



MATEMÁTICAS AVANZADAS-ISC

Unidad 1

1. Encontrar las raíces o ceros de:

$$z^5 + 16z - z^4 - 16 = 0$$

2. Pruebe que $u = u(x, y)$ es armónica y halle $v = v(x, y)$ armónica conjugada si $u = u(x, y) = 2x(1 - y)$. Expresé el resultado final $f(z)$ en términos de la variable z .

3. Representar geoméricamente:

$$\left| z + \sqrt{2}e^{i\pi/4} \right| = 2$$

4. En qué se transforma la curva $|z| = 1$ al aplicar la función $w = \frac{z}{1+z}$.

5. Determinar el valor de a y b para que se cumpla que:

$$\frac{a + 2i}{b + 3i} = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$$

6. Hallar las raíces o ceros de la ecuación:

$$z^3 + (1 + i)z^2 + (1 + i)z + i = 0$$

7. Probar que $u = u(x, y) = \cosh x \cos y$ es armónica, entonces determine su función armónica conjugada. Expresar $f(z)$ en términos de la variable z .

8. Determinar el valor de a y b para que se cumpla que:

$$\frac{a + 2i}{b + 3i} = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$$

9. Representar geoméricamente:

$$\left| z - \sqrt{2}e^{i\pi/4} \right| = 2$$

10. Halle la imagen de $x^2 + y^2 = 1$ bajo el mapeo $w = (i + \sqrt{3})z + i - \frac{1}{\sqrt{3}}$ y represente el mapeo gráficamente.



11. Sean z y w números complejos tales que $\bar{z}w \neq 1$, pero tales que z o w tienen magnitud 1. Pruebe que

$$\left| \frac{z-w}{1-\bar{z}w} \right| = 1.$$

12. Sea n un entero positivo y sean u_1, u_2, \dots, u_n las raíces n -ésimas de la unidad. Pruebe que $\sum_{j=1}^n u_j = 0$.

13. Demuestre, a partir de las definiciones básicas, que

a) $\cos^{-1} z = -i \log(z + i(1-z^2)^{1/2})$,

b) Determine al menos un valor de w , tal que, $\cos w = i$.

14. Determine la derivada de $f(z) = \arccos z$ en cualquiera de sus ramas analíticas.

15. Sea $f(z) = e^{-z} + \bar{z}$,

a) escriba $f(z)$ en la forma $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$.

b) Determine el dominio de analiticidad.

16. Sea $f(z) = e^{-z} + iz^2$,

a) Escriba $f(z)$ en la forma $u + iv$.

b) Determine el dominio de analiticidad.

17. Demuestre que $\cos^{-1} z = -i \log(z + i\sqrt{1-z^2})$ y determine w tal que $\cos w = 2 - i$.

18. Pruebe la identidad: $|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$.

19. Calcular todos los valores de la raíz cuarta de $w = -2 + i2\sqrt{3}$

20. Deducir la fórmula del $\arccos(z)$ y obtener $\arccos(2i)$

21. Separar la parte real e imaginaria de $(1-i)^{1+i}$

22. Mostrar que en el dominio $\operatorname{Re}(z) > 0$, $w = \ln(z)$ es analítica.

23. Resolver las siguientes integrales con métodos de variable compleja.

a) $\int_{1-i}^{-1+i} (z\bar{z}) dz$ (Integral de camino)

b) $\oint_{|z|=2} \frac{\operatorname{sen}(iz)}{z^2-4z+3} dz$ (Fórmula de Cauchy)

c) $\oint_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{e^{iz}}{(z^2-1)^2} dz$ (Residuos)

d) $\oint_{|z|=1} (z^3 + 2z^2) e^{\frac{1}{z}} dz$ (Residuos en el infinito/singularidad esencial)

e) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^3}$ (Integrales impropias reales)

f) $\int_0^{2\pi} \frac{1}{2-\cos(\theta)} d\theta$ (Integrales trigonométricas reales)



24. Resuelva lo siguiente:

a) $|(2\bar{z} + 5)(\sqrt{2} - i)| = \sqrt{3}|2z + 5|$

b) $\overline{(2 + i)^2} = 3 - 4i$

25. Calcule todas las raíces de $z = (-16)^{1/4}$ y su raíz principal.

26. Muestre si $f(z) = e^y e^{ix}$ es o no analítica.

27. Hallar todas las raíces de la ecuación $\sin z = \cosh 4$.

28. Hallar todos los valores de $\tan^{-1}(2i)$

29. Calcule: $(-i)^{(1-i)} =$

30. Halle la inversa de $\cosh(z)$ y calcule $\cosh^{-1}(-i)$.

31. Evalúe la suma $\sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j w^j$ donde w es raíz de la unidad.

32. Demuestre $\sinh^{-1} z$ y halle w tal que $\sinh w = i$.

33. Determine la derivada de $f(z) = \sinh^{-1} z$.

34. Sea $z = x + iy$. Expresar lo siguiente en términos de $\operatorname{Re}(z)$ e $\operatorname{Im}(z)$:

a) $\operatorname{Re}(iz)$,

b) $\operatorname{Im}((1 - i)z)$,

c) $\operatorname{Re}(z^2)$,

d) $\operatorname{Im}(\bar{z}^2 + z^2)$.

35. Usar el teorema de De Moivre para:

a) Expresar en la forma $x + iy$:

i) $(1 + i)^{2023}$,

ii) $(\sqrt{2} \cos(\frac{\pi}{80}) + i \operatorname{sen}(\frac{\pi}{80}))^{120}$;

b) Hallar todas las soluciones de las ecuaciones:

i) $z^4 = -i$,

ii) $z^3 = 2 - i$.

36. Suponga que $w = \cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi$. Si k es un entero, evalúe $w^k + \overline{w^k}$ y $w^k - \overline{w^k}$.

37. Resolver la ecuación $z^4 = 1$ y graficar en el plano complejo el polígono formado por las raíces.

38. Probar que

a) $|z| \leq |\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)| \leq \sqrt{2}|z|$,

b) $z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 = 2\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2)$.



39. Hacer un bosquejo de la gráfica de los siguientes conjuntos y clasificarlos de acuerdo a (a) abierto, (b) cerrado, (c) conexo o (d) acotado:

- a) $0 < |z - 1| \leq 1$,
- b) $|\operatorname{Re}(z)| < 1$,
- c) $\operatorname{Im}(z) < \operatorname{Re}(z)$,
- d) $|z - i| = 1$.

