MATEMÁTICAS DISCRETAS

Unidad 1

1. Simplifique si es posible, a la expresión más reducida. Indique las leyes utilizadas para justificar.
$$[(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \wedge (\sim q \rightarrow \sim p) \wedge p] \rightarrow r$$

2. Valide por tablas de verdad: (Cita de Sir Isaac Newton)
"Si he visto más lejos que otros, es porque voy sobre los hombros de gigantes". No he visto más lejos que otros. Por lo tanto, no voy sobre los hombros de gigantes.

3. Resuelva:

   a) Si q es verdadero, ¿Cuál es el valor del enunciado $q \vee (q \wedge \sim p)$?

   b) Si p es verdadero, entonces ¿Cuál es el valor de verdad del enunciado $\sim p \rightarrow (q \vee r)$?

   c) Si q es falso, ¿Cuál es el valor de verdad del enunciado $(p \wedge \sim q) \wedge q$?

   d) Si q es verdadero, entonces ¿Cuál es el valor de verdad del enunciado $(p \wedge q) \rightarrow q$?

4. Resuelva lo que se pide:

   a) Haga uso de los cuantificadores para abreviar las siguientes funciones proposicionales y contesta, ¿Cuál función es verdadera o falsa?

      I) Para todo x, si x es impar entonces $x^2 - 1$ es par.

      II) Para cada entero "x", "$2x + 1 \neq 5$" o "$x^2 \neq 9$".

   b) Escribe el conjunto de reales en "x" y "y", los cuales se encuentran involucrados en el lugar geométrico descrito:
$$\exists x \exists y (x^2 + y^2 = 1)$$

5. En la parte trasera de un viejo armario descubre una nota firmada por un pirata famoso por su extraño sentido del humor y amor a los rompecabezas lógicos. En la nota escribió que él había escondido el tesoro en algún lugar de la propiedad. Hizo una lista de cinco enunciados verdaderos (del i) al v) que se muestran a continuación) y desafió al lector a usarlos para averiguar la ubicación del tesoro.

   i) Si esta casa está al lado de un lago, entonces el tesoro no está en la cocina.
   ii) Si el árbol en el patio delantero es un olmo, entonces el tesoro está en la cocina.
   iii) Esta casa está al lado de un lago.
   iv) El árbol del patio delantero es un olmo o el tesoro está enterrado bajo el asta bandera.
   v) Si el árbol del patio trasero es un roble, el tesoro está en el garaje.

   ¿Dónde está escondido el tesoro?

6. Si se tiene las proposiciones:
   a: Invierto mi dinero en acciones
   b: Deposito mi dinero en una cuenta de ahorros.

   Una equivalencia de la proposición: “si invierto mi dinero, no lo deposito en una cuenta de ahorro”, es:

   a) $(a \vee b) \wedge (a \wedge b)$
   b) $(a \vee b) \wedge \neg(a \wedge b)$
   c) $\neg(a \wedge b)$
   d) $\neg(a \vee b) \wedge \neg(a \wedge b)$
   e) $(a \vee \neg b) \wedge (\neg a \wedge b)$

   Justifica tu respuesta con base en el álgebra de proposiciones.

7. Si $(\neg p \rightarrow q) \vee r$ es una proposición falsa, entonces, una y sólo una de las siguientes proposiciones es verdadera, identifíquela. Justifica tu respuesta con base en las definiciones de los conectores lógicos.

   a) La proposición $(\neg p \wedge \neg q) \rightarrow r$ es verdadera
   b) La proposición $(p \wedge q) \vee \neg r$ es falsa
   c) La proposición $(p \wedge \neg q) \vee r$ es falsa
   d) La proposición $(\neg p \wedge q) \vee \neg r$ es falsa
   e) La proposición $(\neg p \wedge q) \wedge \neg r$ es verdadera

8. Los valores de verdad que deben de tener las proposiciones atómicas a, b, c para que la proposición compuesta: $[\neg(\neg a \to c) \to (a \vee \neg b)] \wedge \neg(a \vee c)$ sea verdadera son:

   a) $a = 1; b = 0; c = 0$
   b) $a = 0; b = 1; c = 0$
   c) $a = 0; b = 0; c = 1$
   d) $a = 0; b = 0; c = 0$
   e) $a = 1; b = 1; c = 1$

   Justifica tu respuesta con base en las definiciones de los conectores lógicos.

9. La inversa de: "No es verdad que, estudio pero salgo mal en los exámenes" es:

   a) Si estudio, entonces salgo mal en los exámenes
   b) Si estudio, entonces salgo bien en los exámenes
   c) Si no estudio, salgo mal en los exámenes
   d) Si salgo bien en los exámenes, he estudiado
   e) Ninguna de las anteriores es la inversa

10. Demuestre la validez del argumento

   a) mediante leyes de inferencia
   b) mediante álgebra de proposiciones

   Si hoy es sábado voy al cine; pero si hoy voy a la playa, comeré ceviche. No voy al cine o no comeré ceviche. Por lo tanto, hoy no es sábado o incluso no voy a la playa.

11. Demuestre por ambos métodos: por medio de una tabla de verdad y por medio de las leyes de la lógica, que la siguiente proposición es una tautología.

$$[(p \vee q) \wedge (p \to r) \wedge (q \to r)] \to r$$

12. Resuelva lo que se pide:

   a) Vuelva a escribir el siguiente enunciado de la forma *si ..., entonces ....*
   La práctica diaria de su servicio es una condición necesaria para que Daniela tenga una buena posibilidad de ganar el torneo de tenis.
   b) Expresa el siguiente enunciado en lenguaje simbólico.
   Cuando el mensaje no sea enviado desde un sistema desconocido no se revisa para buscar ningún virus.

13. a) Demuestre que el siguiente argumento es válido:

$$(a \to b) \wedge (a \to c)$$
$$\neg(b \wedge c)$$
$$d \vee a$$
$$\overline{\qquad\qquad}$$
$$\therefore d$$

b) Compruebe que las premisas $p \to q$, $q \to r$, $s \to \neg r$ y $p \wedge s$ son inconsistentes.

14. Utilice una tabla de verdad para mostrar que las proposiciones son equivalentes:

$$p \to (q \wedge \sim r) \equiv \sim p \vee (q \wedge \sim r)$$

15. a) Dada la proposición directa: *Si yo vivo en Tampa, entonces yo vivo en Florida*, determine cada una de las proposiciones condicionales relacionadas: La recíproca, la inversa y la contrapositiva (en símbolos y palabras).

b) Para la proposición directa $\sim p \to q$, escriba: La recíproca, la inversa y la contrapositiva.

16. a) $(p \wedge q) \to r$
b) $(q \to r) \to \sim t$
c) $t \vee s$
d) p
e) $p \to (q \to r)$
f) $q \to r$
g) $\sim t$
h) s

17. Determine si el argumento es válido o no válido (use tabla de verdad):

Yo compraré un automóvil o Yo me iré de vacaciones
Yo no compraré un automóvil
____
Yo me iré de vacaciones

18. Sea $P(x)$ la función proposicional "x es un entero" y sea $Q(x)$ la función proposicional "x es un número positivo". El dominio de discurso es el conjunto de todos los números reales.

    a) Escriba cada proposición en palabras. Determine el valor de verdad de cada proposición.

        I. $\forall x\, Q(x)$
        II. $\exists x\, Q(x)$
        III. $\exists x\, (P(x) \rightarrow Q(x))$
        IV. $\forall x\, (P(x) \land Q(x))$

    b) Escriba la negación de cada proposición en símbolos y palabras. Determine el valor de verdad de cada proposición.

        I. $\forall x\, Q(x)$
        II. $\exists x\, Q(x)$
        III. $\exists x\, (P(x) \rightarrow Q(x))$
        IV. $\forall x\, (P(x) \land Q(x))$

19. Relacione las siguientes columnas.

    a) Demostración por contradicción
    b) Prueba directa
    c) Demostración por contrapositiva
    d) Prueba $p \leftrightarrow q$
    e) Prueba existencial
    f) Probar que $p \rightarrow q$ es falsa o rechazar $\forall x\, P(x)$

( ) Para probar $p \rightarrow q$, prueba la afirmación equivalente: $\sim q \rightarrow \sim p$

( ) Se encuentra un miembro x en el dominio de discurso que hace que $P(x)$ sea falsa (contraejemplo).

( ) Se encuentra un miembro x en el dominio de discurso que hace que $P(x)$ sea verdadera.

( ) Supone que las hipótesis son verdaderas y que la conclusión es falsa y después utiliza la hipótesis y la negación de la conclusión, junto con otros axiomas, definiciones y teoremas demostrados antes, para obtener una contradicción.

( ) Supone que las hipótesis son ciertas y entonces, usando la hipótesis, otros axiomas, definiciones y teoremas demostrados antes, prueba que la conclusión es verdadera.

( ) Se prueba la afirmación equivalente: $(p \rightarrow q) \land (q \rightarrow p)$

20. Indica ¿cuál de los siguientes enunciados son proposiciones?

    a) Todas las aves vuelan
    b) El 5 de diciembre de 1990 fue lunes
    c) Ojalá todos aprueben este curso
    d) $X + 1 = 3$

21. Determinar si es una tautología o una falacia o ninguna de las dos:

$$\neg(p \vee (\neg p \wedge q)) \longrightarrow (\neg p \wedge q)$$

22. Comprobar la equivalencia lógica (álgebra):

$$\sim((\sim p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)) \vee (p \wedge q) \equiv p$$

23. Demuestre que los siguientes argumentos son válidos:

    a)

$$\begin{array}{l} p \wedge q \longrightarrow \sim r \\ p \vee \sim q \\ \sim q \longrightarrow p \\ \hline \sim r \end{array}$$

    b)

$$\begin{array}{l} \sim p \longrightarrow r \wedge \sim s \\ t \longrightarrow s \\ u \longrightarrow \sim p \\ \sim w \\ u \vee w \\ \hline \sim t \end{array}$$

24. Demostrar que:

$$\neg(\exists x \forall y(xy < 1)) \equiv \forall x \exists y(xy \geq 1)$$

25. Sean p, q y r proposiciones. Demuestre la siguiente equivalencia usando álgebra de proposiciones.

$$\{\neg(p \wedge \neg q) \wedge [(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow r)]\} \wedge (q \rightarrow p) \Leftrightarrow \neg p \rightarrow \neg q$$

26. Escriba en lenguaje natural, la contrapositiva, la recíproca y la inversa de la proposición: ”Si no soy hollandero, entonces soy maguiro o soy garfiero”

27. Sean p, q, r, s, t y u proposiciones. Demuestre la siguiente inferencia.

$$\begin{array}{ll} P_1 & \neg p \longrightarrow q \\ P_2 & p \longrightarrow (r \vee \neg s) \\ P_3 & \neg q \wedge t \\ P_4 & t \longrightarrow s \\ \hline \therefore & r \vee \neg t \end{array}$$

28. Sean p, q, r y s proposiciones. De los siguientes enunciados, escoja cinco incisos. Coloque entre los paréntesis de cada enunciado seleccionado, V si el enunciado es verdadero o F si es falso. No es necesario escribir ninguna justificación. Se contabilizan aciertos menos errores.

    a) ( ) Si $p \Leftrightarrow q \vee r$ y $p \Leftrightarrow s$, entonces $\neg s \Rightarrow \neg q$.
    b) ( ) Si $p \wedge q \Rightarrow r$, entonces $s \rightarrow p \Rightarrow s \rightarrow (q \rightarrow r)$.
    c) ( ) La proposición $[(p \rightarrow p) \leftrightarrow (q \rightarrow \neg q)] \vee [(p \wedge r) \rightarrow (q \vee s)]$ puede ser falsa.
    d) ( ) Si $p \Rightarrow q \wedge r$, entonces $p \rightarrow s \Rightarrow (q \wedge r) \rightarrow s$.
    e) ( ) Si $p \rightarrow q \Rightarrow r$, entonces $\neg r \Rightarrow \neg q \wedge p$.
    f) ( ) Si $p \Rightarrow q$ y $q \Rightarrow p \wedge r$, entonces $\neg p \Leftrightarrow \neg q$.
    g) ( ) La proposición $[\neg(p \rightarrow q) \leftrightarrow (p \wedge \neg q)] \rightarrow [(p \rightarrow p) \rightarrow (q \leftrightarrow \neg q)]$ puede ser verdadera.

29. Modele los siguientes enunciados considerando un Dominio de Validez Irrestricto

    a) "No existe un geek que no haya visto todas las películas de super heroes" donde $p(x)$ = "x es geek", $q(x, y)$ = "a x ha visto y" y $r(x)$ = "x es una película de super heroes".
    b) "Para cada variante hay al menos un portal que le permite conocer a una variante diferente" donde $p(x)$ = "x es variante", $q(x)$ = "x es portal" y $r(x, y)$ = "x te permite conocer a y".
    c) "Existe un único ser poderoso capaz de usar el guantelete del infinito" donde $p(x)$ = "x es un ser poderoso" y $q(x)$ = "x es capaz de usar el guantelete del infinito".

30. Sean $p(x)$ y $q(x)$ proposiciones abiertas. Demuestre la siguiente equivalencia.

$$[\forall x \neg p(x) \rightarrow \forall x \neg q(x)] \rightarrow \exists x p(x) \Leftrightarrow \exists x[p(x) \vee q(x)]$$

31. Sean $p(x), q(x)$ y $r(x)$ proposiciones abiertas. Demuestre la siguiente inferencia.

$$\begin{array}{ll} P_1 & \exists x\{[p(x) \rightarrow q(x)] \wedge r(x)\} \\ P_2 & \neg \exists x q(x) \\ \hline \therefore & \neg \forall x p(x) \end{array}$$

32. Demuestre o refute las siguientes afirmaciones:

    a) $\forall x[x^2 + 2 > 1]$, dominio de discurso $D = \mathbb{R}$
    b) $\forall x \exists y[x^2 + y > 20]$, dominio de discurso $D = \mathbb{R}$

33. Utilice una tabla de verdad para mostrar que las proposiciones son equivalentes:

$$\sim p \rightarrow (\sim p \wedge \sim q) \equiv \sim p \rightarrow \sim q$$

34. Dada la proposición directa: Si el hombre hace su historia, entonces el destino es un mito. Determine cada una de las proposiciones condicionales relacionadas: La recíproca, la inversa y la contrapositiva. (en símbolos y palabras).

