2x^2 + 8xy^2z)\mathbf{i} + (3x^2y - 3xy)\mathbf{j} - (4y^2z^2 + 2x^3z)\mathbf{k}$ no es solenoidal, pero $\mathbf{B} = xyz^2\mathbf{A}$ sí lo es.

91. Dadas $\mathbf{A} = x^2zi + yz^3j - 3xy\mathbf{k}$, $\mathbf{B} = y^2i - yzj + 2x\mathbf{k}$ y $\phi = 2x^2 + yz$. Calcule

   a) $\mathbf{A} \cdot (\nabla\phi)$
   b) $(\mathbf{A} \cdot \nabla)\phi$
   c) $(\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B}$
   d) $\mathbf{A} \times \nabla\mathbf{B}$
   e) $(\nabla \cdot \mathbf{A})\mathbf{B}$

92. Sea $\phi = 3x^2z - y^2z^3 + 4x^3y + 2x - 3y - 5$. Encuentre $\nabla^2\phi$.

93. Sea $\mathbf{F} = (3x^2y - z)\mathbf{i} + (xz^3 + y^4)\mathbf{j} - 2xz^3\mathbf{k}$. Determine $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{F})$ en el punto $(2, -1, 0)$.

94. Sean $\mathbf{A} = 2xz^2\mathbf{i} - yz\mathbf{j} + 3xz^3\mathbf{k}$ y $\phi = x^2yz$. En el punto $(1, 1, 1)$, encuentre lo siguiente:

   a) $\nabla \times \mathbf{A}$
   b) $\mathrm{rot}(\phi\mathbf{A})$
   c) $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A})$
   d) $\nabla[\mathbf{A} \cdot \mathrm{rot}\,\mathbf{A}]$
   e) $\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}(\phi\mathbf{A})$

95. Calcule las siguientes derivadas parciales $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ y $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$.

   a) $f(x, y) = \ln(x + y) + \tan(xy)$
   b) $f(x, y) = e^{x+y}\ \mathrm{sen}(x^2 + y^2)$
   c) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$
   d) $f(x, y) = -\frac{x}{y} + \frac{y}{x}$

96. ¿En qué espacio vive la gráfica de $f(x, y) = x^2 + y^3$?

97. Suponga que una partícula sigue la trayectoria $\vec{c}(t)$ y se sale por la tangente en el instante $t = t_0$. Calcule la posición de la partícula en el instante t_1.

$$\vec{c}(t) = (\text{sen}(e^t),\ t,\ 4 - t^2) \quad \text{donde } t_0 = 1,\ t_1 = 2$$

98. Calcule el gradiente ∇f para:

$$\text{a) } f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

99. Halle la ecuación del plano tangente en $(1, 0, 1)$, para $f(x, y, z) = x \cdot \exp(-x^2 - y^2 - z^2)$.

100. Demostrar que el cono $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$ y la esfera $x^2 + y^2 + \left(z - \frac{b^2+c^2}{c}\right)^2 = \frac{b^2}{c^2}(b^2 + c^2)$ son tangentes en $(0, \pm b, c)$.

101. ¿Qué ángulo forman en intersección el cilindro $x^2+y^2 = R^2$ y la esfera $(x-R)^2+y^2+z^2 = R^2$ en el punto $\left(\frac{R}{2}, \frac{R\sqrt{3}}{2}, 0\right)$?

102. Demostrar que las superficies $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, $y = x \tan\varphi$ y $z^2 = (x^2 + y^2)\tan^2\varphi$ que son superficies del sistema de coordenadas esféricas son ortogonales entre sí.