40. Obtener los límites siguientes:

- a) $\lim_{z \rightarrow -i} \frac{z^2 + 1}{z + i}$,
- b) $\lim_{z \rightarrow 1} \frac{z^3 - 1}{z - 1}$,
- c) $\lim_{z \rightarrow -i} \frac{z^4 - 1}{z + i}$,
- d) $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(az + b) - (az_0 + b)}{z - z_0}$.

41. Probar que

- a) las siguientes funciones son continuas en \mathbb{C} :
 - a) $f(z) = \bar{z}$,
 - b) $f(z) = |z|$;
- b) las siguientes funciones son discontinuas en $z = 0$:
 - a) $f(z) = \frac{z \operatorname{Re}(z)}{|z|^2}$,
 - b) $f(z) = \frac{(\operatorname{Re}(z))(\operatorname{Im}(z))}{|z|^2}$.

42. Hallar las partes real e imaginaria, $u(x, y)$ y $v(x, y)$ respectivamente, de las funciones siguientes:

- a) $f(z) = \frac{\bar{z}}{z+1}$,
- b) $f(z) = z^2 + \bar{z}^2$,
- c) $f(z) = z + \frac{1}{z}$,
- d) $f(z) = \bar{z}^2$.

43. Verificar que la siguiente función es armónica y hallar su armónica conjugada $v(x, y)$

$$u(x, y) = -e^{-x} \operatorname{sen} y.$$



44. Hallar todos los números complejos z que satisfacen $e^z = 1$.

45. Mostrar que

a) $\overline{(e^z)} = e^{\bar{z}}$,

b) $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$.

46. Hallar todos los números complejos que satisfacen $\cos z = \sin z$.

47. Expresar los números siguientes en la forma $x + iy$:

a) $\sin i$,

b) $\cosh(1 + i)$.

48. Hallar el valor principal de las siguientes expresiones:

a) $(1 + i)^{1+i}$,

b) $-i^{i^3}$

49. Verificar que la siguiente función es armónica y hallar su armónica conjugada $v(x, y)$

$$u(x, y) = e^{x^2 - y^2} \cos 2xy.$$

50. Hallar las partes real e imaginaria de las funciones siguientes:

a) $f(z) = \frac{\bar{z}}{z+1}$,

b) $f(z) = e^{z^2}$.

51. Hallar y graficar todos los valores de $\sqrt[4]{-8\sqrt{3} + 8i}$

52. Despejar z y separar la parte real e imaginaria $e = e^z + e^{-z}$

53. Verificar si u puede ser la parte real de una función analítica $f(z)$, en caso afirmativo encontrar $f(z)$ y $f'(z)$.

54. Hallar el módulo y argumento (ángulo) del número complejo que al multiplicar a $2\sqrt{3} + i2$ da como resultado $-4i$

55. Calcular $\int_{-i}^{-1} \bar{z} dz$;

a) Por una trayectoria circular $|z| = 1$ en el sentido positivo,

b) Por una recta

56. $\oint_{|z|=1} z^3 e^{\frac{1}{z}} \cos\left(\frac{1}{z}\right) dz$

57. $\oint_{|z-\pi i|=3} z \coth(z) dz$



58. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{1+x^4}$

59. $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 - \cos(2\theta)}$

60. Calcular la serie de Fourier y aplicar la fórmula de Parseval para $f(t) = -t$ si $|t| \leq \pi$; $f(t+2\pi) = f(t)$

61. Calcular la transformada de Fourier $F(\omega)$ y aplicar la fórmula de Parseval para $f(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } |t| \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{si } \frac{\pi}{2} < |t| \end{cases}$

62. Resolver la ecuación $y'' + (a+b)y' + (ab)y = \delta(x - (a+b))$ mediante transformadas de Fourier, elija $|a|, |b| > 3$; $a, b \in \mathbb{N}, a \neq b$

63. Escriba el número complejo dado en forma polar y luego escríbalo en la forma $z = x + iy$.

$$\frac{\left[8 \left(\cos \frac{3\pi}{8} + i \sin \frac{3\pi}{8} \right) \right]^3}{\left[2 \left(\cos \frac{\pi}{16} + i \sin \frac{\pi}{16} \right) \right]^{10}}$$

64. Encontrar la raíz enésima principal del número complejo dado. Dibuja las raíces w_0, w_1, \dots, w_{n-1} en un círculo apropiado centrado en el origen.

$$\left[\frac{16i}{1+i} \right]^{\frac{1}{8}}$$

65. Aplique las ecuaciones de Cauchy-Riemann para:

a) Demostrar que la función $u = e^{-x}(x \sin y - y \cos y)$ es armónica.

b) Encontrar v tal que $f(z) = u + iv$ sea analítica.

66. a) Exprese la función de Laplace $\nabla^2 F(x, y) = 0$ en coordenadas polares.

b) Sea $F(z)$ una función a ser analítica en una región R que contiene a z . Exprese a z en forma exponencial, usando las siguientes identidades:

$$\frac{\partial F}{\partial r} = \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial r} = e^{i\theta} \frac{\partial F}{\partial z} \quad \text{y} \quad \frac{\partial F}{\partial \theta} = \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \theta} = iz \frac{\partial F}{\partial z}$$

para mostrar que el inciso (a) se cumple en todo R .



67. Si z_0, z_1, z_2 son las soluciones de $z^3 - (2 - i) = 0$ evaluar:

- a) $f(z) = \frac{1}{z+i}$ en z_2
- b) $f(z) = \text{Ln}(z)$ en $(z_0 + z_1 + z_2 + i)$
- c) Si $f(z) = e^z$ en z_1

68. Escriba la parte real e imaginaria $u(x, y), v(x, y)$ de:

- a) $f(z) = \cosh(z + i)$
- b) $f(z) = e^{(z^2)}$

69. Determinar si los números complejos propuestos se encuentran en la imagen de las funciones dadas:

- a) Si $f(z) = \frac{1}{z-i}$ ver si $0 \in \text{Im}(f)$
- b) Si $f(z) = e^{z^2-3i}$ ver si $i \in \text{Im}(f)$

70. Describa la imagen del conjunto $A = \{z \in \mathbb{C} \mid -\text{Re}(z)^2 + \text{Im}(z) \leq 2\}$ bajo la función $f(z) = z + i$ y decir si dicha imagen es un conjunto abierto.

71. Describa la imagen de $A = \{z \in \mathbb{C} \mid \|2z - i\| = 3\}$ bajo $f(z) = \frac{1}{z}$ y decir si dicha imagen es un conjunto conexo.