35. Para la proposición directa $p \rightarrow\sim q$, escriba: La recíproca, la inversa y la contrapositiva en símbolos.

36. Determine si el argumento es válido o no válido (use tabla de verdad):

    Si el delfín es un pez, entonces: el delfín es ovíparo y tiene branquias.
    No es cierto que : el delfín es ovíparo y tiene branquias.
    ___
    No es cierto que el delfín es un pez.

37. Sea $P(x)$ la función proposicional "x es un entero" y sea $Q(x)$ la función proposicional "x es un número par". El dominio de discurso es el conjunto de todos los números reales.

38. Escriba cada proposición en palabras. Determine el valor de verdad de cada proposición.

    a) $\forall x\, Q(x)$
    b) $\exists x\, Q(x)$
    c) $\exists x\, (P(x) \rightarrow Q(x))$
    d) $\forall x\, (P(x) \wedge Q(x))$

39. Escriba la negación de cada proposición en símbolos y palabras. Determine el valor de verdad de cada proposición.

    E. $\forall x\, Q(x)$
    F. $\exists x\, Q(x)$
    G. $\exists x\, (P(x) \rightarrow Q(x))$
    H. $\forall x\, (P(x) \wedge Q(x))$

40. Simplificar la siguiente expresión lógica:

$$(\sim p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow q)$$

41. Determinar los valores de verdad de las proposiciones simples a, b, c para que la proposición compuesta: $[\neg(\neg a \rightarrow c) \rightarrow (a \vee \neg b)] \wedge (\neg a \wedge \neg c)$ sea verdadera:

    Justifique su respuesta con base en las definiciones de los operadores lógicos.

42. Representar la proposición $(\neg p \rightarrow q) \vee r$ usando únicamente el operador NAND.

43. Si $(\neg p \rightarrow q) \vee r$ es una proposición falsa, determinar el valor de verdad de la proposición:

    "La proposición $(\neg p \wedge \neg q) \rightarrow r$ es verdadera"

44. Determinar la inversa en lenguaje natural de: “No es verdad que, invierto mi dinero y no lo deposito en una cuenta de ahorros”

45. Representar la proposición $(\neg p \to q) \vee r$ usando únicamente el operador NOR.

46. Determinar la negación de la proposición, en lenguaje natural y en lenguajes formal, sin que la negación anteceda ni cuantificadores ni conectores. Dominio Alumnos de ESCOM

    Proposición: “Ningún alumno de esta clase que repruebe Matemáticas Discretas cursará alguna asignatura relacionada con programación”

47. Demuestre la validez del argumento mediante leyes de inferencia: Si hoy es jueves tengo examen de MateDiscretas; pero si hoy es sábado, me voy de fiesta. No tengo examen de MateDiscretas o no me voy de fiesta. Por lo tanto, hoy no es jueves o hoy no es sábado.

48. Demuestre la validez del argumento mediante leyes de inferencia: Si hoy es jueves tengo examen de MateDiscretas; pero si hoy es sábado, me voy de fiesta. Hoy es jueves o hoy es sábado. Por lo tanto, tengo examen de MateDiscretas o me voy de fiesta.

49. Sean p, q, r y s 4 proposiciones simples. Obtenga la tabla de verdad de las 4 proposiciones simples y evalúe la proposición compuesta:

$$[(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)] \to \neg[(r \vee \neg s) \wedge (s \vee \neg r)]$$

50. Simplifique la siguiente proposición lógica hasta su forma más compacta. ¿La expresión final es una tautología?

$$\neg\{[z \wedge (p \wedge \neg q)] \vee (p \wedge \neg q) \wedge \neg z\} \wedge \{\neg(q \wedge \neg p)\} \wedge \{[\neg w \vee (q \vee \neg p)] \vee [(\neg p \vee q) \wedge w]\}$$

51. ¿Cuáles asignaciones de valores de verdad de las proposiciones $p, q, w, x, y, \& z$ logra que la siguiente proposición compuesta sea verdadera?

$$(q \vee \neg x \vee z) \wedge (p \vee y \vee \neg z) \wedge (w \vee x \vee \neg y) \wedge (q \vee \neg p \vee x) \wedge (\neg q \vee w \vee y) \wedge (\neg w \vee p \vee z)$$

52. Utilizando las reglas de inferencia lógica demuestre que a partir de las premisas cuantificadas se llega a la conclusión indicada:

$$\begin{array}{c} \forall x\,(p(x) \to q(x)) \\ \forall y\, r(y) \\ \forall z\,[(q(z) \wedge r(z)) \to s(z)] \\ \hline \forall w\,[p(w) \to s(w)] \end{array}$$

53. Reescriba la proposición (a) en términos exclusivamente de operadores lógicos NAND ($\uparrow$) o NOR ($\downarrow$). Exprese las proposiciones (b) y (c) en términos de los operadores ($\wedge, \vee, \neg$).

    a) $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$

    b) $(p \uparrow q) \downarrow z$

    c) $(p \downarrow q) \uparrow z$

54. Reescriba formalmente, los siguientes planteamientos y llegue a una conclusión lógica:

    a) "Si uno está loco, uno no puede realizar misiones de vuelo y uno tiene que estar loco para volar".

    b) "Para estar exento de volar se tiene que realizar una solicitud al escuadrón, y al entregar la solicitud se demuestra que uno no está loco".

    c) Determine si emprenderá el vuelo o no.

55. Determine la validez de los siguientes argumentos por el método indicado.

    ARGUMENTO 1. (Realizando álgebra de proposiciones).

$$\begin{array}{c} p \to q \\ p \\ \neg q \vee r \\ \hline \therefore\ r \end{array}$$

    ARGUMENTO 2. (Con una tabla lógica).

$$\begin{array}{c} (p \wedge q) \to r \\ \neg q \\ p \to \neg r \\ \hline \therefore\ \neg p \vee \neg q \end{array}$$

    ARGUMENTO 3. (Método deductivo utilizando leyes de inferencia).

$$\begin{array}{c} p \to (q \to r) \\ (s \vee p) \\ t \to q \\ \neg s \\ \hline \therefore\ \neg r \to \neg t \end{array}$$

56. Construir el argumento para demostrar por contradicción que las premisas siguientes implican la conclusión "está nevando".

    Si no está nevando o no está lloviendo, salgo a correr y desayuno temprano. Si salgo a correr, escucho música. No escuché música.

57. Demostrar si la afirmación es verdadera o falsa en el dominio de discurso de los números reales,

$$\exists x, x > 1 \rightarrow \frac{x}{x^2+1} < \frac{1}{3}$$

58. Considere la siguiente proposición compuesta y a partir de ésta exprésela utilizando únicamente la conectiva NAND,

$$(p \rightarrow q) \wedge p \wedge (\neg q \vee r)$$

59. Demuestre o refute que $A^c - B = (A - B)^c$.

60. Demuestre o refute que si $A \subset B$ entonces $P(A) \subset P(B)$.

61. Simplificar la siguiente expresión (coloque qué leyes ocupa en cada paso)

$$(B - (A \cap C)) \cup (A \cup (B \cap C))$$

62. Realizar la tabla de verdad de $(p \oplus (q \vee r)) \leftrightarrow (\neg r \oplus q)$, donde $\oplus$ se define en la tabla de abajo ("xor" o "or-exclusivo"). Finalmente, escribir $\oplus$ en términos de $\neg, \vee, \wedge$.

p	q	$p \oplus q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

63. Determinar si existen valores de verdad de las variables en las proposiciones compuestas, de modo que la proposición tome el valor falso:

$$[\neg p \wedge (p \vee q)] \rightarrow [\neg(p \leftrightarrow q)]$$

64. Simplificar las siguientes proposiciones compuestas mediante equivalencias las proposiciones siguientes brindando las razones (reglas del algebra de proposiciones) de su simplificación:

$$\neg[[(p \vee q) \wedge r] \rightarrow [\neg(q \vee r)]]$$

65. Usando las reglas de inferencia, verificar por contradicción que el siguiente argumento es válido (escriba en forma vertical y justifique cada paso):

$$[((p \vee q) \rightarrow r) \wedge \neg q \wedge (p \rightarrow \neg r)] \rightarrow (\neg p \vee \neg q)$$

66. Escriba el siguiente enunciado en lenguaje proposicional y, verifique que el resultado constituye un argumento válido (lo último usando las reglas de inferencia, escriba en forma vertical y justifique cada paso):

    Voy al colegio o me quedo en casa. Si voy al colegio, entonces, asistiré al laboratorio de química. Si me quedo en casa, entonces, estudiaré matemáticas. No estudié matemáticas. Conclusión: Asistí al laboratorio de química.[escriba lo que representan las variables que utiliza]

67. Simbolizar con cuantificadores y negar la siguiente proposición: “Todos los adultos que salen a festejar Halloween son felices” [escriba lo que representan las variables que utiliza].

68. Sin usar tablas de verdad pruebe que

$$p \Leftrightarrow \neg q \equiv (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$$

69. Realice la tabla de verdad de la siguiente proposición compuesta

$$(p \Rightarrow (q \Rightarrow s)) \wedge (\neg r \vee p) \wedge q$$

70. Establezca la validez de los argumentos siguientes: “Todos los enteros son números racionales”, “Algunos enteros son potencias de dos”. Por tanto “Algunos números racionales son potencias de dos”

71. Demuestre la equivalencia siguiente comprobando la equivalencia de su proposición dual

$$(p \wedge (p \Leftrightarrow q)) \Rightarrow q \equiv T$$

72. Construya un argumento para mostrar que las hipótesis: “Si no hace mucho calor o si no hay mosquitos, se celebrará el torneo de ajedrez y se hará una demostración de esgrima”, “Si se realiza el torneo de ajedrez se entregará el diploma”, “El diploma no se ha entregado” implican “Hace mucho calor ”

73. Sin usar tablas de verdad compruebe que el siguiente conjunto de premisas es inconsistente

$$p \Rightarrow q, (q \vee r) \Rightarrow s, s \Rightarrow \neg p, p \wedge \neg r$$

74. Realice la tabla de verdad de la siguiente proposición compuesta

$$((p \rightarrow q) \rightarrow r) \rightarrow s$$

75. Demuestre que la conclusión $\forall x(P(x) \Rightarrow \neg Q(x))$ se deduce de las premisas

$$\exists(P(x) \land Q(x)) \Rightarrow \forall y(R(y) \Rightarrow S(y)) \quad \text{y} \quad \exists y(R(y) \land \neg S(y))$$

76. Verifique la validez de los siguientes enunciados "Juan, un estudiante de la facultad tiene un coche blanco", "A todos los que tienen un coche blanco los han multado alguna vez por exceso de velocidad". Implican "A alguien de la facultad le han multado por exceso de velocidad"

77. Determinar si los siguientes argumentos son válidos:

    a) Todos los que han pasado por la Universidad han vivido en una residencia. Laura no ha vivido en una residencia. Por lo tanto, Laura no ha pasado por la Universidad.
    b) Los automóviles descapotables son divertidos de conducir. El automóvil de Raúl no es descapotable. Por lo tanto, el automóvil de Raúl no es divertido de conducir.
    c) A Miguel le gustan las películas de acción. A Miguel le gusta la película "En la línea de fuego". Por lo tanto, "En la línea de fuego" es una película de acción.
    d) Todos los pescadores de langostas ponen al menos una docena de nasas. Erick es un pescador de langostas. Por lo tanto, pone al menos una docena de nasas.

78. Demostrar que las siguientes proposiciones son equivalencias a través de equivalencias lógicas.

    a) $\neg p \rightarrow (q \rightarrow r) \equiv q \rightarrow (p \lor r)$
    b) $p \leftrightarrow q \equiv \neg p \leftrightarrow \neg q$

79. Determine si los siguientes enunciados son proposiciones. En caso de ser proposiciones escribir su negación.

    a) $2 + 5 = 19$
    b) Mesero, ¿Serviría las nueces, quiero decir, servirá las nueces a los invitados?
    c) Pelame una uva.

80. Determinar si las siguientes proposiciones son contingencias o contradicciones. Argumentar.

    a) $(p \rightarrow q \rightarrow r)$
    b) $q \leftrightarrow (\neg p \lor \neg q)$

81. Realizar la tabla de verdad de la siguiente proposición compuesta con p, q, r proposiciones.

    a) $(p \top (q \vee r)) \leftrightarrow (r \top q)$

    donde

p	q	$p \top q$
V	V	V
V	F	V
F	V	F
F	F	F

    Además escribir la proposición $p \top q$ en términos de $\neg, \vee, \wedge$

82. Simplificar mediante equivalencias las proposiciones siguientes brindando las razones de su simplificación:

    a) $\neg[\neg[(p \vee q) \wedge r] \wedge \neg(q \vee r)]$
    b) $(p \rightarrow q) \wedge [\neg q \wedge (r \vee \neg q)] \wedge (\neg q \rightarrow \neg p)$

83. Utilizando la tabla de inferencias básicas verificar que los siguientes son argumentos válidos (hacer al menos uno por contradicción).

    a) $[a \rightarrow (b \rightarrow c)] \wedge [d \rightarrow (b \wedge \neg c)] \Rightarrow \neg(a \wedge d)$
    b) $[p \rightarrow (q \rightarrow r)] \wedge [p \vee s] \wedge [t \rightarrow q] \wedge [\neg s] \Rightarrow \neg r \rightarrow \neg t$

84. Dado el siguiente conjunto de premisas Si no voy al concierto entonces me podré comprar ropa. Si no me compro ropa entonces podré ir a la fiesta en Cuernavaca. Sólo puedo hacer una cosa. ¿Que voy a hacer?

    a) Iré al concierto.
    b) Iré a la fiesta en Cuernavaca.
    c) Compraré ropa.
    d) Ninguno de las anteriores.
    e) Comprare ropa y podré ir donde quiera.