103. Si $\hat{a}$ es un vector unitario constante. Demostrar que

$$\hat{a} \cdot [\nabla(\vec{v} \cdot \hat{a}) - \nabla \times (\vec{v} \times \hat{a})] = \nabla \cdot \vec{v}$$

104. Use multiplicadores de Lagrange demostrar que la mínima distancia de un punto $\vec{r}_0$ al plano $\vec{r} \cdot \vec{N} = D$ es

$$d = \frac{|D - \vec{r}_0 \cdot \vec{N}|}{N}$$

105. Use multiplicadores de Lagrange demostrar que la mínima distancia de un punto $\vec{r}_0$ a la esfera $|\vec{r} - \vec{a}| = R$ es

$$d = \big||\vec{r}_0 - \vec{a}| - R\big|$$

Unidad 3

1. Dibujar las regiones Q que da lugar a las integrales dobles, cambiar el orden de integración y calcularlas

   a) $\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 \operatorname{sen}\left(\frac{y^3+1}{2}\right) dydx$

   b) $\int_0^1 \int_{x^2}^1 \frac{x^3}{\sqrt{x^4+y^2}} dydx$

   c) $\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{y+1}}^{\sqrt{y+1}} x^2 dxdy$

2. Calcular la integral doble siguiente.
$$\int_0^1 \int_y^1 e^{y/x} dxdy$$

3. Evaluar la siguiente integral:
$$\int_0^1 \int_0^1 (xe^{x+y}) dydx$$

4. Sea f continua, $f \geq 0$ en el rectángulo R. Probar que si $\int\int_R f dA = 0$, entonces $f = 0$ en R.

5. Calcular
$$\iiint_S xdzdxdy$$
si el solido S esta limitado por el grafico de la superficie $z = 0$, $z = x$, $y^2 = 4 - x$. Proyectando el sólido en el plano xy.

6. Evaluar las siguientes integral y trazar la región D determinada por los límites dado:

   a) $\int_0^1 \int_0^{x^2} dydx$

   b) $\int_1^2 \int_{2x}^{3x+1} dydx$

   c) $\int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} ydydx$

7. Usar integrales dobles para calcular el área de un circulo de radio r

8. Sea D la región acotada por las partes positivas de los ejes x y y, y la recta $3x + 4y = 10$. Calcular:
$$\int_D (x^2 + y^2) dA$$

9. Sea D la región acotada por el eje y y la parábola $x = -4y^2 + 3$. Calcular
$$\int_D x^3 ydxdy$$

10. Evaluar $\int_0^1 \int_0^{x^2} (x^2 + xy - y^2) dydx$. Describir esta integral como una integral sobre cierta región D en el plano xy.

11. Cambie el orden de integración y esboce las regiones correspondientes.

    a) $\int_0^1 \int_x^1 xydydx$

    b) $\int_0^1 \int_0^{2-y} (x+y)^2 dxdy$

12. Verificar la fórmula para el volumen de una bola $\int_W dv = \frac{4}{3}\pi$ donde W es la bola unitaria $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

13. Sea W la región acotada por los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 2$ y la superficie $z = x^2 + y^2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$. Calcular $\iiint_W xdxdydz$

14. Evaluar $\iiint_W e^{-xy} ydV$, donde $W = [0,1] \times [0,1] \times [0,1]$.

15. Hallar el volumen de la región acotada por: $z = x^2 + 3y^2$ y $z = 9 - x^2$

16. Mostrar que todas las integrales siguientes son posibles.

$$\int_0^1 \int_y^1 \int_0^y f(x,y,z)dzdxdy = \int_0^1 \int_z^1 \int_y^1 f(x,y,z)dxdydz = \int_0^1 \int_0^y \int_y^1 f(x,y,z)dxdzdy$$
$$= \int_0^1 \int_0^x \int_z^x f(x,y,z)dydzdx = \int_0^1 \int_z^1 \int_z^x f(x,y,z)dydxdz$$

17. Calcular

$$\iint_Q \left[\frac{x}{2}\right] [y] dxdy$$

    si $Q = [0,4] \times [0,2]$ donde $[\frac{x}{2}]$ es la función parte entera.

18. Calcular el jacobiano de coordenadas polares en coordenadas cartesianas.

19. Calcular el jacobiano de coordenadas cilíndricas en coordenadas cartesianas.

20. Sea $\vec{F} = (xyz, xyz + 2, x + y + z)$, calcular:

    a) $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{F})$.

    b) $\nabla \times (\nabla \cdot \vec{F})$.

21. Calcule el área comprendida entre las gráficas de las funciones $y = 16 - x^2$ y $y = x^2$. Además calcule $\int\int_R (x+y)dA$ donde R es el área anterior.