72. Determinar donde son derivables las siguientes funciones de variable compleja y decir cuanto vale su derivada.

- a) $f(z) = \frac{e^z - \cos(z)}{z-i}$
- b) $f(z) = e^{z^2-3i} e^{z^3+3i}$
- c) $f(x + iy) = (x^2 - y) + i(y^2 - x)$

73. Si $\frac{z_2}{z_1}$ es un imaginario puro, a y b son reales distintos de cero. Calcular

$$\left| \frac{az_1 + bz_2}{az_1 - bz_2} \right|$$

74. Calcular

$$(1 + \cos \theta + i \text{sen} \theta)^n$$

75. Hallar el complejo cuyo cuadrado sea igual a su conjugado

76. Dar el valor real de $E = \sqrt[3]{\frac{25(2-i)}{3+4i}} - i$

77. Considere el siguiente mapeo

$$f(z) = z + \frac{1}{z}$$

encuentre en que convierte las líneas rectas que salen del origen y los círculos con centro en el origen



78. Calcular los valores de a, b, c y $d \in \mathbb{R}$, para que f sea derivable en \mathbb{C}

$$f = x^2 + axy + by^2 + i(cx^2 + dxy + y^2)$$

79. Hallar todos los valores de: $\sqrt[4]{(-2\sqrt{3} - 2i)}$

80. Partiendo de $\cos(z) = \pi(1 + i)$ despejar z y separar su parte real e imaginaria

81. Encuentre las raíces complejas de las siguientes ecuaciones; en general para $a, b, c \in \mathbb{N}$ y en particular para $a = 3, b = 6, c = 9$.

$$\begin{aligned}z^{a+2} + b &= c + 1 \\z^{b+2} + a &= c - 1\end{aligned}$$

82. Determine los puntos de ramificación y líneas de corte de $f(z)$. ¿Cuántos circuitos distintos hay alrededor de los puntos de ramificación?

$$f(z) = \sqrt{(c+1)z^4 + (a+1)z^2 + (b+1)}$$

83. Utilizando las fórmulas de Euler y de De Moivre, encuentre expresiones simplificadas de las siguientes expresiones. Encuentre la expansión de potencias para $a = 2, b = 4, c = 8$.

$$\begin{aligned}\cos((a+b+1)\theta) \\ \sin\left(\left(1 + \frac{1}{c+1}\right)\theta\right)\end{aligned}$$

84. Desarrolle, simplifique y evalúe las siguientes funciones hiperbólicas para $a = 13, b = 17, c = 19$ y $d = 23$.

$$\begin{aligned}\cosh(((a+3) + i(b+5))\varphi) \\ \sinh((c+7)\theta - i(d+11)\phi)\end{aligned}$$

85. Calcule las funciones inversas de la secante y la cosecante en términos de logaritmos complejos:

$$\begin{aligned}\text{arc sec}(z + 6c) \\ \text{arc csc}(z - 6c)\end{aligned}$$

86. Considere el punto: $w = ce^{(a+13)+i(b+17)}$ y las funciones multivaluadas $f(z), g(z)$ y $h(z)$. Encuentre expresiones algebraicas para las funciones y evalúelas para $z = w, a = 1, b = 2$ y $c = 3$.

$$f(z) = z^w, \quad g(z) = e^z, \quad h(z) = \log z$$

87. a) Verificar que $u(x, y) = e^y \text{sen}(x)$ es una función armónica,
b) Encontrar la derivada $f'(z)$, donde $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, con $u(x, y)$ dada como en el inciso a)

88. Usar la fórmula de DeMoivre para expresar $\text{sen}(4\alpha)$ en términos de potencias de $\text{sen}(\alpha)$ y $\text{cos}(\alpha)$



89. Resolver las siguientes integrales con métodos de variable compleja:

$$\text{a) } \int_0^{2\pi} \frac{1}{2 - \cos(\theta)} d\theta, \quad \text{b) } \oint_{|z|=1} z^3 e^{\left(\frac{1}{z}\right)} dz$$

90. Escriba la parte real e imaginaria $u(x, y), v(x, y)$ de: $f(z) = e^{(z)} \text{sen}(z)$

91. La función $f(z) = y^2 - i(\cos(2x) + x)$ ¿en qué conjunto es derivable y en tal caso decir cuánto vale su derivada en dicho conjunto? (1 punto)

92. Bajo la inversión $f(z) = \frac{1}{z}$ el conjunto de puntos $z = x + iy$ que satisfacen la ecuación

$$3x - 2y + 4 = 0$$

en el plano complejo x, y ¿En qué se convierten en el plano (u, v) ?

93. Probar que f es constante si cumple una de las siguientes condiciones

(a) $v = u^2$

(b) $u^2 + v^2 = cte$

Calcule la derivada $f'(z)$ de la función:

$$f(z) = [\cos(e^z) + i \sin(e^{-z})]^2$$

mediante las ecuaciones de Cauchy-Riemann en forma cartesiana: $f'(z) = \frac{\partial f}{\partial x}$ y $f'(z) = -i \frac{\partial f}{\partial y}$.

94. Derive la función

$$f(z) = [\ln(\sinh(z^6) + \cosh(z^2))]^{1/3}$$

utilizando las ecuaciones de Cauchy-Riemann en coordenadas polares: $f'(z) = e^{-i\theta} \frac{\partial f}{\partial r}$ y $f'(z) = -\frac{i}{z} \frac{\partial f}{\partial \theta}$.

95. Aplicando las propiedades de los números complejos, en particular las del conjugado de z , demostrar que si z_0 es una raíz del polinomio

$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n$$

donde a_0, a_1, \dots, a_n son números reales, entonces $\overline{z_0}$ también es una raíz.



96. Calcular los números complejos z tales que

$$w = \frac{2z - i}{2 + iz}$$

es:

- a) Un número real.
- b) Un número imaginario puro.

97. Sea

$$z = \frac{32i}{\sqrt{3} + i27}$$

- a) Expresar en forma binómica y polar el número complejo z .
- b) Hallar $\sqrt[4]{z}$ y represente dichas raíces en el plano complejo.
- c) Calcula el perímetro de la figura formada en el inciso b).

98. Determinar el conjunto de puntos $z \in \mathbb{C}$ tales que

$$2|z| \leq |z - 4|.$$

99. Haciendo uso de la fórmula de De Moivre demuestra que

$$\text{sen } 3x = 3 \text{sen } x - 4 \text{sen}^3 x$$

Mapeo. Conjuntos en el plano Complejo.