85. Simbolizar con cuantificadores y negar la siguientes proposiciones:

    a) Todos los que van al cine tienen dinero y alguien que los acompañe o les gusta mucho el olor a palomitas.
    b) Hay seres vivos en otros planetas si hay microorganismos que transformen CO_2 en Oxigeno en esos planetas.

86. Dada la siguiente declaración, a través de una tabla de verdad diga si es una tautología, una contradicción o ninguna de las dos

$$P \lor (\neg P \land Q)$$

87. Dados dos conjuntos A y B, pruebe la siguiente ley de Morgan:

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

88. Realizar la tabla de verdad de $(p \oplus (q \leftrightarrow r))$, donde $\oplus$ se define en la tabla de abajo (diga si es tautología, contingencia o contradicción). Finalmente, escribir $\oplus$ en términos de $\neg, \lor, \land$.

p	q	$p \oplus q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

$\oplus$ Es el "xor" o "or-exclusivo"

89. Determinar un conjunto de valores de verdad para las variables, de modo que la siguiente proposición tome el valor falso:

$$[(p \lor r) \land ((p \land r) \to (q \lor r)) \land (\sim r \lor q)] \to [p \to q]$$

90. Simplificar la siguiente proposición compuesta mediante equivalencias, brindando TODAS las razones de su simplificación (reglas del algebra de proposiciones):

$$[p \land (p \to q)] \to q$$

91. Verificar por contradicción que el siguiente argumento es válido (escriba en forma vertical y brinde la regla de inferencia que justifica cada paso):
$[j \to (k \to m)] \land [a \to b] \land [b \to p] \land [\sim a \to r] \land [s \to (\sim m \land k)] \land [(p \lor r) \to j] \land [(\sim d \lor \sim s) \to h]$ por lo tanto $\sim q \lor h$.

92. Simbolice con cuantificadores [usando las letras resaltadas] y verifique la validez del argumento:
"Cualquiera que es bueno en Lógica, es bueno Evaluando argumentos válidos." "Cualquiera que tiene Competencias matemáticas altas es bueno en lógica." "Cualquiera que es bueno evaluando argumentos válidos admira a Bertrand Russell". Entonces "nadie que no admira a Bertrand Russell tiene competencias matemáticas altas".

93. Realice la tabla de verdad para la siguiente expresión.

$$[(\sim p \to q) \land (\sim q \lor r) \land (\sim r)] \to \sim p$$

94. a) Utilice la primer regla de sustitución para demostrar que la siguiente proposición es una tautología.

$$(t \leftrightarrow (r \wedge s)) \leftrightarrow (t \leftrightarrow (r \wedge s)) \wedge (\sim q \vee (t \leftrightarrow (r \wedge s)))$$

b) Utilizando las leyes de la lógica y la segunda regla de sustitución simplifique la siguiente proposición.

$$[(p \vee q) \wedge (p \to r) \wedge (q \to r)] \to r$$

95. a) Muestre con un contraejemplo que el siguiente argumento no es válido

$p \to (q \vee \sim r)$
$\sim p \vee r$
p
$\sim q \vee \sim s$
____
$\therefore s$

b) Demuestre por ambos métodos que el siguiente argumento es válido

$r \to \sim q$
$r \vee s$
$s \to \sim q$
$p \to q$
____
$\therefore \sim p$

96. Demuestre o refute las siguiente afirmación.

$$\exists x \forall y [x^2 > y + 2], \text{ dominio de discurso } D = \mathbb{R}$$

97. Pasar al lenguaje simbólico los siguientes enunciados.

a) Todo lo que brilla es oro.

b) Ningún objeto que brilla es oro.

c) No se puede hacer una copia de seguridad del sistema de archivos si hay un usuario en ese momento conectado.

98. Realizar la tabla de verdad de la siguiente proposición compuesta con p, q, r proposiciones.

    a) $(p\top(q \vee r)) \leftrightarrow (r\top q)$

    Donde

p	q	$p\top q$
V	V	V
V	F	V
F	V	F
F	F	F

    Además escribir la proposición $p\top q$ en términos de $\neg, \vee, \wedge$.

99. Simplificar mediante equivalencias las proposiciones siguientes brindando las razones de su simplificación:

    a) $\neg[\neg[(p \vee q) \wedge r] \wedge \neg(q \vee r)]$

    b) $(p \to q) \wedge [\neg q \wedge (r \vee \neg q)] \wedge (\neg q \to \neg p)$

100. Verificar que los siguientes son argumentos válidos (hacer al menos uno por contradicción).

    a) $([a \to (b \to c)] \wedge [d \to (b \wedge \neg c)]) \Rightarrow \neg(a \wedge d)$

    b) $([p \to (q \to r)] \wedge [p \vee s] \wedge [t \to q] \wedge [\neg s]) \Rightarrow \neg r \to \neg t$

101. En un juicio, el abogado de la defensa argumenta lo siguiente:
    Si mi cliente es culpable, entonces el cuchillo estaba en el cajón. El cuchillo no estaba en el cajón o Juan Pérez vio el cuchillo. Si el cuchillo no estaba allí el 10 de octubre, se deduce que Juan Pérez no vio el cuchillo. Además, si el cuchillo estaba allí el 10 de octubre, entonces el cuchillo estaba en el cajón y también el martillo estaba en el granero. Pero todos sabemos que el martillo no estaba en el granero. Por lo tanto, damas y caballeros del jurado, mi cliente es inocente. Use lógica proposicional para demostrar que este es un argumento válido.

102. ¿Cuál es el valor de verdad de los siguientes enunciados? Considere como dominio el conjunto de números enteros.

    a) $\forall x, \exists y, (x + y = x)$

    b) $\forall x, \exists y, (x + y = 0)$

    c) $\forall x, \forall y, (x < y \vee y < x)$

    d) $\exists x, \exists y, (x^2 = y)$

103. Traduzca el siguiente argumento en forma simbólica, después use reglas de inferencia para demostrar que es un argumento válido:
Cada estudiante de informática trabaja más duro que alguien más. Todos los que trabajan más duro que cualquier otra persona duermen menos que esa persona. María es estudiante de informática. Por tanto, María duerme menos que alguien más.

104. Use equivalencias lógicas para demostrar que $[(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \to r)$ es una tautología.

105. Determine si es posible la validez del argumento haciendo uso de tablas lógicas.

$$\begin{array}{c} s \to (p \wedge \neg r) \\ p \to (r \vee q) \\ s \\ \hline \therefore q \end{array}$$

106. Demuestre que el argumento es válido por el método directo con leyes de inferencia:
Si estudio y trabajo, tengo poco tiempo para socializar. Estudio o práctico tenis. Si pinto, entonces trabajo. No práctico tenis. Por lo tanto, Si no tengo poco tiempo para socializar, no pinto.

107. Considere la siguiente proposición compuesta y a partir de ésta exprésela utilizando únicamente la conectiva NAND definida como: $p \uparrow q \equiv \neg(p \wedge q)$,

$$(p \to q) \wedge (\neg q \vee r)$$

108. Demuestre que la afirmación es falsa: $\exists x \in \mathbb{R}, \frac{1}{x^2+1} < 0$.

109. Simplifique a su mínima expresión la proposición compuesta,

$$(((p \vee q) \to \neg r) \wedge (\neg p) \wedge (\neg q \vee r)) \to r.$$

110. Determinar, mediante el álgebra de proposiciones, si la expresión es tautología, contradicción o contingencia. Indicar explícitamente la ley que usa.

$$T_0 \oplus ((p \downarrow q) \to \neg p)$$

111. Sean a: Deposito mi dinero en una cuenta de ahorros. b: Invierto mi dinero en acciones. Identificar la o las proposiciones equivalentes a la proposición “Es necesario depositar mi dinero en una cuenta de ahorro para no invertirlo en acciones”. Justificar su respuesta.

a) $a \to \neg b$
b) $\neg(a \wedge \neg b)$
c) $(\neg a \vee \neg b)$
d) $\neg(a \vee b)$
e) $\neg(\neg a \wedge \neg b)$

112. Formalizar el enunciado “Todos los alumnos del grupo 1BM2 están inscritos exactamente a un Club de ESCOM”. El universo son los alumnos de ESCOM.

113. Determinar la validez del argumento mediante leyes de inferencia. Indicar la ley o la equivalencia que utiliza en cada paso. Escribir el argumento en lenguaje natural estableciendo proposiciones de un tema de tu interés.

$$\begin{array}{l} P1 : \neg p \vee \neg q \\ P2 : \neg r \rightarrow s \\ P3 : \neg q \rightarrow \neg s \\ \hline C : r \vee \neg p \end{array}$$

114. Determina si el siguiente argumento es válido, mediante reglas de inferencia y equivalencias lógicas.

Algunos países que se comprometen al desarme nuclear no tienen armas nucleares. Algunos países que tienen armas nucleares se comprometen al desarme nuclear y algunos países que tienen armas nucleares no se comprometen. Todos los países comprometidos con el desarme nuclear y que tienen armas nucleares, las destruirán. Todos los países que destruirán armas nucleares, están comprometidos con el desarme. Por lo tanto, algunos países tienen armas nucleares y no las destruirán.

115. Calcula la tabla de verdad y determina si la proposición $(p \rightarrow (q \wedge r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$ es una tautología.

116. Demuestra el siguiente argumento:

$$A \wedge B \rightarrow \neg C$$

$$(\neg C \wedge D) \vee \neg B$$

$$\neg C \rightarrow \neg D$$

$$\therefore \ \neg A$$

117. Considere el operador $p \top q$ definido en la tabla de abajo:

p	q	$p \top q$
V	V	V
V	F	V
F	V	F
F	F	F

a) Realizar la tabla de verdad de la proposición compuesta $(p \top (q \vee r)) \leftrightarrow (r \top q)$.

b) Suponga que p = ”$17/95 \in Z$”; q = ”$\{95\} \in \{17, \{95\}\}$”; y r = ”$(u, l) \in \{P, A\} \times \{u, l\}$”. Use la tabla previa para determinar si $(p \top (q \vee r)) \leftrightarrow (r \top q)$ es valor falso o verdadero.

c) Escribir la proposición $p \top q$ en términos de $\neg$, $\vee$, $\wedge$.

118. Simplificar mediante equivalencias las proposiciones siguientes brindando las razones de su simplificación:

    a) $\neg[(p \vee \neg(q \wedge r)) \wedge \neg(q \vee r)]$

    b) $(\neg p \rightarrow \neg q) \wedge [\neg p \wedge (r \vee \neg p)] \wedge (q \rightarrow p)$

119. Verificar que los siguientes son argumentos válidos (hacer al menos uno por contradicción).

    a) $[(b \rightarrow a) \wedge [a \leftrightarrow (c \wedge d)] \wedge [\neg d]] \Rightarrow \neg b$

    b) $[(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \wedge [p \vee s] \wedge [t \rightarrow q] \wedge [\neg s]] \Rightarrow \neg r \rightarrow \neg t$

120. Si ganas la Olimpiada de Lógica entonces tuviste más aciertos que todos los demás competidores u otro participante fue descalificado. ¿Qué premisa hay que agregar a lo anterior para que se siga: Tuviste más aciertos que todos los demás competidores?

    a) No ganaste la Olimpiada de Lógica, pero alguien fue descalificado.

    b) Ganaste la Olimpiada de Lógica y otro participante fue descalificado.

    c) Ganaste la Olimpiada de Lógica y no tuviste más aciertos que todos los demás competidores.

    d) Ni otro competidor fue descalificado ni obtuviste más aciertos que todos los demás competidores.

    e) No es el caso que: no ganes la Olimpiada u otro competidor sea descalificado.

121. *a*) Simbolizar con cuantificadores la siguiente proposición: “Algunos seres humanos comen todos los días y se divierten sin embargo todos se preocupan del futuro o viven recordando el pasado y respiran oxígeno”.

    b) Negar la proposición obtenida en el inciso anterior (simplificar si es posible) y escribir en palabras lo que obtuvo.

122. Simbolizar mediante cuantificadores cada inciso y su equivalente en el cuantificador opuesto:

    a) Todos los perros son animales

    b) Ningún presidente de los E.U. fue un inmigrante

    c) Algunas mujeres aman a sus esposos

    d) Algunos hombres tienen una única novia.

123. Mediante inferencia lógica:

   a) Demostrar:

$$[(\sim p \rightarrow (r \wedge \sim s)) \wedge (t \rightarrow s) \wedge (u \rightarrow \sim p) \wedge \sim w \wedge (u \vee w)] \vdash \sim t$$

   b) Demostrar, por reducción al absurdo: $\sim [t \vee p]$

$$1.\ \sim t \vee \sim r$$

$$2.\ \sim r \rightarrow s$$

$$3.\ \sim s \wedge \sim p$$

124. Se sabe que la proposición $(\neg p \rightarrow \neg q) \vee (r \oplus q)$ es una proposición falsa. Determinar el valor de verdad de la proposición $(\neg q \rightarrow [(p \leftrightarrow q) \wedge r])$

125. *a*) Formalizar la proposición
   "Nadie que no sea bueno en lógica es bueno evaluando argumentos válidos"

   b) Escribir la negación de la proposición, en lenguaje natural, sin anteponer al cuantificador una frase negativa.

126. Determinar, mediante el álgebra de proposiciones y definiciones de los conectores, si la proposición es una tautología, una contradicción o una contingencia. Indicar explícitamente la ley o la definición que usa.

$$(\neg p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$$

127. Demostrar la validez del siguiente argumento mediante leyes de inferencia

$$q \vee \neg p$$

$$q \rightarrow (\neg s \rightarrow r)$$

$$\neg s$$

$$\therefore\ r \vee \neg p$$

128. Formalice los enunciados, en caso de que se pueda expresar como una implicación, determine su inversa, recíproca y contrapositiva en lenguaje coloquial.

   Si hace frío, él lleva bufanda.