22. Calcular el volumen del segmento del cilindro que se encuentra en el primer octante delimitado por la superficies $z = 16 - y^4$ y $x = 8$. Además en ese mismo volumen calcular $\iiint_V zdv$.

23. Calcular la integral de superficie $\iint_S f(x, y, z)dS$, cuya función de densidad es $f(x, y, z) = xy - z$

    a) S es la superficie parametrizada por $\vec{r}(u, v) = (u+v, u-v, 1)$ definida en el rectángulo $[-2, 4] \times [-3, 2]$

    b) S es el trozo del plano que corta a los ejes en $3\hat{\imath}, 2\hat{\jmath}, \hat{k}$ y se encuentra en el primer octante.

24. Calcular $\int_r \vec{F} \cdot d\vec{r}$ para:

    a) Con $\vec{F} = (-y, 2x, 3z)$ y la curva r es el segmento de recta que une el vector $(4, -2, 3)$ con el vector $(6, 6, 6)$

    b) $\vec{F} = (y, -x, 5z)$ y la curva r cerrada es la circunferencia de radio 5 centrada en el origen en el plano yz.

25. Usar integrales dobles para determinar el área de una elipse con semiejes de longitud a y b.

26. Evalúe la integral iterada:
$$\int_0^1 \int_0^{2x} \int_{x^2+y^2}^{x+y} dzdydx$$

27. Sea D la región $0 \leq y \leq x$ y $0 \leq x \leq 1$. Evaluar:
$$\iint_D (x + y)dxdy$$
haciendo el cambio de variable $x = u + v$, $y = u - v$. Verificar la respuesta obtenida evaluando directamente la integral, usando una integral iterada. Adicionalmente, esboce las regiones de integración.

28. Hallar el volumen del sólido de revolución $z^2 \geq x^2 + y^2$ encerrado por la superficie $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

29. Calcule el área comprendida entre las gráficas de las funciones $y = 9 - x^2$ y $y = x^2$. Además calcule $\iint_R (x + y)dA$ donde R es la región anterior.

30. Calcule el volumen de una sección del cilindro $C = \{(x, y, z) \mid x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, z \geq 10 - y^2\}$ que se encuentra en el primer octante y que se corta por el plano $x = 5$. Calcular también $\iiint_V zdV$ con V el volumen que encierra la sección del cilindro anterior.

31. Obtener mediante una doble integral, el área de la superficie encerrada entre $y = 4x^2 - 21y - 122$ y $y = 7x - 2$.

32. Obtener mediante una doble integral, el área de la superficie encerrada entre $x = 2y^2 - 4y + 4$ y $x = -5y^3 + 7y^2 + 56y + 4$.

33. Plantear, mediante una integral, la superficie lateral generada por $y = 4x - x^2$, en $1 \leq x \leq 4$ en torno al eje y:

    (a) Con variable de integración x.

    (b) Con variable de integración y.

34. Plantear, mediante una integral, la superficie lateral generada por $4px = y^2$ en $0 \leq x \leq h$ en torno al eje x:

    (a) Con variable de integración x.

    (b) Con variable de integración y.

35. Dadas las superficies $a^2 = x^2 + y^2 + z^2$ y $x^2 + y^2 = b^2$, con $0 < b < a$:

    (a) Plantee la superficie de la esfera, sobre el plano $z = 0$, en la región del plano xy, dentro del cilindro.

    (b) Calcular el área mediante la representación polar, en integral doble.

36. Determinar mediante una integral triple, el volumen en el primer octante cortado por $x^2 + z^2 = 16$, por los planos $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$ y $y = 3$ sobre el plano xy.

37. Calcule el área comprendida entre las gráficas de las funciones $y = 8 - x^2$ y $y = 2x^2$. Además calcule $\iint_R (x + y)\, dA$ donde R es la región anterior.

38. Calcule el volumen de una sección del cilindro

$$C = \{(x, y, z) \mid x \geq 0,\ \ y \geq 0,\ \ z \geq 0,\ \ z \geq 10 - 2y^2\}$$

    que se encuentra en el primer octante y que se corta por el plano $x = 5$. Calcular también $\iiint_V z\, dV$ con V el volumen que encierra la sección del cilindro anterior.