100. Dada la transformación

$$f(z) = \frac{z + 1}{z - i}$$

encuentra la imagen en el plano w de la recta

$$y - x = 0$$

101. a) Encontrar el valor de

$$(3 - 4i)^{1+i}$$

b) Demostrar que

$$\text{sen}^{-1} z = \frac{1}{i} \ln \left(iz + \sqrt{1 - z^2} \right)$$

102. Obtener

a) $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z - e^{\bar{z}}}{\text{Im } z}$ b) $\lim_{z \rightarrow -i} \frac{z^4 - 1}{z + i}$ c) $f'(z)$ para $f(z) = (z - 3i)^{4z+2}$



103. a) Define el concepto de función analítica y función armónica.
b) Probar que la función

$$u(x, y) = 2x(1 - y)$$

- es armónica.
c) Encontrar una función $v(x, y)$ tal que

$$f(z) = u + iv$$

- es analítica.
d) Expresar $f(z)$ en términos de z y dar $f'(z)$.

104. a) Determina todos los z tales que

$$|z|^2 + 3 \operatorname{Re}(z^2) = 4$$

- b) Calcular y graficar las raíces cuartas de

$$1 - i$$

105. Demuestra que

$$u(x, y) = \operatorname{sen} x \cosh y$$

es armónica. Encuentra la conjugada armónica $v(x, y)$ y expresa

$$w = f(z) = u + iv$$

como una función de z .

106. Una función compleja es analítica si:

- Tiene derivada en al menos un punto.
- Tiene derivada únicamente en el eje real.
- Satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann y es diferenciable.
- Tiene derivada solo en el eje imaginario.

107. La continuidad de una función compleja en un punto implica:

- Que su módulo sea cero en ese punto.
- Que la función no cambie su valor cerca del punto.
- Que exista límite en el punto y coincida con el valor de la función.
- Que sea analítica en todo el plano complejo.



108. ¿Qué indican las ecuaciones de Cauchy-Riemann en términos prácticos?
- Condiciones de continuidad.
 - Condiciones para la analiticidad.
 - Condiciones para integrar.
 - Condiciones para derivar parcialmente.
109. ¿Cuáles son las condiciones necesarias y suficientes para que una función compleja sea analítica en un punto del plano complejo?
- La función debe ser continua en el punto, tener derivadas parciales continuas y cumplir $u_x = v_y, u_y = -v_x$ (ecuaciones de Cauchy-Riemann).
 - Únicamente necesita tener derivadas parciales iguales respecto a x y respecto a y , sin importar continuidad.
 - Debe cumplir que $u_x = -v_y, u_y = v_x$, y tener al menos derivadas parciales de primer orden en el punto.
 - Debe ser continua en el punto y cumplir únicamente $u_x = v_x$ y $u_y = v_y$.
110. Considerando todo el plano complejo, indica cuál de las siguientes funciones cumple estrictamente con todas las condiciones para ser analítica en cada punto del plano:
- $f(z) = \bar{z}$
 - $f(z) = z^2 + |z|$
 - $f(z) = e^z$
 - $f(z) = \frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|}$

111. Realiza la división de los números complejos

$$z_1 = 18 + 12i \quad \text{y} \quad z_2 = 4 - 2i$$

y expresa el resultado en forma polar.

112. Reconstruye una función analítica cuya parte real es

$$u(x, y) = x^2 + 2xy + y^2 + 3$$

y cuya parte imaginaria $v(x, y)$ está relacionada con una función que involucra términos tanto de x como de y .

113. Resuelve el límite

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^3 + 3z + 2}{z^2 + i}$$



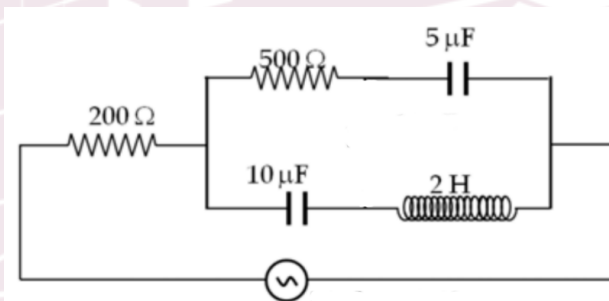
114. Calcula todas las raíces sextas del número complejo

$$1 + i$$

115. Encuentra la parte real $u(x, y)$ de la función compleja analítica. Si

$$v(x, y) = 3x^2y - y^3 + 5y$$

116. Calcule la impedancia total del circuito (Z_T), la corriente total (I_T) y el Voltaje en el Inductor (V_L). Toma en cuenta que el Voltaje en el circuito es de $220\angle -60^\circ$ V y $f = 60$ Hz. Incluya el siguiente circuito:





Unidad 2

1. Evalúe

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos \theta} \cos(\sin(\theta)) d\theta.$$

2. Use la forma extendida del teorema de la deformación para evaluar

$$\oint_{\Gamma} \frac{z - 4i}{z^3 + z} dz,$$

donde Γ encierra al origen, i y $-i$.

3. Encuentre la serie de Taylor de la función

$$f(z) = \frac{1}{2 + z}$$

alrededor de $z_0 = 1 - 8i$.

4. Encuentre la serie de Maclaurin de la función

$$f(z) = e^z - i \cos(z).$$

5. Evaluar la integral utilizando el teorema del residuo:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2}$$

6. Evalúe $\int_C \frac{(z+2)}{z} dz$ sobre el contorno semicircular.

7. Hallar analiticidad y aplicar Cauchy-Goursat para $f(z) = \frac{1}{z^2 + 2z + 2}$.

8. Calcular la integral sobre la frontera de un cuadrado usando residuos/Cauchy.

9. Encuentre la serie de potencias para $\sinh z$, alrededor de $z_0 = i$.

10. Calcule la integral impropia: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin ax}{x^4 + 4} dx$

11. Mediante el teorema de los residuos encuentre: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{x^2 + 4x + 6} dx$

12. Encuentre una serie de potencias para $1/z^2$ alrededor de $z_0 = i$.

13. Evalúe la integral: $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} dx$

14. Determinar parametrizaciones spp para el arco y la curva siguientes:

- El semicírculo izquierdo de radio $R > 0$.
- El cuadrado cuyos vértices son $\pm 1 \pm i$.



15. Evaluar la integral

$$\int_{\gamma} \frac{1+2z}{3iz+z^2} dz,$$

donde γ es la circunferencia $|z| = 2$.

16. Evaluar la integral

$$\int_{\gamma} \frac{e^z}{z^2+2023^2} dz,$$

donde γ es la circunferencia $|z-2023| = 2023$.

17. Evaluar la integral $\int_i^{-i} e^{2^{11}z} dz$.

18. Evaluar la integral

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z + \frac{i}{3}} dz,$$

donde γ es el cuadrilátero cuyos vértices son $\pm 1, \pm i$.

19. Evaluar la integral

$$\int_{\gamma} \frac{e^{-z^{3202}}}{z-1} dz$$

para cualquier curva de Jordan que no pase por 1. Sugerencia: Aplicar la fórmula integral de Cauchy.