   Sólo si Rafael estudia aprobará el examen.

129. Usando álgebra proposicional simplifique la proposición hasta su forma más simplificada.

$$(p \vee \neg r) \wedge \neg((q \vee r) \vee \neg(r \vee p))$$

130. Determine el valor de verdad de cada afirmación, considerando que el dominio de discurso es el conjunto de los números reales.

$$\exists x \left(\frac{1}{x^2+1} > 1 \right)$$

$$\forall x (x > 1 \rightarrow x^2 > x)$$

131. Determine la validez del argumento: Todos en clase tienen una calculadora que grafica. Todos los que tienen calculadora que grafica entienden las funciones trigonométricas. Por lo tanto, Rafael, que está en la clase, entiende las funciones trigonométricas.

132. Usando leyes de inferencia determine si el argumento es válido.

$$p \rightarrow (q \vee r)$$

$$\neg q$$

$$r \rightarrow s$$

$$\neg s$$

$$\therefore \ \neg p$$

133. Reescriba la proposición compuesta únicamente en términos del operador NOR (↓).

$$(p \vee q) \leftrightarrow (\neg r \vee (s \wedge t))$$

134. Construya la tabla de verdad de la siguiente proposición.

$$p \rightarrow \neg q \wedge r \leftrightarrow \neg p \vee r$$

135. Utilizando las leyes de la lógica y la segunda regla de sustitución simplifique la siguiente proposición.

$$(((q \wedge (p \vee q)) \wedge r) \vee \neg(q \rightarrow r)) \wedge (q \rightarrow p) \wedge (\neg p \vee \neg q)$$

136. Utilice la primera regla de sustitución para demostrar que la siguiente proposición es una tautología

$$((\neg p \rightarrow q) \vee ((r \leftrightarrow q) \wedge (q \wedge p))) \leftrightarrow (((\neg p \rightarrow q) \vee (r \leftrightarrow q)) \wedge ((\neg p \rightarrow q) \vee (q \wedge p)))$$

137. a) Compruebe que las premisas $p \rightarrow q$, $(q \vee r) \rightarrow s$, $s \rightarrow \neg p$, $p \wedge \neg r$ son inconsistentes.

b) Pase al lenguaje simbólico el siguiente argumento. Establezca después la validez del argumento o proporcione un contraejemplo para probar que no es válido.

Si hace frío el viernes, entonces una condición suficiente para que Cristóbal utilice su abrigo es que los bolsillos estén remendados. El pronóstico para este viernes es de clima frío, pero los bolsillos no están remendados. Por lo tanto Cristóbal no usará su abrigo este viernes.

138. Demuestre o refute las siguientes afirmaciones.:

   a) $\exists x \left[\frac{1}{x^2+5} > 1\right]$, dominio de discurso $D = \mathbb{R}$

   b) $\exists y \forall x [x^2 < y + 1]$, dominio de discurso $D = \mathbb{R}$

139. Escriba el argumento en forma simbólica para mostrar que es válido.

   Domingo, un estudiante de esta clase, sabe programar en JAVA.
   Todos los que saben programar en JAVA pueden conseguir trabajos bien remunerados.
   Por tanto, alguien en esta clase puede conseguir un trabajo bien remunerado.

140. *a*) Realizar la tabla de verdad de $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r)$.

   b) Suponga que p = "$17/95 \in \mathbb{Z}$"; q = "$\{95\} \in \{17, \{95\}\}$"; y r = "$(u, l) \in \{P, A\} \times \{u, l\}$". Use la tabla previa para determinar si $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r)$ es valor falso o verdadero.

141. Simplificar la siguiente proposición compuesta mediante equivalencias, brindando TODAS las razones (reglas del álgebra de proposiciones) de su simplificación: $\neg(a \vee b) \vee [(\neg a \wedge b) \vee \neg b]$.

142. Verificar por contradicción que el siguiente argumento es válido (escriba en forma vertical y brinde la regla de inferencia que justifica cada paso):

$$\begin{array}{l} q \rightarrow p \\ p \leftrightarrow (r \wedge s) \\ \neg s \\ \hline \neg q \end{array}$$

143. Simbolice con cuantificadores [usando las letras resaltadas] y verifique la validez del argumento (mediante reglas de inferencia y cuantificadores): "Todo el que no es un Tonto puede usar la Lógica". "Ningún tonto es apto para formar parte de un Jurado". "Ninguno de tus Primos puede usar la lógica". Por lo tanto, "ninguno de tus primos es apto para formar parte de un jurado".

Unidad 2

1. Mediante el álgebra de conjuntos,

    a) Demuestre:
    $$(A \cap B^c) \cup (A^c \cap B) \cup (A \cap B) = A \cup B$$

    b) Simplifique:
    $$(A^c \cap B^c) \cup (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B) \cup (A \cap B) =$$

2. Las afirmaciones siguientes utilizan subconjuntos de algún conjunto universal no vacío U. Diga cuáles son verdaderas y cuáles son falsas. Para las falsas, proporcione un ejemplo en el que la afirmación no se cumpla.

    a) $(A \cup B) \subseteq (A \cap B)$ implica que $A = B$.
    b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$ para todo A, B, C.
    c) $A \cap (\emptyset \cup B) = A$ siempre que $A \subseteq B$.
    d) $A \cap B = A^c \cup B^c$ para todo A, B.

3. Demuestre de forma analítica (Sin diagramas de Venn y casos particulares de conjuntos, sólo de ser falsa la afirmación):

    a) Si $A - B \subseteq C$ si y solo si $A - C \subseteq B$
    b) $B \setminus A \subseteq B \cap A^c$
    c) Si $A \subseteq B$ si y solo si $B^c \subseteq A^c$

4. Utilizar el álgebra de conjuntos para simplificar a su mínima expresión el conjunto.

$$((A \oplus B) - B) \cup (B - (A \oplus B))$$

5. 900 futbolistas profesionales fueron entrevistados con los siguientes resultados:

   200 tienen piscina

   305 tienen una segunda casa

   120 tienen un barco

   45 tienen un barco y una segunda casa

   30 tienen piscina y una segunda casa

   32 tienen un barco y una piscina

   16 tienen los tres.

   a) Dibuje un diagrama de Venn para mostrar esta información. Utiliza A para representar el conjunto de futbolistas que tienen piscina, B el conjunto de futbolistas que tienen una segunda casa y C el conjunto de futbolistas que tienen un barco.
   b) ¿Cuántos futbolistas tienen solo una de ellas?
   c) ¿Cuántos futbolistas tienen exactamente dos de ellas?
   d) ¿Cuántos futbolistas no tienen ninguna de las tres?

   Nota: en b), c) y d) Justifica ampliamente tu respuesta y escribe el conjunto que da respuesta a la pregunta.

6. Construya el argumento en forma simbólica para mostrar que es válido.

   A Alguien de tu clase le gusta observar las ballenas.
   Todas las personas a las que les gusta observar las ballenas se preocupan por la contaminación del océano.
   Por tanto, hay una persona en esta clase que se preocupa por la contaminación del océano.

7. Considere el conjunto A como el conjunto formado por las primeras 4 letras de su primer apellido (consideradas cada una por separado) y el conjunto $B = \{2, 3, 5\}$. Halle lo siguiente:

   a) $\mathcal{P}(A)$
   b) $A \times B$

8. Demuestre o refute lo siguiente:

   a) Si $A \triangle C = B \triangle C$, entonces $A = B$
   b) $A \subseteq B$ si y sólo si $A \cap \overline{B} = \emptyset$

9. Relacione cada conjunto o conjuntos en la columna I con la descripción que le corresponda de la columna II.

I	II
1. $\{p\}, \{q\}, \{p, q\}, \emptyset$	**A.** el complemento de $\emptyset$
2. $\{p\}, \{q\}, \emptyset$	**B.** los subconjuntos de $\{p, q\}$
3. $\{a, b\}$	**C.** el complemento de $\{c, d\}$, si $U = \{a, b, c, d\}$
4. $\emptyset$	**D.** el complemento de U
5. U	**E.** el complemento de $\{b\}$, si $U = \{a, b\}$
6. $\{a\}$	**F.** los subconjuntos propios de $\{p, q\}$

10. Melissa Young, directora de Ayuda Financiera de una pequeña universidad privada del Oeste Medio, inspeccionó los registros de 100 estudiantes de segundo año y encontró lo siguiente:

   I) 49 reciben beca del gobierno,
   II) 55 reciben becas privadas,
   III) 43 reciben ayuda de la universidad,
   IV) 23 reciben becas del gobierno y becas privadas,
   V) 18 reciben becas del gobierno y ayuda de la universidad,
   VI) 28 reciben becas privadas y ayuda de la universidad,
   VII) 8 reciben ayuda de las tres fuentes.

   ¿Cuántos de los estudiantes en la encuesta

   a) cuentan solamente con becas del gobierno?
   b) cuentan con una beca privada pero no con beca del gobierno?
   c) reciben ayuda financiera sólo de una de estas fuentes?

11. Realice las siguientes operaciones. Sean

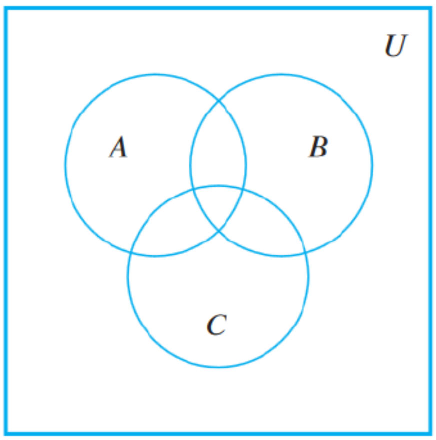
$$U = \{a, b, c, d, e, f, g\},$$
$$X = \{a, c, e, g\},$$
$$Y = \{a, b, c\},$$
$$Z = \{b, c, d, e, f\}.$$

   a) $Y^C - X =$
   b) $Y \times Z =$

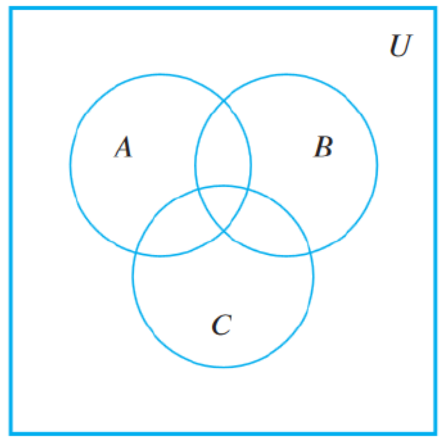
12. Utilizando las propiedades de álgebra de conjuntos demuestre que:

$$(A - B) - C = A - (B \cup C)$$

13. Ilustre en los diagramas sombreando la región correspondiente.



a) $(A \cup (B \cap C))$



b) $(A \cup B) \cap (A \cup C)$

14. Simplifique la siguiente expresión:

$$A \cap ((B \cup A^C) \cap B^C)$$

15. Demostrar que:

a) $(A \cup B) - (C - A) \equiv A \cup (B - C)$

b) $(A - B) \cup (B - A) \cup (A \cap B) \equiv (A \cap B)$

16. Demostrar que el siguiente enunciado es verdadero:

$$P(A) \cup P(B) \subseteq P(A \cup B)$$

17. Obtener el conjunto resultante y la cardinalidad:
$U = \{x \in \mathbb{N} \mid 0 < x \leq 10, x$ primeras cuatro letras de su nombre$\}$
$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 3r + 1, 1 \leq r \leq 3\}$
$B = \{x \in \mathbb{N} \mid x = \frac{2r}{3}, r \in \{3, 9, 12, 15, 6\}\}$
$C =$ primeras cuatro letras de su nombre

a) $(A \times B) \cup (A \times C)$

b) $(A \cap B^C) \cup (P(C) \cap C)$

18. Se realizó una encuesta a estudiantes de la ESCOM sobre qué sesiones colaboración de BZRP merece estar en el top 5 de sus mejores colaboraciones. Si consideramos al conjunto A como los que opinaron que la de “Shakira”, al conjunto B como los que opinaron que la de “Quevedo” y C como los que opinaron que la de “Villano Antillano”, algunos resultados que se obtuvieron fueron:

    a) $|A| = 20$
    b) $|B| = 13$
    c) $|C| = 30$
    d) $|A \setminus C| = 5$
    e) $|A \cup B| = 25$
    f) $|A \setminus (B \cup C)| = 5$
    g) $|B \cap C| = 15$

    Encuentre la cantidad de alumnos que:

    a) propusieron a “Quevedo” o a “Villano Antillano”;
    b) propusieron solamente a “Quevedo”;
    c) no propusieron a alguno de los tres.

19. Sean $\mathcal{U} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4, 6\}$ y $C = \{5, 6\}$. Complete con $\in$ o $\subseteq$ según corresponda. Se califican aciertos menos errores.

$1 \quad A$	$\{2, 6\} \quad A$	$\{2, 5\} \quad A \cup B^c$
$(5, 6) \quad C^2$	$\{(1, 2), (4, 6)\} \quad A \times B$	$(5, 6) \quad C \times A^c$
$\{\{2\}, \{2, 4\}\} \quad \mathcal{P}(B)$	$C \quad \mathcal{P}(C)$	$\{3, 6\} \quad \mathcal{P}(A) \cup [\mathcal{P}(B)]^c$
$\{\{3\}, \{1, 5\}\} \quad \mathcal{P}(B^c \cup C)$	$(5, \{4\}, 6) \quad A^c \times \mathcal{P}(B) \times C$	$\{(1, 3), (3, 3)\} \quad \mathcal{P}((B^c)^2)$
$\{(\{5\}, \{5, 6\})\} \quad [\mathcal{P}(C)]^2$	$\{(1, 2, \phi)\} \quad A \times B \times \mathcal{P}(C)$	$\{\{(1, \{4, 6\})\}\} \quad \mathcal{P}(A \times \mathcal{P}(B))$

20. Sean $A, B, C \subseteq \mathcal{U}$, $A_1 \subseteq \mathcal{U}_1$ y $A_2 \subseteq \mathcal{U}_2$. Resuelva dos de los siguientes incisos.

    a) Demuestre que si $A \subseteq C$ y $B \subseteq C^c$, entonces A y B son disjuntos.
    b) Demuestre que si $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(C)$ y $\mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(C)$, entonces $\mathcal{P}(A \cup B) \subseteq \mathcal{P}(C)$.
    c) Refute que $|\mathcal{P}(A_1 \times A_2)| = |\mathcal{P}(A_1) \times \mathcal{P}(A_2)|$.