39. Sea $f(x, y) = mxy^2$, con m una constante. Encuentre el valor de m tal que

$$\iint_R f(x, y)\, dA = 1,$$

    donde $R = [0, 1] \times [0, 2]$.

40. Calcule la integral doble de $f(x, y)$ sobre el dominio D indicado.

    a) $f(x, y) = x^2 y; \quad 1 \leq x \leq 3, \quad x \leq y \leq 2x + 1$

    b) $f(x, y) = 2xy;$ acotado por $x = y, \quad x = y^2$

41. Dibuje el dominio D correspondiente a

$$\int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 \sqrt{4x^2 + 5y}\, dx\, dy$$

    Después, cambie el orden de integración y evalúe.

42. Evalúe la integral
$$\iiint_W f(x,y,z)\,dV$$
para la función $f(x,y,z) = x + y$ en la región W dada por
$$y \le z \le x, \qquad 0 \le y \le x, \qquad 0 \le x \le 1.$$

43. Sea $D = G(R)$, donde $G(u,v) = (u^2, u+v)$ y $R = [1,2] \times [0,6]$. Calcule
$$\iint_D y\,dx\,dy.$$

44. Evaluar
$$\iiint_V \operatorname{sen}(x+y+z)\,dV.$$
Donde V es el sólido limitado por las superficies
$$z + y = 10, \qquad z = 0, \qquad x = 3, \qquad y = 0, \qquad x = 0.$$
Describa y dibuje el sólido sobre el cual se está integrando.

45. Calcula el volumen limitado por las gráficas de las siguientes superficies
$$y = x^2, \qquad y = x, \qquad z = 0, \qquad z + x = 2.$$

46. Calcula el volumen limitado por las superficies dadas por
$$x^2 + y^2 = 16, \qquad z = 2 - y, \qquad z = 0.$$

47. Evaluar
$$\iiint_V 6xy\,dV.$$
Donde V es el sólido limitado por el plano $z = 1 + x + y$ y arriba de la región del plano xy limitado por las curvas
$$y = \sqrt{x}, \qquad y = 0, \qquad x = 1.$$

48. Evaluar
$$\int_0^8 \int_{\sqrt[3]{y}}^2 e^{x^4}\,dx\,dy.$$

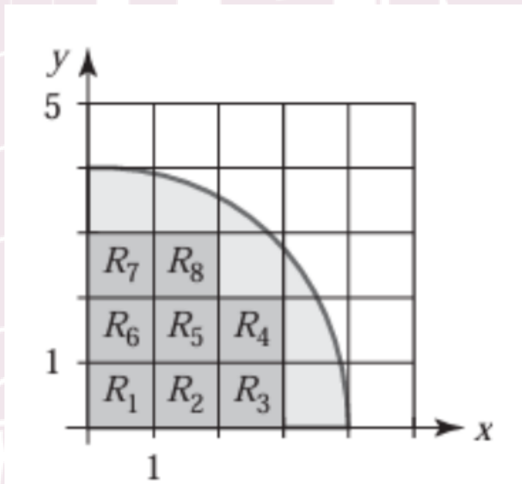
49. Considere la región R en el primer cuadrante que está acotada por las gráficas de

$$x^2 + y^2 = 16, \qquad y = 0, \qquad x = 0.$$

Aproxime la integral doble

$$\iint_R (x + 3y + 1)\, dA$$

usando la suma de Riemann y las R_k de la figura.



50. Sea V el volumen del sólido que yace debajo de la gráfica de

$$f(x, y) = 1 + x^2 + 3y$$

y arriba del rectángulo $R = [1, 3] \times [0, 4]$. Use una suma de Riemann con $n = m = 4$ y elija como puntos muestra a las esquinas inferiores derechas para aproximar dicho volumen.

51. Calcule la integral iterada

$$\iint_R x \operatorname{sen}(x + y)\, dA, \qquad R = \left\{(x, y) \mid 0 \le x \le \frac{\pi}{6},\ 0 \le y \le \frac{\pi}{3}\right\}.$$

52. Calcule la integral iterada

$$\iint_R \left(y + xy^{-2}\right)\, dA, \qquad R = \{(x, y) \mid 0 \le x \le 4,\ 1 \le y \le 2\}.$$

53. La integral

$$\iint_R \sqrt{9 - y^2}\, dA, \qquad R = \{(x, y) \mid 0 \le x \le 4,\ 0 \le y \le 2\}$$

representa el volumen de un sólido. Bosqueje el sólido.