20. Evaluar la integral

$$\int_{\gamma} \frac{1+2z}{3iz+z^2} dz,$$

donde γ es la circunferencia $|z| = \frac{\pi}{2}$.

21. Evaluar la integral

$$\int_{\gamma} \frac{e^{\operatorname{sen} z}}{z^2+2024^2} dz,$$

donde γ es la circunferencia $|z+2024| = 2024$.

22. Evaluar la integral $\int_C (z^2 - z + 2) dz$ desde i a 1 a lo largo del contorno C dado por la figura.

23. Usando Teorema de Cauchy-Goursat, evaluar la integral de contorno siguiente, donde C es el círculo $|z-2| = 2$ (bosqueje la figura con z_0 y z_1).

$$\oint_C \frac{5z+7}{z^2-2z-3} dz.$$

24. Evaluar la integral dada a lo largo del contorno indicado en la figura.

$$\oint_C \frac{z^3+3}{z(z-i)^2} dz.$$

(Pista. Use las fórmulas integrales de Cauchy)



25. Obtenga el desarrollo en serie de Taylor de la función;

$$f(z) = \frac{z - 7}{z^2 - 2z - 3},$$

alrededor de $z = 0$. Escriba una expresión para el n -ésimo coeficiente a_n y determine el radio de convergencia donde la serie es válida.

26. Obtenga el desarrollo en serie de Laurent de la función;

$$f(z) = \frac{1}{(z - 2)(z - 1)^3}.$$

desarrollado en el dominio $0 < |z - 1| < 1$. Calcule el n -ésimo coeficiente a_n

27. Calcular por definición el valor de $\int_C f(z) dz$ para las funciones y las curvas que se indican:

a) $f(z) = \bar{z} + z$ donde C es el segmento de la elipse $x(t) + iy(t) = 4 \cos(t) + i2 \sin(t)$ con $0 \leq t \leq \frac{3\pi}{2}$

b) $f(z) = x^2 - y^2 + i(3x^2y)$ donde C es el segmento de recta que va de $1 + i$ al $3 - 2i$

28. Calcule el valor de las siguientes integrales en contornos cerrados:

a) $\int_C e^{10z^2+z} + z \sinh(z^8) + \frac{z}{z-20i} dz =$ donde C la circunferencia de radio 2 centrada en el origen.

b) $\int_C \frac{z+9i}{(z^2+81)(z-9i)} dz =$ donde C es la circunferencia de radio 12 centrada en el origen

29. Calcular las series de Taylor de las funciones dadas alrededor de z_0 y calcular los radios de convergencia de las series obtenidas:

a) $f(z) = z^3 e^z + z$ en $z_0 = 0$

b) $f(z) = \sinh(z^2)$ en $z_0 = 0$

30. Obtener la serie de Laurent de las siguientes funciones en las regiones que se indican:

a) $f(z) = \frac{1}{(z+4i)(z+5i)}$ para $4 < \|z\| < 5$

b) $f(z) = e^{\frac{3}{z^5}}$ para $0 < \|z\|$

31. Con el teorema del residuo calcular las siguientes integrales

a) $\int_C (e^{-\frac{5}{2z}} + z) dz =$ donde C es la circunferencia de radio 4 centrada en 0

b) $\int_C \frac{z^2}{(z^2+9)^3(z-i)} dz =$ donde C es la circunferencia de radio 1 centrada en $\frac{7i}{2}$

32. Evaluar las siguientes integrales

a) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos(2x)}{x^4+2x^2+1} dx =$

b) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 \sin(3x)}{(x^2+1)^3} dx =$



33. Considere la función $f(z) = \frac{1}{[q(z)]^2}$ donde $q(z)$ es analítica en z_0 , tal que $q(z_0) = 0$ y $q'(z_0) \neq 0$. Probar que el residuo de $f(z)$ se da por

$$\text{Res}(f(z), z_0) = -\frac{q''(z_0)}{[q'(z_0)]^3}$$

34. Calcular la serie de Laurent de la siguiente función en la región indicada

$$\frac{1}{z}, \quad 0 < |z - a| < |a|$$

35. Calcular la siguiente integral en el contorno indicado

$$\oint_{\mathcal{C}:|z|=1} \frac{z+a}{z^n(z+b)} dz, \quad |b| > 1 \quad a \neq 0$$

36. Calcular

$$\int_0^{2\pi} (1 - \cos \theta)^n \cos(n\theta) d\theta$$

37. Calcular

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{(x^3 + a^3)} dx$$

38. Calcular

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(mx)}{(x-a)^2 + b^2} dx$$

39. Calcular

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(ax)}{(x^2 + b^2)(b^4 - x^4)} dx$$

40. Resolver las siguientes integrales con métodos de variable compleja:

$$a) \int_0^{2\pi} \frac{1}{2 - \sin(2\theta)} d\theta, \quad b) \int_0^{\infty} \frac{\cos(2x)}{16 + x^4} dx, \quad c) \oint_{|z|=1} \text{sen}(z) \cos\left(\frac{1}{z}\right) dz, \quad d) \oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{e^{\frac{1}{z}}}{(1-z)} dz,$$

$$e) \oint_{|z-\frac{i\pi}{2}|=1} \frac{e^z}{\cosh(z)} dz, \quad f) \oint_{|z-1|=1} \left(\frac{(z-1)\text{senh}(z)}{z^3 - 3z^2 + 3z - 1} \right) dz$$

41. Calcule la integral cerrada:

$$\oint \frac{z^6}{(z-2)(z-3)(z-5)(z-7)} dz$$

42. Desarrolle las series de Taylor del denominador y/o numerador y obtenga la serie de Laurent de $f(z)$ ¿Cuál es el residuo de esta serie?

$$f(z) = \frac{z^{-11}}{\csc z} + \frac{z^{-13}}{\sec z}$$



43. Integre la siguiente función cuyo contorno es un lazo que da 6 vueltas:

$$\oint \frac{\sin(z) \cos(z)}{z^9} dz$$

44. Utilizando la fórmula de cálculo de residuos, evalúe la integral en cada una de las singularidades. ¿Cuántas singularidades hay? Si se obtuviera la serie de Laurent de la función a integrar, ¿cuál es el anillo de convergencia de esta serie?

$$\oint \frac{e^z}{(z^2 - 1)(z^3 - 2)} dz$$

45. Calcular $\int_C (e^{10z^2} + \sinh(z) + \frac{z}{z-i}) dz =$ donde C la circunferencia de radio 2 centrada en el origen.