21. Determina si la afirmación es falsa o verdadera.

    a) Sea $B = \{1, 2\}$. $1 \subset B$
    b) Sea $A = \{1\}$. $\{1\} \in P(A)$
    c) Sean $A = \{1\}$, $B = \{1, 2\}$. $A \in B$
    d) Sea $B = \{1, 2\}$. $\{\{2\}\} \subset P(B)$
    e) Sean $A = \{1\}$ y $B = \{1, 2\}$. $\phi \in P(A \times B)$
    f) $A \cup (A \cup B) = A$
    g) $A - B \subset A$
    h) $A \cup (B - A) = A \cup B$
    i) Si $A \cup C = B \cup C$ entonces $A = B$
    j) $A \oplus A = A$
    k) $A \oplus \emptyset = A$
    l) Sea $A = \{\{\}, \{1\}\}$. $\{1\} \subset A$
    m) Los enteros 14, 15, 21 son primos relativos dos a dos.

22. Determine lo siguiente:

    a) el complemento de $\emptyset$:
    b) los subconjuntos de $A = \{s, t\}$:
    c) el complemento de $B = \{1, 10\}$, si $U = \{1, 4, 7, 10\}$:
    d) el complemento de U:
    e) los subconjuntos propios de $C = \{m, n\}$:
    f) liste los miembros de $P(W)$, si $W = \{2, 3, 5\}$
    g) si $L = \{0, 4, 9\}$ calcule $|L|$:
    h) utilizando la información del inciso f) calcule $|P(W)|$:

23. De un grupo de 165 estudiantes: 8 toman francés, negocios y música; 20 toman francés y negocios; 33 están en francés y música; 24 en negocios y música; 79 en francés; 83 en negocios y 63 toman música.

    a) ¿Cuántos toman francés y música pero no negocios?
    b) ¿Cuántos toman negocios pero no francés ni música?
    c) ¿Cuántos toman francés o negocios o ambos?
    d) ¿Cuántos no toman ninguna de las tres materias?

24. Realice las siguientes operaciones.

    Sean $U = \{a, b, c, d, e, f, g\}$
    $X = \{b, c, d, e, f\}$
    $Y = \{a, c, e, g\}$
    $Z = \{a, b, c\}$

    a) $(X^C \cup Y) \cap (Z - X) =$

    b) $Y \times Z =$

25. Utilizando las propiedades de álgebra de conjuntos demuestre que:

$$(A^C - B) \cup (B - A) = A^C$$

26. Determinar el valor de verdad de cada uno de los enunciados

$$A = \{\emptyset, 1, 2, \{1\}\}$$

    a) $\emptyset \subseteq A$

    b) $\{\emptyset, 1\} \in A$

    c) $\{\{1, 2\}\} \subseteq P(A)$

    d) $\{\{1\}, 2\} \in P(A)$

    e) $\{(\{1\}, 1)\} \subseteq A \times A$

    f) $\{(\{1\}, 1)\} \in A \times A$

    g) $|P(P(P(\emptyset)))| = 4$

27. Sean A, B y C conjuntos. Demostrar que

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$

28. De tres de los principales periódicos de la CDMX son A, B y C se tiene la siguiente información: 35 % lee A, 42 % lee B, 51 % lee C, 4 % solo lee A y B, 10 % solo lee A y C, 15 % solo lee B y C, y 7 % de la población lee los tres periódicos.

    a) Dibuje un diagrama de Venn para representar esta información.

    b) ¿Qué porcentaje de la población lee exactamente dos periódicos?

    c) ¿Qué porcentaje de la población lee A o B pero no C?

    d) Una estación de radio local afirma que el 77 % de la población lee A o B. Determinar si el enunciado es verdadero o falso, justifique su respuesta.

29. Usar el Álgebra de conjuntos para representar el conjunto $(A \oplus B) - B$ mediante uniones, intersecciones y complementos y simplifique a su mínima expresión.

30. Indicar si la afirmación es verdadera o falsa:

    a) $A \triangle B = \{x | x \in A \cup B$ y $x \notin A \cap B\}$

    b) $A = B \leftrightarrow A \subseteq B$ o $B \subseteq A$
    Sea $B = \{3, 4, x, \{1, 2\}\} = \{3, 4, x, A\}$

    c) $|B| = 5$

    d) $\{1\} \in P(A)$

    e) $\{(3, 4)\} \in A \times B$

    f) $|P(B)| = 2^5$

    g) $\{\{\}\} \supseteq \{\{\}\}$

    h) $A \triangle B = (1, 2)$

    i) $\{x, \{1, 2, 2, 3\}\} = \{x, \{1, 2, 3\}\}$

    j) $A \triangle \overline{A} \neq U$

31. Demuestre la igualdad:
$$\overline{A \triangle B} = A \triangle \overline{B}$$

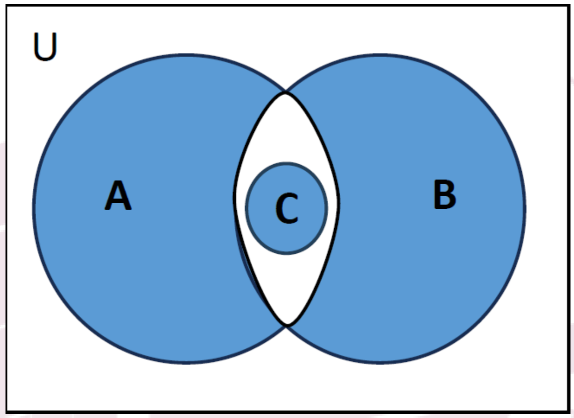
32. En una muestra de 120 personas, se reveló que 48 personas preferían practicar ciclismo (C), 78 preferían senderismo (S) y 66 preferían natación (N). También se encontró que 36 preferían cualesquiera dos de estos deportes y 24 gustaron de los tres deportes por igual. Construir el diagrama de Venn considerando los datos del problema para contestar la siguiente pregunta: ¿A cuántos les gusta natación o senderismo, pero no ciclismo?

33. Simplifique el conjunto a su mínima expresión utilizando las leyes del álgebra de conjuntos.
$$(A \cup B \cup C) \cap (A \cup D \cup \overline{B}) \cap (A \cup \overline{D} \cup C)$$

34. Demuestre que si $A \subset B$ entonces $B^c \subset A^c$.

35. Se encuesta a 180 familias consultando por el nivel educacional actual de sus hijos. Los resultados obtenidos son: **a)** 10 familias tienen hijos en Enseñanza Básica, Enseñanza Media y Universitaria. **b)** 16 familias tienen hijos en Enseñanza Básica y Universitaria. **c)** 30 familias tienen hijos en Enseñanza Media y Enseñanza Básica. **d)** 22 familias tienen hijos en Enseñanza Media y Universitaria. **e)** 72 familias tienen hijos en Enseñanza Media. **f)** 71 familias tienen hijos en Enseñanza Básica. **g)** 38 familias tienen hijos en Enseñanza Universitaria. Con la información anterior, deducir: ¿El número de familias que solo tienen hijos universitarios? ¿El número de familias que tienen hijos solo en dos niveles? ¿El número de familias que tienen hijos que no estudian? ¿Cuál es la probabilidad de que una familia solo tenga hijos estudiando Enseñanza media?

36. Seleccione la opción correcta.



a) $(A \cap B) \cup C$
b) $[(A - B) \cup (B - A)] \cap C$
c) $(A \cup B) \cap C$
d) $(A \Delta B) \cap C$
e) $[(A \cup B) - (A \cap B)] \cap C$
f) ninguna de las anteriores, escribir la expresión correcta

37. Simplifique la siguiente expresión

$$[(A^C \cup B) \cap (B^C \cup A)]^C \cup (A \cap B)$$

a) A
b) B
c) A^C
d) $A \cup B$
e) $A \cap B$
f) ninguna de las anteriores, escribir la expresión correcta

38. Se preguntó a 50 padres de alumnos sobre los deportes que practicaban, obteniéndose los siguientes resultados: 20 practican sólo fútbol, 12 practican fútbol y natación y 10 no practican ninguno de estos deportes. Con estos datos averigua:

a) número de padres que practican natación?
b) número de ellos que sólo practican natación?
c) los que practican alguno de dichos deportes?

39. Encontrar el conjunto resultante y su cardinalidad:

    $A = \{i, j, k, l, m, n\}, B = \{2, 4, 6, 7, f, g, h\}, C = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}, D = \{1, 3, 5\}, U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n\}$

$$(A \Delta D) \cup (B \Delta C)$$

40. Obtener el conjunto resultante y su cardinalidad respectiva.

$$U = \{x \in \mathbb{N} \mid 0 < x \leq 10, x \in \text{primeras tres letras de su nombre}\}$$
$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 3r + 1, 1 \leq r \leq 3\}$$
$$B = \left\{ x \in \mathbb{N} \middle| x = \frac{2r}{3},\ r = \{9, 15, 6\} \right\}$$
$$C = \text{primeras tres lestras de su nombre}$$

    a) $(A \times B \times C)$
    b) $((A \cap B^C) \cup (P(C)) \cap C)$
    c) Cardinalidad de: $(A \cap B^C)$, $P(C)$, $(P(C)) \cap C$

41. Enuncie la ley de Absorción para conjuntos y demuéstrela usando construcción de conjuntos.

42. Demuestre que $(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$ usando la definición de igualdad de conjuntos (demuestre que se cumple la doble contención).

43. Obtenga el dual para la igualdad del ejercicio 2) y demuestre que también se cumple (Use el método que prefiera).

44. Mencione si es falso o verdadero las siguientes expresiones. Si es verdadero use leyes de conjuntos para demostrarlo y si es falso indique un contraejemplo.

    a) $A \Delta B = (A \cup B) \cap (A \cap B)^c$
    b) $A - (B \times C) = (A - B) \times (A - C)$
    c) $(A - B) - C = (A - B) \cup C$

45. Usando leyes de inferencia para proposiciones demuestre que si $A \cap C = B \cap C$ y $A \cup C = B \cup C$ entonces $A = B$.

46. Usar los diagramas de Venn para determinar si la siguiente igualdad es verdadera. En caso de serlo, demostrarlo. En caso contrario, describir un contraejemplo.

$$A \triangle (B \cap C) = (A \triangle B) \cap (A \triangle C)$$

47. a) Construir el diagrama de Venn de $A - B = A \cap B^c$.
    b) Identificar si $A - B = A \cap B^c$ es verdadero. En caso de ser verdadero demostrarlo. En caso contrario, dar un contraejemplo.

48. Sean $A = \{n : n \in \mathbb{N} \text{ y } n \leq 10\}$, $B = \{1, 3, 5, 7\}$ y $C = \{2, 4, 8\}$. Determinar si se cumple $C \subseteq A$, $B \subseteq A$, $B \nsubseteq C$, $C \nsubseteq B$, $A \nsubseteq B$ y $A \nsubseteq C$.

49. Demostrar $X \times (Y \cup Z) = (X \times Y) \cup (X \times Z)$

50. Sean $A = \{n : n \in \mathbb{N} \text{ y } n \leq 15\}$ y $B = \{n : n \in \mathbb{N} \text{ y } -2 \leq n \leq 8\}$
    a) Describir $A \times B$.
    b) Obtener $|A \times B|$.

51. Se ha comprado un lote de banderas de tres tipos: unicolor, bicolor y tricolor. Los 3 posibles colores en ellas son el azul, blanco, café. Además, en ocho de ellas no figura el azul, en diez no figura el blanco y en cuatro no figura el café. Por otra parte, cinco banderas tienen los colores azul y blanco, siete el azul y café y seis el blanco y el café. Finalmente, cuatro tienen los tres colores. Responda las siguientes preguntas:
    a) ¿cuántas banderas son total?
    b) ¿cuántas banderas son unicolor?
    c) ¿cuántas banderas tienen al menos dos colores?