54. Sea V el volumen del sólido que yace debajo de la gráfica de

$$f(x,y) = 1 + y^2 + 3x$$

y arriba del rectángulo $R = [0,4] \times [1,3]$. Use una suma de Riemann con $n = m = 4$ y elija como puntos muestra a las esquinas inferiores derechas para aproximar dicho volumen.

55. Calcule la integral iterada

$$\iint_R \left(x + yx^{-2}\right)\, dA, \qquad R = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 4,\ 1 \le y \le 2\}.$$

56. La integral

$$\iint_R \sqrt{9 - x^2}\, dA, \qquad R = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 4,\ 0 \le y \le 2\}$$

representa el volumen de un sólido. Bosqueje el sólido.

57. Suponga que $\mathbf{R}(t) = (3t^2 - t)\mathbf{i} + (2 - 6t)\mathbf{j} - 4t\mathbf{k}$. Encuentre a) $\int \mathbf{R}(t)\, dt$

58. Sea $\mathbf{A} = t\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$, $\mathbf{B} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ y $\mathbf{C} = 3\mathbf{i} + t\mathbf{j} - \mathbf{k}$. Evalúe a) $\int_1^2 \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})\, dt$

59. Demuestre que $\mathbf{F} = (y^2 \cos x + z^3)\mathbf{i} + (2y \operatorname{sen} x - 4)\mathbf{j} + (3xz^2 + 2)\mathbf{k}$ es un campo de fuerzas conservativo.

60. a) $\displaystyle\int_{-1}^{0} \int_{0}^{(1-x^2)^{1/2}} x\, dy\, dx$

    b) $\displaystyle\int_{0}^{1} \int_{y^4}^{y^m} (x^4 + y^4)\, dx\, dy, \quad (m > 0)$

    c) $\displaystyle\int_{0}^{1} \int_{2}^{3} \int_{1/2}^{3/2} 2\cos\left(\pi(x + y + z)\right) dx\, dy\, dz$

61. Calcule la longitud de arco para la curva:

$$\left(t + 1,\ \frac{2}{3}\sqrt{2t^{3/2}},\ \frac{1}{2}t^2\right), \quad \text{en } (1 \le t \le 2).$$

62. Resuelva las siguientes integrales:

    a) $\displaystyle\int_{-1}^{0} \int_{0}^{x} x\, dy\, dx$

    b) $\displaystyle\int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{\pi} \int_{0}^{R} e\, r^2\, dr\, d\theta\, d\phi$

    c) $\displaystyle\iiint_B e^{x+y}\, dx\, dy\, dz, \quad (B = [0,1] \times [0,1] \times [0,1])$

63. Calcular la longitud de arco de la función $y = \ln(\coth(x/2))$ desde $x = a$ al punto $x = b$ con $0 < a < b$.

64. Calcular la integral
$$\int_0^b \int_{y^3}^{c^2} e^{x^4}\, dx\, dy$$

65. Calcular el área sobre la superficie $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ que está dentro de la superficie $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ donde $z > 0$ con $0 < b < a$.

66. Hallar el volumen acotado por la porción de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2ay$ que está dentro de $by = x^2 + z^2$.

67. Calcular la superficie sobre $x^2 + y^2 = 4a - 2az$ que se encuentra entre las superficies $z = ax$ y $z = \beta x$ con $\alpha < \beta$.

68. Si $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ son vectores constantes y $\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$ es el vector de posición. En la región E, dada por
$$E = \{0 \le \vec{a} \cdot \vec{r} \le \alpha,\ 0 \le \vec{b} \cdot \vec{r} \le \beta,\ 0 \le \vec{c} \cdot \vec{r} \le \gamma\}$$
Calcular
$$\iiint_E (\vec{a} \cdot \vec{r})(\vec{b} \cdot \vec{r})(\vec{c} \cdot \vec{r})\, dx_1 dx_2 dx_3$$

Unidad 4

1. Calcular $\int_r \vec{F} \cdot d\vec{r}$ para:

   a) $\vec{F} = (2x^2, -y)$ y la curva r es el segmento de línea recta que une a $(-3, -2)$ con $(3, 2)$.

   b) $\vec{F} = (y, -z, -x)$ y la curva r es el segmento de línea recta que une a $(-3, -2, -1)$ con $(3, 2, 1)$.