46. Calcular $\int_C \frac{e^z}{z^2 - 8iz - 16} dz =$ donde C es la circunferencia de radio 5 centrada en 0.

47. Calcular $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 - 2x + \frac{53}{4}} =$

48. Obtener la serie de Laurent de la siguiente función en la región que se indica:

$$f(z) = \frac{1}{z^3(z-5)} \text{ para } 0 < \|z\| < 5$$

49. Calcular la integral

$$\oint_{\mathcal{C}:|z|=1} z^n (\bar{z})^m dz$$

50. Calcular la integral

$$\oint_{\mathcal{C}:|z-z_0|=Re^{i\theta}} (z-z_0)^{a-1} dz; \quad a \neq 1$$

51. Sea $P(z) = a + bz + cz^2$ donde a, b y c son constantes complejas si

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{P(z)}{z} dz = 2\pi i, \quad \oint_{\mathcal{C}} \frac{P(z)}{z-1} dz = 2\pi i, \quad \text{y} \quad \oint_{\mathcal{C}} \frac{P(z)}{z+1} dz = 2\pi i$$

con $\mathcal{C} : z = 2e^{i\theta}$ recorrida en sentido positivo. Demostrar que $P(z) = 1$

52. Use el Teorema del Residuo de Cauchy para evaluar la integral a lo largo del contorno indicado;

$$\oint_C \frac{\cos z}{(z-1)^2(z^2+9)} dz; \quad |z-1| = 1.$$

53. Use contornos indentados y residuos para calcular el Valor Principal de Cauchy (P.V.) de la siguiente integral impropia;

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx.$$



54. Use Teoría de Residuos para calcular la Transformada de Laplace Inversa \mathcal{L}^{-1} de la siguiente función $F(s)$;

$$\frac{e^{-as}}{s^2 - 5s + 6} \quad a > 0.$$

55. Sea C_1 la curva dada por $x^2 + y^2 = 9$ recorrida en sentido positivo del punto $3 + 0i$ hasta el punto $0 + 3i$ y sea C_2 la curva $y = 3\sqrt{x} + 3$ recorrida de $0 + 3i$ al punto $1 + 6i$. Evaluar

$$\int_{C_1 \cup C_2} \operatorname{Im}(z) dz$$

56. a)

$$\oint_{|z|=3} \frac{\operatorname{sen}(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)}{z^2 - 3z + 2} dz$$

- b) Demostrar que

$$\oint_{|z|=1} e^{-1/z} \operatorname{sen}(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)!(2k)!}$$

- 57.

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2 - \cos(2\theta)} d\theta$$

- 58.

$$\oint_C \frac{z^2}{z^3 - 4z^2 + 9z - 10} dz$$

donde C es el rectángulo de vértices $3 + i$, i , $-3i$, $3 - 3i$.

59. Evaluar la siguiente integral compleja

$$\oint_C \frac{(2z + 1) dz}{z^3 - iz^2 + 6z}, \quad \text{con } C : |z - 3i| = \frac{1}{3}$$

60. Apoyándose en la teoría de la integración compleja (teorema del residuo) resuelve la siguiente integral real

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{[x^2 + 4]^2}$$



61. ¿Qué condición es necesaria para aplicar el teorema de Cauchy-Goursat?
- a) El contorno debe ser abierto
 - b) La función debe tener polos en el dominio
 - c) La función debe ser analítica en un dominio simplemente conexo
 - d) La función debe ser real en el contorno
62. ¿Qué característica distingue a la serie de Laurent respecto a la de Taylor?
- a) Incluye senos y cosenos
 - b) Solo aplica a funciones periódicas
 - c) Puede incluir potencias negativas de z
 - d) Se usa únicamente en el eje real
63. ¿Cuál es el coeficiente de $\frac{1}{z - z_0}$ en la serie de Laurent de una función?
- a) La derivada de la función en z_0
 - b) El valor promedio sobre el círculo
 - c) El residuo de la función en z_0
 - d) El módulo de la función en z_0
64. Si $f(z) = \frac{1}{z^2 + 4}$ ¿cuáles son sus polos?
- a) $z = \pm 2i$, polos simples
 - b) $z = \pm 2$, polos dobles
 - c) $z = 0, 4$, polos de orden 2
 - d) No tiene polos, es analítica



65. ¿Cuál es el valor de la integral

$$\oint_C \frac{1}{z-a} dz$$

si C es un círculo que encierra a a ?

- a) 0
- b) $2\pi i$
- c) a
- d) πi

66. Evalúa la siguiente integral real utilizando el método de residuos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+4} dx$$

67. Calcula la siguiente integral compleja. Donde C es el círculo $|z|=2$ orientado en sentido antihorario.

$$\int_C \frac{z^2+2}{z^2+1} dz$$

68. Evalúa la integral, donde C es el círculo $|z|=2$, orientado en sentido antihorario

$$\int_C \frac{z^2+1}{z^2(z-3)} dz$$

69. Determina el residuo de la función

$$f(z) = \frac{e^{1/z}}{z^2}$$

en el punto $z=0$, y clasifica la singularidad en ese punto.

70. Evalúa la siguiente integral utilizando el teorema del residuo

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 \cos x}{x^4+1} dx$$



Unidad 3

1. Halle la serie de Fourier compleja o exponencial para la señal:

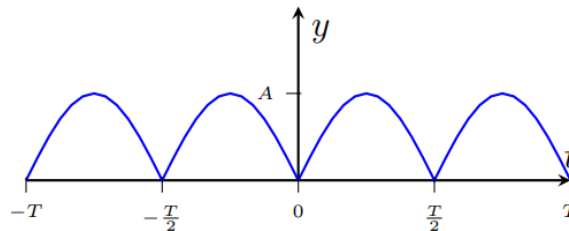
$$f(t) = 2t, \quad 0 \leq t < 3 \quad \text{con } T = 3$$

2. Sea la señal $f(t) = 5 \cos 5t$, $0 < t < \pi$. Determinar la serie de Fourier en senos.
3. Convertir la serie de Fourier compleja a serie de Fourier trigonométrica para:

$$c_0 = \frac{2A}{\pi}; \quad c_n = -\frac{2A}{\pi(4n^2 - 1)} \quad \text{con } \omega_0 = 2\pi$$

4. Para la señal periódica $f(t) = |A \sin(\omega_0 t)|$ hallar:
- La serie de Fourier trigonométrica.
 - La forma armónica.
 - La forma compleja.