52. Demuestre o refute (con un contraejemplo) los siguientes ejercicios:

$$A^c - B^c = (A - B)^c$$

53. Si $A \times B \subset C \times D$ entonces $A \subset C$ y $B \subset D$

54. Simplificar la expresión (coloque qué leyes ocupa en cada paso):,

$$(B \Delta (A \cap C)) \cup (A \cup (B \cap C))$$

55. Encuentre $\mathcal{P}(\{a, b, \{a, b\}\})$

56. Demuestre o refute las siguientes afirmaciones
    a) $A \setminus B = A \Delta (A \cap B)$
    b) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
    c) $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$

57. Use inducción matemática para demostrar que el siguiente enunciado es verdadero para todo entero positivo n:

$$2^2 + 4^2 + \cdots + (2n)^2 = \frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}$$

58. Sean

$$A = \{a, \{a\}, \{\{a\}\}\} \quad B = \{a\} \quad C = \{\emptyset, \{a, \{a\}\}\}$$

¿cuáles de los siguientes enunciados son verdaderos? los que son falsos ¿por qué lo son?

a) $B \in A$

b) $\emptyset \subseteq C$

c) $\{a, \{a\}\} \in A$

d) $B \subseteq C$

59. Considere los siguientes subconjuntos de $\mathbb{Z}$:

$$A = \{x \mid \exists y \in \mathbb{Z}, y \geq 4 \wedge x = 3y\}, \quad B = \{x \mid \exists y \in \mathbb{Z}, x = 2y\}, \quad C = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, |x| \leq 10\}$$

Usando operaciones de conjuntos, describa cada uno de los siguientes conjuntos en términos de A, B y C.

a) $\{-10, -8, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8, 10\}$

b) $\{x \mid \exists y \in \mathbb{Z}, y \geq 2 \wedge x = 6y\}$

60. Simplifique la siguiente expresión usando identidades de conjuntos

$$(\overline{A \cup B}) \cap (\overline{\overline{A} \cup \overline{C}}) \cap (\overline{\overline{B} \cup C})$$

61. Establezca el valor de verdad de las siguientes afirmaciones utilizando definiciones, diagramas de Venn o leyes del álgebra de conjuntos:

a) $A \subset B \leftrightarrow A \subseteq B$ o $A \neq B$. *Considere* $B = \{3, 4, a, \{1, 2\}\} = \{3, 4, a, A\}$,

b) $|B| = 5$

c) $\{A\} \in B$

d) $B \supseteq \{A\}$

e) $(4, 3) \in A \times B$

f) $\{\{\}\} \subseteq \{\}$

g) $\{1\} \in P(A)$

h) $\emptyset \Delta B \neq B$

i) $\{a, \{1, 1, 2\}\} = \{a, \{1, 2, 2\}\}$

j) $\bar{A} \Delta \bar{B} \neq A \Delta B$

62. Sea P el conjunto de enteros mayores que 1. Para $i \geq 2$, defina $X_i = \{i * k \mid k \geq 2, k \in P\}$. Primero describa los conjuntos X_i para dar una generalización de los siguientes conjuntos:

    a) $P - \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$

    b) $\bigcap_{i=1}^{5} X_i$

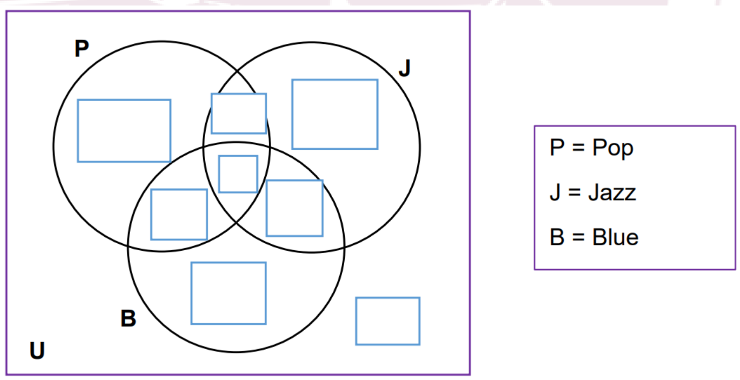
    c) $(X_2 \times X_3)$.

63. En un grupo de estudiantes, cada uno toma un curso de matemáticas o computación o ambos. Un quinto de los que toman matemáticas también toman computación y un octavo de los que toman computación también están en el curso de matemáticas. ¿Está más de un tercio de los estudiantes tomando el curso de matemáticas?

64. Demuestre si se cumple la igualdad en caso contrario dar un contraejemplo:

$$X \times (Y \cup Z) = (X \times Y) \cup (X \times Z), \quad \forall X, Y, Z \subseteq \mathbb{U}$$

65. El diagrama de Venn muestra los tipos de música que les gusta a un grupo de estudiantes universitarios. Escribe el número en cada sección del diagrama usando la información y responde las preguntas.



9 alumnos les gusta los tres tipos de música
8 alumnos les gusta Blues y Pop pero no Jazz
23 alumnos les gusta Blues y Jazz pero no Pop
35 alumnos les gusta ambos Jazz y Pop
27 alumnos les gusta solo Blues
5 alumnos les gusta solo Jazz
70 personas les gusta Pop
A 15 personas no les gusta alguno de esos tres tipos de música

a) ¿A cuántos alumnos les gusta exactamente dos tipos de música? Indicar el conjunto que representa el conjunto y justificar todas sus operaciones.

b) Determinar $|P \oplus (B \oplus J)|$ e indicar el tipo de alumnos que representa y justificar todas sus operaciones.

66. Dados $A = \{2, 3, 4, 5\}$ y $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, determina si las siguientes expresiones son válidas o no mediante el conjunto de validez.

    a) $3 \mid x \in A \mid y \in B$ (x divide a y)

    b) $\forall x \in A\ \exists y \in B$ (x divide a y)

    c) $\forall x \in A\ \forall y \in B\ \exists z \in A \mid (z$ divide a $x + y)$

67. Dados los conjuntos con cardinalidades $\#\Omega = 12$, $\#A = 7$, $\#B = 3$, $\#(A \cup B) = 8$, calcula:

    a) $\#(A^c \cup B^c)$

    b) $\#(A \cap B)$

    c) $\#(A^c \cup B)$

68. Demuestra que:
$$(A \cup B)^c(A \cap B) = A^c - B$$

69. Demuestra la siguiente propiedad de cardinalidades de conjuntos finitos:
$$\#(A^c - B) = \#(\Omega) + \#(A \cap B) - \#(B) - \#(A)$$

70. Demuestre que si $A, B \subset U$ y $A \subset B$ entonces $A \cap B^c = \emptyset$.

71. Considere los siguientes subconjuntos de:
$$U = \{x \in \mathbb{Z} \mid 0 < x \leq 10\}$$
$$A = \{x \in U \mid x \text{ es par}\}$$
$$B = \{x \in U \mid x \text{ es primo}\}$$
$$C = \{x \in U \mid 2x^2 - 1 > 39\}$$
$$D = \{x \in U \mid \frac{1}{x-1} > \frac{1}{4}\}$$

    Calcular y determinar la cardinalidad de cada uno de estos subconjuntos:

    a) $(A \cup B) \cap (A \cup C) \cap (A \cup D) =$

    b) $(A \cup B \cup C \cup D)^c =$

    c) $(A \oplus C) \cup (B \oplus D) - (C \cup D) =$

72. En una entrevista a un grupo de alumnos sobre sus preferencias por ciertos medios de transporte (A, B y C). Los datos de preferencias de la encuesta fueron los siguientes: a 5 le gustan solamente las A; a 38 les gustan las A; a 9 no les gustan los B; a 3 les gustan la A y C, pero no el B; a 20 les gustan las A y B pero no las C; a 72 no les gustan las C; a 61 no les gustan las A. Todos expresaron que les gusta alguna de las tres opciones. Realice el diagrama de Venn y responda: ¿Cuál fue el número de personas entrevistadas? ¿A cuántos le gustaba la bicicleta y el automóvil pero no la motocicleta? ¿A cuántos le solamente una opción?

73. Determinar del conjunto:

$$A = \{x \in \mathbb{Z}^+ / x(x-2)(x-1)\}$$

   a) Conjunto A de forma explícita y su cardinalidad
   b) Cardinalidad del conjunto potencia de A
   c) Conjunto potencia de A, de forma explícita.

74. a) Usar álgebra de conjuntos para simplificar el conjunto

   b) Usar diagramas de Venn para verificar el resultado

$$\overline{A \,\Delta\, (A \cap B)}$$

75. Determinar los elementos del conjunto y su cardinalidad:

$$P(P(P(\{1\})))$$

76. En la ESCOM se practican tres actividades culturales: Danza (D), música (M) y pintura (P). Se preguntó a un grupo de 434 estudiantes cuál de esas tres actividades practican. La información obtenida es la siguiente:

   I) 65 estudiantes no practican alguna de esas actividades
   II) $|(D^c \cup M^c)^c| = 124$
   III) 97 estudiantes practican danza y pintura
   IV) $|M \cap P| = 91$
   V) 39 practican solo danza
   VI) $|(M - D) - P| = 66$
   VII) $|P - (D \cup M)| = 50$

   Representa la información en un diagrama de Venn y responde las preguntas. En cada caso escribe el conjunto que da respuesta a la pregunta y justifica ampliamente tu respuesta.

   a) ¿Cuántos estudiantes practican exactamente dos actividades?
   b) ¿Cuántos estudiantes practican pintura?

77. Considere las dos relaciones siguientes sobre el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$:

   a) $R = \{(1,1), (1,5), (2,2), (2,3), (2,6), (3,2), (3,3), (3,6), (4,4), (5,1), (5,5), (6,2), (6,3), (6,6)\}$
   b) $\emptyset$ = relación vacía.

   Determine si cada una de las relaciones indicadas sobre A es: Reflexiva, simétrica, transitiva y antisimétrica (haciendo uso de las definiciones o contraejemplos, según sea el caso), indique las clases de equivalencia, de existir.

78. Considere las siguientes premisas:

    S_1: Todos los diccionarios son útiles.

    S_2: María sólo tiene novelas rosas.

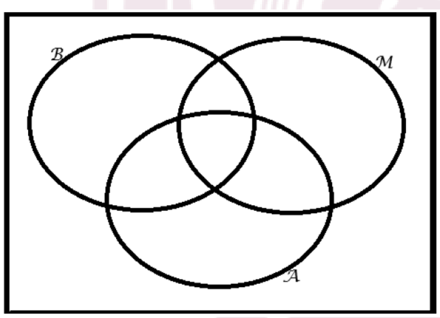
    S_3: Ninguna novela rosa es útil.

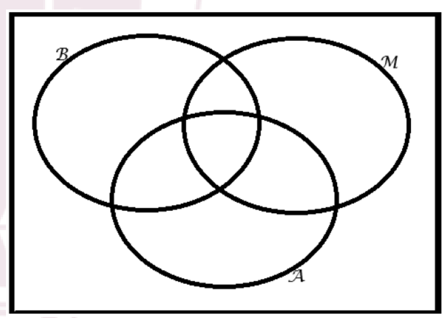
    Use un diagrama de Venn para determinar la validez de cada una de las siguientes conclusiones (justifique):

    a) Las novelas rosas no son diccionarios.
    b) María no tiene ningún diccionario.
    c) Todos los libros útiles son diccionarios.

79. Se entrevistó a un grupo de jóvenes de la ESCOM sobre sus preferencias por ciertos medios de transporte (bicicleta, motocicleta y automóvil). Los datos de preferencias de la encuesta fueron los siguientes: a 5 le gustan solamente las motocicletas; a 38 les gustan las motocicletas; a 9 no les gustan los automóviles; a 3 les gustan la motocicleta y bicicletas, pero no el automóvil; a 20 les gustan las motocicletas y automóviles pero no las bicicletas; a 72 no les gustan las bicicletas; a 1 no le gusta ninguna de las tres cosas; a 61 no les gustan las motocicletas.

    a) Elabore el diagrama de Venn que represente la situación (coloque la solución visible).





    b) Responda: ¿Cuál fue el número de personas entrevistadas? ¿A cuántos le gustaba la bicicleta y el automóvil pero no la motocicleta?

80. Simplificar la expresión (coloque qué leyes ocupa en cada paso): $(A - B) \cup (A \cap B)$

81. Demuestre (mostrando las dos inclusiones) o refute (con un contraejemplo): $\mathcal{P}(A \times B) = \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$.

82. Demuestre (mostrando las dos inclusiones) o refute (con un contraejemplo): Si $A \subset B$ entonces $A \cap B^c = \emptyset$.

83. Conteste cada opción.

    a) Demuestre que $A - B = A \cap B^C$ sin el uso de diagramas de Venn.

    b) Usando álgebra de conjuntos, mostrar $(A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A)$.

84. Sea $A = \{\{a, b\}, \{c\}, \{d, e, f\}\}$ y $B = \{0, \{0\}\}$. Determine:

    a) $P(B)$

    b) Las particiones de A.

    c) $A \times B$

    d) $|P(A) \times P(B)|$

85. Sea un grupo de 190 estudiantes, de los cuales 36 toman música y negocios; 20 están en francés y música; todos lo que toman francés toman negocios; 50 en francés; 80 en negocios y 63 toman música, ¿Cuántos toman no toman francés, ni negocios ni música?

86. Pruebe que, $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

87. Pruebe que $A \Delta B \Delta (A \cap B) = A \cup B$

88. Simplifique la siguiente expresión usando identidades de conjuntos

$$(\overline{A \cup B}) \cap (\overline{\overline{A} \cup \overline{C}}) \cap (\overline{\overline{B} \cup C})$$

Unidad 3

1. Usar el principio de inducción matemática para determinar la veracidad de la afirmación: "La suma de tres números enteros positivos consecutivos es siempre divisible por 6"

2. Usar el principio de inducción matemática para determinar la veracidad de la afirmación:

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > 2(\sqrt{n+1} - 1)$$

3. Aplicando el algoritmo euclidiano encuentre el máximo común divisor de 7260 y 1575.

4. a) Convierta el número 2341 de decimal a binario y a hexadecimal, utilice el algoritmo de la división.
   b) Convierta el número 2403_8 de octal a decimal.
   c) Realice la operación $4F2A1 + 231ED$.

5. Determine el número de enteros positivos n, $1 \leq n \leq 3000$, tales que son divisibles entre 5 y 7, pero no son divisibles entre 2.

6. Por medio del método de inducción demuestre lo siguiente: Para cada $n \in \mathbb{N}$, demuestre que $n^3 + 2n$ es divisible por 3.

7. a) Utilice el algoritmo de Euclides para determinar el máximo común divisor de 60 y 90.
   b) Calcule el minino común múltiplo de 60 y 90 utilizando la fórmula vista en clase y el resultado del máximo común divisor que obtuvo en el ejercicio anterior.