2. Calcular $\oint_r \vec{F} \cdot d\vec{r}$ para:

   a) $\vec{F} = (-y, 2x)$ y la curva r cerrada es el perímetro de la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$.

   b) $\vec{F} = (y^2, -x)$ y la curva r es el triángulo con vértices el origen, $3\hat{\imath}$ y $2\hat{\jmath}$.

3. Calcular la integral de superficie $\iint_S f(x, y, z)dS$ cuya función de densidad es $f(x, y, z) = xy - z$ y S es la superficie parametrizada por $\vec{r}(u, v) = (u - v, u + v, 1)$ definida en el rectángulo $[-2, 4] \times [-3, 2]$.

4. Calcular $\oint_r \vec{F} \cdot d\vec{r}$ donde r es el contorno de un disco que vive en el plano $x + y + z = 6$ de radio 10 centrado en $(2, 2, 2)$ y $\vec{F}(x, y, z) = (-3y, 2x, 5z)$.

5. Calcular $\displaystyle\int_r \vec{F} \cdot d\vec{r}$ para:

6. Calcular las siguientes integrales de línea en el plano cerradas $\displaystyle\oint_r \vec{F} \cdot d\vec{r}$:

   a) $\vec{F} = (-y, 2x)$ y la curva r cerrada es el perímetro de la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$.

   b) $\vec{F} = (y^2, -x)$ y la curva r es el triángulo con vértices el origen, $4\hat{\imath}$ y $2\hat{\jmath}$.

7. Calcular la integral de superficie $\displaystyle\iint_S f(x, y, z)\, dS$, cuya función de densidad es $f(x, y, z) = xy - 2z$.

   a) S es la superficie parametrizada por $\vec{r}(u, v) = (u-v, u+v, 4)$ definida en el rectángulo $[-2, 4] \times [-3, 2]$.

8. Comprueba el teorema de Green en el plano

$$\oint_C P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA.$$

   Con $P(x, y) = -y$, $Q(x, y) = x$. C es la curva cerrada formada por

$$y = x^2, \qquad y = 4.$$

9. Verifique el teorema de Green en el plano para $\oint_C (3x^2 - 8y^2)\,dx + (4y - 6xy)\,dy$, donde C es la frontera de la región definida por a) $y = \sqrt{x},\ y = x^2$; b) $x = 0,\ y = 0,\ x + y = 1$.

10. Evalúe $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\,dS$, donde $\mathbf{F} = 2xy\mathbf{i} + yz^2\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$ y S es la superficie del paralelepípedo limitado por $x = 0,\ y = 0,\ z = 0,\ x = 2,\ y = 1,\ z = 3$.

11. Verifique el teorema de Stokes para $\mathbf{A} = (y - z + 2)\mathbf{i} + (yz + 4)\mathbf{j} - xz\mathbf{k}$, donde S es la superficie del cubo $x = 0,\ y = 0,\ z = 0,\ x = 2,\ y = 2,\ z = 2$, sobre el plano xy.

12. Calcular $\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$ para $\vec{F} = y\hat{\imath} + z\hat{\jmath} + x\hat{k}$ y S es la superficie sobre $x + y + z = 0$ dentro del contorno de la esfera dada por $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

13. Calcular $\oint_C \vec{F} \cdot \vec{r}$ el campo vectorial $\vec{F} = (y^2 - z^2)\hat{\imath} + (z^2 - x^2)\hat{\jmath} + (y^2 - y^2)\hat{k}$ donde C se define por la sección del cubo $0 \le x \le a$, $0 \le y \le a$, $0 \le z \le a$ que intersecta con $x + y + z = \frac{3}{2}a$ en sentido contrario de las manecillas del reloj.