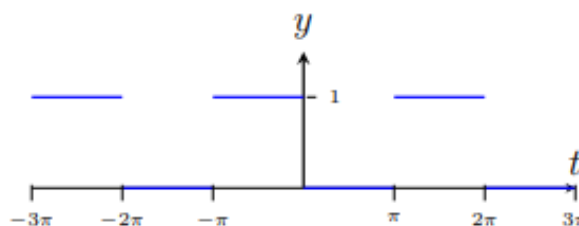
La gráfica de la función es la siguiente:



5. Encontrar la serie de Fourier para la función $f(t)$ definida por

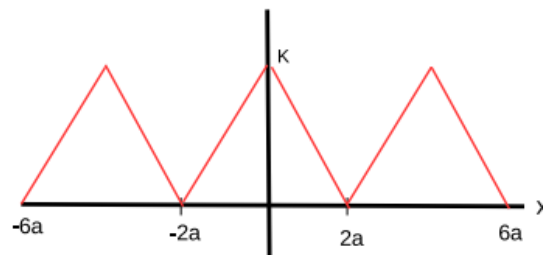
$$f(t) = \begin{cases} 1, & -\pi < t < 0, \\ 0, & 0 < t < \pi. \end{cases}$$

$$f(t + 2n\pi) = f(t) \quad \text{para todo } n \in \mathbb{Z}$$

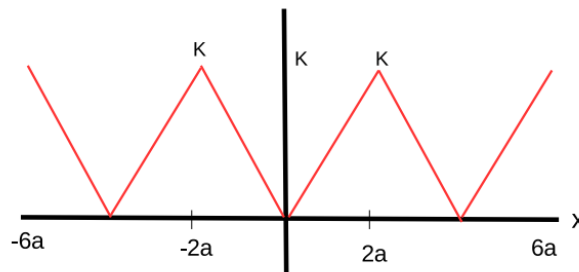




6. Calcular la serie de Fourier y verificar la fórmula de Parseval para $f(t) = |\cos(t)|$
7. Calcular la transformada de Fourier y verificar Parseval para una señal de pulso de coseno.
8. Resolver la ecuación diferencial mediante transformada de Fourier.
9. Encuentre la integral de Fourier compleja de $f(x) = e^{-|x/2|}$.
10. Encuentre la serie de Fourier de la función:



11. Demuestre la inversa usando Heaviside y halle la inversa de $\hat{h}(\omega)$.
12. Encuentre la serie de Fourier de la función:



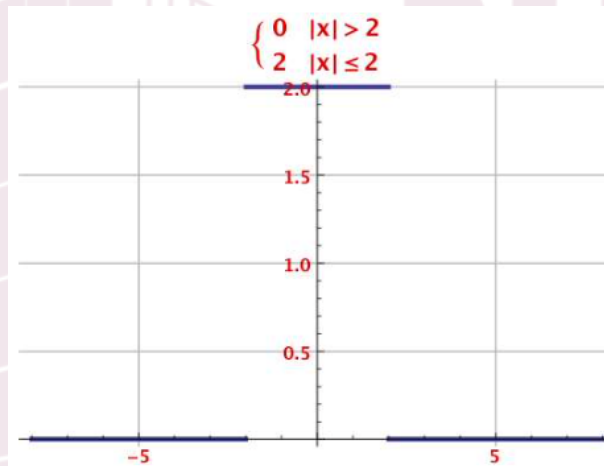
13. Determinar la serie de Fourier compleja para $f(t) = \frac{3}{4}t$.
14. Encontrar la serie de Fourier en cosenos para $f(t) = \cos t$.
15. Calcular la Transformada de Fourier de la siguiente función:

$$f(t) = \text{sgn}(t) + \text{sen}^2 t - t^3$$



16. Calcule la transformada de Fourier \mathcal{F} de;

$$f(x) = \begin{cases} 2, & \text{si } |x| \leq 2; \\ 0, & \text{si } |x| > 2. \end{cases}$$



17. Use la Transformada de Fourier Inversa $\mathcal{F}^{-1}F(s)$ para encontrar la función original $f(x)$ del problema 4.

18. Calcular el periodo de las siguientes funciones y graficarlas:

a) $f(t) = \text{sen}^2(5t - 4\pi)$

b) $f(t) = \text{sen}(t/3) + \text{cos}(6t/7)$

19. Calcular la serie de Fourier real de $f(t) = \begin{cases} 2t + 2, & \text{si } -\pi < t < 0 \\ t - 2, & \text{si } 0 \leq t \leq \pi \\ \forall t, & f(t + 2\pi) = f(t). \end{cases}$

20. Calcular la serie de Fourier compleja de $f(t) = \begin{cases} -t^2, & \text{si } -\pi < t < 0 \\ t^2, & \text{si } 0 \leq t \leq \pi \\ \forall t, & f(t + 2\pi) = f(t). \end{cases}$

21. Graficar el espectro de Amplitud y frecuencia para $f(t) = \begin{cases} t - 2, & \text{si } -\pi < t < 0 \\ -t + 2, & \text{si } 0 \leq t \leq \pi \\ \forall t, & f(t + 2\pi) = f(t). \end{cases}$



22. Calcular la Transformada de Fourier de las siguientes funciones:

a) $f(t) = 6e^{-6t}u(t)$ donde $u(t)$ es la función escalón unitario.

$$b) f(t) = \begin{cases} t^3, & \text{si } -\pi < t < 0 \\ -t - 2, & \text{si } 0 \leq t \leq \pi \\ 0, & \text{otro.} \end{cases}$$

23. Demuestre que si $\mathcal{F}\{f(t)\} = F(\omega)$ entonces $\mathcal{F}\{f(t - t_0)e^{i\omega_0 t}\} = F(\omega - \omega_0)e^{-i(\omega - \omega_0)t_0}$ y con este resultado calcular.

$$\mathcal{F}\{(e^{-5(t-6)}u(t-6))e^{i8t}\}.$$

24. Pruebe que si $f(t)$ es periódica es decir $f(t + T) = f(t)$ entonces

$$F(t) = \int_0^t f(u)du - \frac{a_0}{2}t$$

con $a_0 = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)dt$ también es periódica $F(t + T) = F(t)$

25. Calcular la serie trigonométrica de Fourier de

$$f(t) = \begin{cases} a & : 0 \leq |t| < \pi \\ b & : \pi \leq |t| \leq 2\pi \end{cases}$$

26. Calcular la serie trigonométrica de Fourier de

$$\sum_{k=0}^n (\alpha_k \cos(kt) + \beta_k \sin(kt))$$

27. Calcular la serie exponencial de Fourier de la función

$$f(x) = \begin{cases} x(\pi - x) & : 0 \leq x \leq \pi \\ -x(\pi - x) & : \pi \leq x \leq 2\pi \end{cases}$$