8. Explique cómo procede una demostración por inducción si usted quisiera probar la siguiente afirmación:

   Demostrar que $7^n - 1$ es divisible entre 6, para toda $n \geq 1$

9. a) Exprese el siguiente número binario en decimal: 101101
   b) Exprese el número decimal 400 a binario
   c) Exprese el número binario 101101 en hexadecimal
   d) Exprese el número decimal 400 en hexadecimal
   e) Exprese el número hexadecimal 76E en binario
   f) Multiplique los números binarios: 1001 por 1111
   g) Sume los números hexadecimales: $195 + 76E$
   h) Convierta 251_7 a base 4

10. Encuentre el máximo común divisor:
    a) 10^{10} y 6^{15}
    b) 325 y 785

    Calcule el mínimo común múltiplo de:
    a) 60 y 90

11. Realice las siguientes conversiones:
    a) Convierta de base $7 \longrightarrow 251$ a base 4
    b) Convierta de base $16 \longrightarrow 2AF$ a base 4
    c) Exprese el número decimal 400 a binario
    d) Exprese el número binario 101101 en hexadecimal

12. Realice las siguientes operaciones:
    a) Sume los números base $6 \longrightarrow (115 + 4034)$ y convertir a base 9
    b) Sume los números hexadecimales: $195 + 76E$ y convertir a octal
    c) Multiplique los números bases 5: 12×24 y convertir a octal

13. Utilice el método de inducción para demostrar la siguiente expresión:

$$3^n + 7^n - 2 \text{ es divisible entre } 8, \quad n \geq 1$$

14. Utilice el método de inducción para demostrar la siguiente expresión:

$$\sum_{i=1}^{n-1} i(i+1) = \frac{n(n-1)(n+1)}{3}, \quad n \geq 2$$

15. Dé solución a los siguientes problemas.

    a) Usando el algoritmo de Euclides, encuentre el máximo común divisor de -117 y 168.

    b) Escriba el máximo común divisor de -117 y 168 como combinación lineal de los mismos.

    c) Encuentre el máximo común divisor de a y b donde: $a = 2^9 7^{13} 11^5 17^7$ y $b = 2^8 3^4 7^3 11^{12} 17^8 19$.

16. Realice los siguientes ejercicios.

    a) Convierta el entero 330 a octal y hexadecimal.

    b) Opere en la base correspondiente:
    $1453_6 + 5334_6 + 5335_6 + 4543_6 + 3535_6$
    $32426_{15} - 26\text{DBA}_{15}$
    $423445_5 \times 43_5$
    $231313_4 / 113_4$

17. Demuestre que para todo $n \in \mathbb{N}$ tenemos que:

$$\sum_{i=1}^{n} 2i(i+1) = \frac{2n(n+1)(n+2)}{3}$$

18. Sean $a, b, c, p \in \mathbb{Z}$ con p primo. Resuelva dos de los siguientes incisos.

    a) Demuestre que si $p \neq 2$, $p|(2a+5b)$ y $(b, p) \neq 1$, entonces $p|a$.

    b) Demuestre que para toda $n \in \mathbb{N}$ tenemos que $8|(1-3^{2n})$.

    c) Refute que si $ac = bc$ entonces $a = b$.

19. a) Sea $U = \{\{x, y\} \mid x, y$ son números naturales diferentes menores que 10$\}$. La cardinalidad de $B = \{\{x, y\} \in U \mid x + y$ es un número impar$\}$ es:

    b) La cardinalidad de la potencia del conjunto potencia del conjunto vacío es:

    c) Sea $A = \{\{\}, \{1\}\}$. La cardinalidad de la potencia del Producto Cartesiano $A \times A$ es:

    d) ¿Cuántas divisiones se requieren para calcular el mcd$(414, 662)$ utilizando el algoritmo de Euclides?

    e) ¿Cuál es el valor del tercer bit de arrastre que se tiene al sumar los números binarios 101010 y 1010?

20. a) Utilice el algoritmo de Euclides para determinar el máximo común divisor de 32 y 120.
    b) Calcule el mínimo común múltiplo de 32 y 120, utilizando la fórmula vista en clase y el resultado del máximo común divisor que obtuvo en el inciso a).

21. Explique cómo procede una demostración por inducción si usted quisiera probar la siguiente afirmación:

    Demostrar que $5^n - 1$ es divisible entre 4, para toda $n \geq 1$

22. a) Exprese el siguiente número binario en decimal: 1010
    b) Exprese el número decimal 35 en binario
    c) Exprese el número binario 10 110 en hexadecimal
    d) Exprese el número decimal 23 en hexadecimal
    e) Exprese el número hexadecimal 1B3 en binario
    f) Multiplique los números binarios: 101 por 100
    g) Sume los números hexadecimales: 87F + 2EA
    h) Convierta 31_8 a base 2

23. a) Sean A= 625 y B=1000, usar el Algoritmo de Euclides para calcular mcd(A,B)
    b) Determina si los números son primos relativos
    c) Determina la descomposición en factores primos de 1000 y 625 y usa esta descomposición para calcular mcm(1000,625)

24. Sean A=68 y B=86.
    a) Determinar la representación de A y B en hexadecimal
    b) Calcular la suma de A y B en hexadecimal
    c) Calcular el producto de A y B en hexadecimal

25. Demuestra utilizando el principio de inducción que $n^2 - 1$ es divisible por 8 para todo entero impar positivo n

26. a) Usar el principio de Inducción Matemática para demostrar que

$$3 + 3 \cdot (5) + 3 \cdot (5^2) + 3 \cdot (5^3) + \cdots + 3 \cdot (5)^n = \frac{3((5)^{n+1} - 1)}{4}$$

para todo entero no negativo

b) Determinar P(5)

27. Si p es un número primo y k un entero positivo, demuestre, por reducción al absurdo, que $\sqrt{p^{6k+1}}$ es un número irracional.

28. Empleando el Teorema Fundamental de la Aritmética, se han encontrado las factorizaciones de dos números enteros $x = q_0^{m_0} q_1^{m_1} q_2^{m_2} \ldots q_\omega^{m_\omega}$ & $y = q_0^{n_0} q_1^{n_1} q_2^{n_2} \ldots q_\omega^{n_\omega}$. Calcule el máximo común divisor de $mcd(x, y)$ y el mínimo común múltiplo de $mcm(x, y)$. Si $x = 2^3 3^7 7^6 11^4 13^2 19^8$ & $y = 2^1 3^7 5^9 11^9 17^2 19^3$, ¿cuánto valen el $mcd(x, y)$ y $mcm(x, y)$ para este caso en particular?

29. Sean x, y, d & n, 4 números enteros. Si $d = mcd(x, y)$, demuestre que $mcd(x/d, y/d) = 1$. Adicionalmente demuestre que $mcd(nx, ny) = n\ mcd(x, y)$.

30. Demuestre la igualdad utilizando inducción matemática,

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + n \cdot (n + 1) = \frac{n(n + 1)(n + 2)}{3} \quad \text{con } n \in \mathbb{Z}^+$$

31. Convertir los números a la base que se indica anotando todo el procedimiento:

a) de base 10 a base 2: 1733.

b) de base 16 a base 8: F2D1.

c) de base 16 a base 10: D46E.

d) de base 2 a base 8: 10110011111001.

32. Determinar el máximo común divisor del par de números $m.c.d(1817, 3585) =?$, y también una combinación lineal de ese par de números utilizando el algoritmo de Euclides.

33. En clase demostramos que: $\forall a, b \in \mathbb{Z}$, tales que $ab > 0 \Rightarrow [(a > 0 \land b > 0) \lor (a < 0 \land b < 0)]$. Use esta propiedad (indicando claramente dónde fue usada) y los axiomas/-propiedades de orden que considere necesarias, para calcular el conjunto de $x \in \mathbb{Z}$ que satisfacen:

$$x^2 + 2x - 3 > 0$$

34. Demostrar por inducción matemática extendida que $\forall n \geq 4,\ n^2 \leq 2^n$ [Sugerencia: en clase se probó que $\forall n \geq 3,\ 2n + 1 \leq n^2$; puede utilizarla si lo considera útil, indicando claramente dónde la utiliza].

35. Demostrar por inducción matemática que $\forall n \geq 1,\ 2^{2n} - 1$ es divisible por 3.

36. Usando el algoritmo de Euclides, calcula el mcd y la identidad de Bezout de:

    a) 3551, 4399

    b) 427, 616

37. Escriba los siguientes números como producto de primos:

    a) 485^{20}

    b) $12!$ ("12 factorial")

38. Realice el siguiente cambio de base $(1234560)_7$ a base 8. Para los siguientes ejercicios, DEBE usar congruencias(otra demostración no será válida).

39. ¿Qué criterio se debe usar para mostrar que un número entero cualquiera, es divisible por 9?

40. Si existen calcular:

    a) $81^{-1} \pmod{152}$.

    b) $128^{-1} \pmod{178}$.

41. En este ejercicio, USE exponenciación binaria rápida o Teorema de Euler, según le convenga (mientras se cumplan las condiciones):

    a) Calcular el residuo de dividir 81^{141} entre 9.

    b) Calcular $2021^{2021} \pmod{17}$.

42. Demuestre que $2^{50} + 3^{50}$ es divisible por 13.

43. Demuestre que:

    a) $\forall a, b \in \mathbb{Z},\ a \leq b \rightarrow a^3 \leq b^3$.

    b) $\forall a, b, c, d \in \mathbb{Z},\ a|b \wedge c|d \rightarrow ac|bd + a^2c^2$

44. Demostrar que si $mcd(a, b) = d$ entonces el $mcd(ca, cb) = cd$ para cualquier c entero diferente de cero. Aplicar el resultado para calcular $mcd(28 \times 10^{10}, 20 \times 10^{11})$

45. Realizar las siguientes operaciones y expresar el resultado en la base indicada sin pasar por el sistema decimal:

    a) $(FBD)_{16}(11011010)_2 = (\quad)_8$

    b) Calcular el residuo de dividir $((DEA)_{16} + (11101011)_2)$ entre $(1011)_2$ y expresarlo en base 4.

46. Deducir el criterio para que $18 \mid (a_n 10^n + a_{n-1}10^{n-1} + \cdots + a_2 10^2 + a_1 10^1 + a_0)$ y verificar si

$$18 \mid 7840202179597578$$

47. Demostrar por inducción que las siguientes proposiciones son verdaderas

    a) $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$ es decir $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 5^2$

    b) $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 16 \mid (5^n - 4n - 1)$

48. Un trabajador tiene que forrar una columna de $2,5m$ de longitud con 2 tipos de azulejos, uno es morado el cual mide $30cm$ y el otro es blanco de $35cm$. Encuentre todas las posibles cantidades de azulejos morados y blancos que pueden realizar este trabajo de manera entera. ¿Hay posibilidad de ponerlos intercalados?

49. Si las claves publicas para cifrar en un sistema RSA son $(n, e) = (899, 47)$ cifrar el número $500+$ (La primera letra de su nombre): recuerde que las letras se pueden cifrar mediante la asignación $a = 1, b = 2, c = 3, \cdots, z = 27$.

50. Encuentre el máximo común divisor

    a) 10^{10} y 6^{15}

    b) 1188 y 385

    Calcule el mínimo común múltiplo de

    a) 2800 y 6215

51. Utilice el método de inducción para demostrar la siguiente expresión

$$(6)(7)^n - (2)(3)^n \text{ es divisible entre } 4 \quad (n \geq 1)$$

52. Utilice el método de inducción para demostrar la siguiente expresión.

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^{i+1} i^2 = \frac{-1^{n+1} n(n+1)}{2} \qquad , n \geq 0$$

53. Utilice el método de inducción para demostrar la siguiente expresión

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \quad (n \geq 1)$$

54. Pruebe que si n es un entero positivo, la cantidad $n^2 + 3n + 2$ es par.

55. Pruebe que si n es cualquier número natural, entonces

$$P(n) = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

56. Pruebe por inducción para $n > 0$:

$$P(n) = 2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n^2 + n$$

57. Pruebe que para cualquier cuadrado perfecto es, ya sea un múltiplo de 4 o es de la forma $4q + 1$ para algún entero q.

58. Pruebe que si n no es divisible por 3, entonces $n^2 + 2$ es divisible por 3.

59. Considere las siguientes asignaciones a la prueba presentada y diga a cual de ellas corresponde:

    A(correcta): Si la presentación de la prueba es correcta, aunque ésta no sea la mas simple.

    C(parcialmente correcta): Si la presentación de la prueba es correcta e igualmente la prueba es correcta. La prueba puede contener uno o dos argumentos incorrectos, pero los errores son fácilmente corregibles.

    F(falsa-erronea): Si la presentación de la prueba es incorrecta o la idea principal de la prueba es incorrecta o existen muchos errores en el procedimiento.

    a) Suponga que t es un irracional, entonces $5t$ es irracional.
    Prueba: Suponga que $5t$ es racional. Entonces $5t = p/q$, donde p y q son enteros y $q \neq 0$. Entonces, $t = p/(5q)$, donde p y $5q$ son enteros y $5q \neq 0$, entonces t es racional. Si t es irracional, entonces $5t$ es irracional.

    b) Suponga que a es entero. Si a es impar entonces $a^2 + 1$ es par
    Prueba: Sea a. Entonces el cuadrado de un impar es un impar. Además impar mas impar es par. Entonces $a^2 + 1$, es par.

    c) Suponga que x es un número real positivo. La suma de x y su recíproco es mayor o igual que 2, esto es:

    $$x + \frac{1}{x} \geq 2$$

    Prueba: Si multiplicamos por x, se obtiene $x^2 + 1 \geq 2x$. Por álgebra, $x^2 - 2x + 1 \geq 0$. Así, $(x-1)^2 \geq 0$. Cualquier número real al cuadrado, es mayor o igual que cero, entonces $x + \frac{1}{x} \geq 2$ es verdadero.

    d) Suponga que m es un entero. Si m^2 es impar, entonces m es impar.
    Prueba: Asumimos que m es impar. Entonces $m = 2k + 1$ para algún entero k. Entonces, $m^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$, lo cual es impar. Entonces, si m^2 es impar, entonces m es impar.

60. Demostrar por inducción matemática la siguiente propiedad.

$$\sum_{i=1}^{n} i(2^i) = 2 + (n-1)2^{n+1}$$

61. Demostrar lo siguiente:
Sean $a, b \in \mathbb{Z}$,
Si $a < b$, entonces $-b < -a$.

62. Demostrar:
Sean $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$.
Si $d|a$, $d|bc$ y $(a, b) = 1$, entonces $d|c$

63. Demostrar por inducción matemática la siguiente propiedad.

$$\sum_{i=1}^{n} 2(3^{i-1}) = 3^n - 1$$

64. Demostrar lo siguiente:
Sean $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$,
Si $a < b$ y $c < d$, entonces $a + c < b + d$.