28. Sean $f(t)$ y $g(t)$ funciones continuas a trozos con periodo T , y sean a_n, α_n, b_n y β_n los respectivos coeficientes de Fourier de $f(t)$ y $g(t)$, respectivamente. Demostrar que

$$\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)g(t)dt = \frac{1}{2}a_0\alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n\alpha_n + b_n\beta_n)$$

29. Calcular la serie de Fourier de la siguiente función

$$f(t) = \sin^2 t \cos^3 t$$



30. Calcular usando la definición la transformada de Fourier de la siguiente función

$$f(t) = \frac{1}{e^{at} + e^{-at}}$$

31. Calcular las siguientes transformadas usando tablas

$$\mathcal{F} \left\{ \frac{\sin^2(at)}{\pi t} \right\}$$

$$\mathcal{F} \left\{ t^3 \frac{d^3}{dt^3} (e^{-w_0 t} \cos bt) \right\}$$

32. Calcular las siguientes transformadas inversas usando tablas

$$\mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{1}{2\pi} \frac{1 + e^{-i\pi w}}{1 - w^2} \right\}$$

$$\mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{2(1 - \cos aw) \cos bw}{w^2} \right\}$$

33. a) Calcular la serie de Fourier de la función $f(t) = -|\cos(t)|$
b) Graficar la serie usando algunos términos, mediante algún software y anexar la gráfica
c) Aplicar la fórmula de Parseval y despejar π del resultado obtenido.
34. a) Calcular la transformada de Fourier mediante la definición de transformada

$$f(t) = \begin{cases} |\text{sen}(t)| & \text{si } |t| \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{si } \frac{\pi}{2} < |t| \end{cases}$$

- b) Graficar con algún software la función $f(t)$ y el módulo de la transformada $|F(\omega)|$
35. Resolver la ecuación diferencial $2y'' + 12y' + 18y = \cos(x)$ aplicando la transformada de Fourier (sugerencia: encuentre la inversa mediante convolución)
36. a) Calcular la serie de Fourier para la función $f(t)$ definida en un periodo por:

$$f(t) = -|x| + \frac{\pi}{2} \quad \text{para } -\pi \leq t < \pi$$

- b) Graficar 10 términos de la serie usando algún software y anexar la gráfica obtenida.
37. Calcular la transformada inversa de Fourier

$$F(w) = \frac{\text{sen}(3w)}{w(2 + iw)}$$



38. Calculando la serie de Fourier de la función periódica

$$f(t) = \begin{cases} A & 0 < t < \pi \\ -A & -\pi < t < 0 \end{cases}$$

$$f(t + 2\pi) = f(t)$$

Demuestre que:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$$

Tip: evalúe la serie de Fourier de $f(t)$ para $t = \frac{\pi}{2}$, i.e. $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = A$.

39. Obtenga la serie de Fourier de la función con periodo $T = 2\pi$:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi \\ t & -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2} \\ -\frac{\pi}{2} & -\pi \leq t \leq -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

40. Calcule la transformación integral de Fourier

$$F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt$$

de la función

$$f(t) = \begin{cases} te^{-t} & -1 < t < 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

41. Demuestre las identidades de modulación de la transformación de Fourier:

$$\mathcal{F}\{f(t) \cos(\omega_0 t)\} = \frac{1}{2} [\hat{F}(\omega + \omega_0) + \hat{F}(\omega - \omega_0)]$$

$$\mathcal{F}\{f(t) \sin(\omega_0 t)\} = \frac{i}{2} [\hat{F}(\omega + \omega_0) - \hat{F}(\omega - \omega_0)]$$

y calcule ambas transformaciones para $f(t) = \delta(t)$, considerando:

$$\delta(t) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{2a} [u(t+a) - u(t-a)]$$

42. Calcule la transformación inversa

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\}$$

de la función:

$$F(\omega) = \frac{e^{-i3\omega+6} - 1}{\sqrt{2\pi}(2 - i\omega)}$$



43. Sea $F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}$, demuestre que la transformación de Fourier de la n -ésima derivada de $f(t)$ es:

$$\mathcal{F}\{f^{(n)}(t)\} = (i\omega)^n F(\omega)$$

Emplee esta identidad para resolver la ecuación diferencial:

$$7\ddot{y} + 5\dot{y} + 3y = \delta(t - 2)$$

para hallar la solución $y = f(t)$.

44. Graficar y calcular la serie de Fourier (la real o la compleja) de la siguiente función:

$$f(t) = \begin{cases} -\frac{2}{3}t & \text{si } -1 \leq t \leq 0 \\ \frac{3}{2}t & \text{si } 0 < t \leq 1 \end{cases} \quad f(t+2) = f(t)$$

45. Calcular la transformada de Fourier de la siguiente función:

$$f(t) = t^2 - \text{sen}^2(t) + 3\text{sgn}(t)$$

46. Usar $\oint_{\mathcal{C}:|z|=1} \frac{e^{kz^n}}{z} dz$, para demostrar

$$\int_0^{2\pi} e^{k \cos(n\theta)} \cos(k \sin(n\theta)) d\theta = 2\pi$$

47. Encontrar la transformada de Fourier de

$$f(t) = \frac{1}{t^2 + 4t + 13}$$

48. Sea

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{para } -3 \leq x \leq 0, \\ x, & \text{para } 0 \leq x \leq 3, \end{cases}$$

encontrar la serie de Fourier de f en $[-3, 3]$.

49. Demostrar que la transformada de Fourier de la función

$$f(t) = \begin{cases} \frac{A}{T}, & \text{si } -T < t < 0, \\ -\frac{A}{T}, & \text{si } 0 < t < T, \end{cases}$$

está dada por

$$F(\omega) = \frac{4A}{\omega T} i \text{sen}^2\left(\frac{\omega T}{2}\right).$$



50. Una función periódica $f(t)$ con periodo 2π está definida por

$$f(t) = t^2 + t, \quad -\pi < t < \pi, \quad f(t) = f(t + 2\pi).$$

Dibuje una gráfica de la función $f(t)$ para los valores de t desde $t = -3\pi$ hasta $t = 3\pi$ y obtenga la expansión en serie de Fourier de la función.

51. Determinar la serie de Fourier compleja de

$$f(x) = x^2, \quad -\pi \leq x \leq \pi, \quad T = 2\pi.$$

52. Aplicando las propiedades de la transformada de Fourier resolver

$$\text{a) } \mathcal{F} \left\{ 8e^{-at^2} \operatorname{sen}(3t) \right\} \quad \text{b) } \mathcal{F}^{-1} \left\{ 9e^{-\frac{(i\omega+4)^2}{32}} \right\}.$$