65. Considere N conjuntos: $X_k, (0 \leq k < N)$. Demuestre, empleando inducción sobre N, el Principio de Inclusión y Exclusión para contar el total de elementos de la unión de todos los conjuntos:

$$\left|\bigcup_{k=0}^{N-1} X_k\right| = \sum_{k=0}^{N-1} |X_k| - \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0, j\neq i}^{N-1} |X_i \cap X_j| + \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0, j\neq i}^{N-1} \sum_{k=0, k\neq i, k\neq j}^{N-1} |X_i \cap X_j \cap X_k| - \ldots$$

$$\cdots + (-1)^{N+1}|X_0 \cap X_1 \cap \cdots \cap X_{N-1}|$$

Ilustre, empleando un diagrama de Venn, el caso para $N = 4$.

66. Empleando inducción sobre N y k, demuestre el *Teorema del Binomio*:

$$(a + b)^N = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} a^k b^{N-k}$$

(Sugerencia: puede auxiliarse del *Triángulo de Pascal* para la demostración).

67. Demostrar por inducción matemática lo siguiente:

$$\forall n \geq 3; \quad 2^n \geq 2n + 1$$

68. (Resolver con Ecuaciones diofánticas) Un hombre compra para su tienda, cajas (pequeñas) de cereales y cajas con sopas instantáneas, pagando $570 pesos en total. Una caja cereal le cuesta $11 pesos y las cajas de sopas $14 pesos. ¿Cuántas cajas de cereales y cuántas de sopas ha comprado, si el número de cajas de sopas fue el mínimo número posible?

69. Resuelva:

    a) Use el criterio de la raíz para determinar si los números 319 y $2^{2^3} - 5$ son primos. Si el número es compuesto, descomponga como producto de primos.

    b) Realizar el siguiente cambio de base: $(53217)_8 = (\cdots)_7$

70. Encontrar el residuo $17^{59} \pmod 6$.

    a) usando exponenciación binaria rápida (mostrar las iteraciones).

    b) Use el pequeño teorema de la función de Euler (si es posible).

71. ¿Cuál es el criterio para que dado $n \in \mathbb{N}$, $9|n$?

72. Encontrar todos los enteros x que satisfacen la ecuación:

$$43x + 143 \equiv 2 + 6x \pmod 9$$

73. a) Convierta el número 567_{10} a binario.

    b) Convierta el número 346_8 de octal a decimal.

    c) Encuentre el máximo común divisor de 2150 y 350 por los dos métodos vistos en clase.

74. Usando las fórmulas vistas en clase determine el número de enteros positivos n, $1 \leq n \leq 3000$, tales que:

    a) No sean divisibles entre 3, 5 y 7.

    b) Sean divisibles entre 3 y 5, pero no entre 7.

75. Determine si la siguiente proposición es verdadera o falsa, justifique su respuesta.

$$\{\emptyset\} \in \{\emptyset\}$$

76. Por medio del método de inducción demuestre que 6 divide a $n^3 - n, \forall n \geq 1$.

77. Usando los axiomas de orden, demostrar que si $\forall a, b \in \mathbb{Z}$ con $a \geq b$ entonces: $a^3 - 4 \geq b^3 - 6$ y $a^5 \geq b^5$

78. Si $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, con $c|a, c|b, c|d$, entonces $\forall x \in \mathbb{Z}, c|(-c^{25} + ax^2 + bx + dx)$.

79. Cual de los siguientes números son números primos.
    a) 31^3
    b) $71^2 - 53^2$
    c) 98921523

80. Realizar los siguientes cambios de base:
    a) $(34520777)_8 = (\cdots)_7$
    b) $(142344211)_5 = (\cdots)_6$
    c) $(1111011110101010)_2 = (\cdots)_{16}$

81. Realice las siguientes operaciones en el sistema binario:
    a) $(101010)_2 \div (1011) =$ b)$([(1010111111) \pmod{1010})]^2 - (111) =$

82. Cual es el criterio para que $8|(a_n 10^n + a_{n-1}10^{n-1} + \cdots + a_2 10^2 + a_1 10^1 + a_0)$ y aplíquelo para ver si es verdadero que $8|661397381784$

83. Un aeropuerto compra dos tipos de combustibles uno ecológico y uno normal, el ecológico cuesta $130 pesos por litro y el estándar $110 pesos. Se tiene un presupuesto de $75,000 pesos al día para la compra de estos combustibles, ¿Cuantas combinaciones posibles existen? ¿Cuales son las combinaciones mas caras y la mas barata?

84. A una palabra de 5 letras se le aplicó un cifrado multiplicación ($\times 5$) y posteriormente un cifrado Cesar (+16) dando como resultado la cadena de caracteres **vcypc**. Encontrar la palabra original.

85. Si las claves públicas para cifrar en un sistema RSA son $(n, e) = (899, 11)$ Y un mensaje cifrado es el $m_c = 575$ encontrar el mensaje original.

86. Demuestre por contradicción el siguiente enunciado: Si n es un entero y $n^3 + 5$ es impar, entonces n es par.

87. Demuestre que si a es un entero que no es divisible por 3, entonces $(a + 1)(a + 2)$ es divisible por 3.

88. Resuelva la siguiente congruencia lineal
$$89x \equiv 2 \pmod{232}$$

89. Demuestre que
$$11^n - 6 \text{ es divisible entre } 5, \forall n \geq 1.$$

90. Convertir los números a la base que se indica anotando todo el procedimiento:
    a) de base 10 a base 2: 1933.
    b) de base 16 a base 8: F2C1.
    c) de base 16 a base 10: FBAE.
    d) de base 2 a base 8: 10110011111011.

91. Realizar las operaciones en la base hexadecimal:

a)

		F	A	F	F
		2	0	C	F
$+$		1	F	3	E
		F	D	8	B

b)

		F	1	B	5
$-$		D	F	2	A

c)

		F	1	B	5
$\times$				F	A

92. Determinar el máximo común divisor del par de números $m.c.d(7!, 8!)$ utilizando el algoritmo de Euclides.

93. Obtener la fórmula para determinar la suma de

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \cdots + \frac{1}{2^n}$$

examinando los valores de esta expresión para valores pequeños de n (1, 2, 3, 4 y 5). Posteriormente, demuestra tu resultado aplicando inducción matemática.

94. Determinar si los números 321_3 y 123_5 son primos relativos.

95. Utiliza el principio de inducción para demostrar que

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

96. Calcula $\mathrm{mcd}(28, 70)$ y exprésalo como combinación lineal de 42 y 98. Utiliza las propiedades de congruencias para encontrar los valores de x tales que

$$28x + 4 \equiv 60 \pmod{70}$$

97. Determina la representación del número 1011110_2 en sistema decimal, octal y hexadecimal.

98. Calcula sin convertir a representación decimal

$$\begin{array}{ccc} 31763_8 & \text{y} & A3D61_{16} \\ +\,5276_8 & & +\,9F5B_{16} \end{array}$$

99. Demostrar que:

    a) $\forall a, b \in \mathbb{Z}$ con $a \geq b$ entonces:

    $$a^3 - 4b \geq b^3 - 4a$$

    b) $\forall a, b, c \in \mathbb{Z}$ con $a \mid b$ y $b \mid c$ entonces:

    $$a \mid 15b^3 - 14c^2$$

100. Cuál de los siguientes números son números primos:

    (a) $3229^6 - 1007^6$
    (b) $111\ldots1$ (21 unos)
    (c) $2^{31} - 1$

101. Demuestre que si $a, b, c \in \mathbb{Z}^+$ entonces:

    $$\text{mcd}(a, b, c) = \text{mcd}((a, b), c)$$

    y calcular:

    $$\text{mcd}(35000000, 35000001, 35000002)$$

    y encuentre su igualdad de Bezout.

102. Cuál es el criterio para que

    $$12 \mid (a_n 10^n + a_{n-1}10^{n-1} + \cdots + a_2 10^2 + a_1 10^1 + a_0)$$

    y aplíquelo para ver si es verdadero que:

    $$12 \mid 1481481468$$

103. Demostrar por inducción que:

    $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}.$$

    Y calcular la suma:

    $$1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + 101^2.$$

104. Use la identidad

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

para demostrar por inducción matemática: que:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2 \qquad \forall n \in \mathbb{Z}^+$$

105. Demuestre,

Por inducción matemática:

$$8 \mid (3^{2n} - 1), \qquad \forall n \in \mathbb{Z}^+$$

106. Demuestre, por inducción matemática:

$$\forall n \in \mathbb{Z}^+, \quad 1 + 2n \leq 3^n$$

107. Demuestre:

$$\forall x, y, m \in \mathbb{Z} \text{ y } m > 0,$$

Si

$$m \mid (x - y)$$

entonces

$$m \mid (x^3 - y^3).$$

108. Usar el algoritmo de Euclides para determinar el máximo común divisor de los números

$$3215 \text{ y } 1238$$

109. Usar inducción matemática para demostrar la veracidad de la proposición

$$\sum_{i=0}^{n} (3)^{5i} = \frac{3(5^{n+1} - 1)}{4}$$

para todo $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

110. Pruebe que para todos los enteros m y n, si m es par y n es impar, entonces mn es par. Utilizando una demostración indirecta.

111. Pruebe que, $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

112. Pruebe que $A \Delta B \Delta (A \cap B) = A \cup B$

113. a) Convierta el número 76543_{10} a hexadecimal.
    b) Convierta el número 1001001001_2 de binario a decimal.
    c) Utilice el algoritmo euclideano para encuentrar el máximo comun divisor de 1350 y 20.
    d) Halle el residuo de dividir 6^{472} entre 11

114. Utilice el método de inducción matemática para demostrar que $3n + 1 < 2^n, \forall n \geq 4$.

115. Sea $\mathbb{N}$ el conjunto de los números naturales, para cada $n \in \mathbb{N}$ se define el conjunto $A_n = \{n, 2n, 3n, 4n, \ldots\}$. Determine:

    a) $A_3 \cap A_5$

    b) $\cup_{i \in P} A_i$, donde P es el conjunto de los números primos.

116. Mostrar que si mcd$(a, b) = 1$, a y b dividen a c, entonces ab divide a c. Sugerencia: recuerde que si mcd$(a, b) = 1$ entonces existen x, y únicos, tales que $ax + by = 1$

117. Usando inducción matemática, demuestre que para todo $n \in \mathbb{N}$:

    a) $n^2 \leq 2^n$ con $n \geq 4$

    b) $(\cup_{i \in \mathbb{N}} A_i)^C = \cap_{i \in \mathbb{N}} A_i^C$

118. Realice las siguientes operaciones, no omita ningún paso.

    a) $(765)_8\ (1011001)_2 = (\ )_9$

    b) $(10011)_2\ (A)_{16} = (\ )_{10}$

119. Demostrar que la siguiente afirmación es cierta usando inducción matemática: $\forall n \geq 1$, $5|(6^n - 1)$

120. (Resolver como ecuación diofántica) Encontrar todas las soluciones no negativas (si hay) de la ecuación diofántica: $35x + 15y = 810$.

121. *a*) Use el criterio de la raíz para determinar si 4193 tiene algún factor primo; si tiene, entonces descompóngalo como producto de primos.

    b) Realizar las conversiones de base: 4193 a base 2 y a base 7.

122. Encontrar el residuo $16^{3589} \pmod{4193}$:

    a) usando exponenciación binaria rápida (mostrar todas las iteraciones).

    b) Use el teorema de Euler (si es posible).

123. Use congruencias para determinar el criterio para que $9|n$, $n \in \mathbb{N}$

124. Encontrar todas las soluciones enteras x que satisfacen: $0x + 38 \equiv 90 - 14x \pmod{108}$.

125. Use inducción matemática para demostrar que el siguiente enunciado es verdadero para todo entero positivo n

$$2^2 + 4^2 + \cdots + (2n)^2 = \frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}$$

Unidad 4

1. Considere las cuatro relaciones siguientes sobre el conjunto $A = \{1, 2, 3\}$:

   $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (3, 3)\}$
   $S = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3)\}$
   $\emptyset$ = relación vacía
   $T = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 3)\}$

   Determine si cada una de las relaciones indicadas sobre A es: Reflexiva, simétrica, transitiva o antisimétrica.

2. Sea R la siguiente relación de equivalencia sobre el conjunto

   $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$:
   $R = \{(1, 1), (1, 5), (2, 2), (2, 3), (2, 6), (3, 2), (3, 3), (3, 6), (4, 4), (5, 1), (5, 5), (6, 2), (6, 3), (6, 6)\}$

   a) Encontrar el conjunto partición y las diferentes clases de equivalencia.
   b) Determinar si es Relación Binaria de Orden y además cuáles son los elementos de R^{-1}.

3. Sean R y S reflexivas sobre un conjunto $A = \{1, 2, 3\}$.

   A) Proponer ambas relaciones para casos particulares en los cuales se cumpla que R y S son reflexivas.
   B) Determinar la validez de: si para cualquier R y S sobre A que son reflexivas entonces $R \cup S$ es reflexiva.

4. Dar un ejemplo de funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que existan f^{-1} y g^{-1}.

5. Para cada una de las siguientes expresiones construir los circuitos (lógicos), utilizando en el primero compuertas NAND y en el segundo compuertas NOR:

   a) $g(w, x, y) = (w + y')(x + y')w'$
   b) $h(w, x, y) = (wx \oplus xy)'$

6. Escribir en la forma normal conjuntiva y disyuntiva compacta (maxterminos y minterminos), $f(w, x, y) = x + y'x$. Mediante tabla de verdad.

7. Determinar la expresión simplificada para el mapa K y escribir la función $g(w, x, y, z)$, registrada en el mapa en su forma normal conjuntiva y disyuntiva, algebraica.

1	1	0	1
0	0	0	0
1	0	0	1
1	1	0	1

8. Cambiar la siguiente expresión a la forma normal disyuntiva (polinomial) y de la forma normal disyuntiva a la conjuntiva (polinomial). Mediante desarrollo algebraico.

   $h(w, x, y, z) = wx + w'y + x'yz$

9. Escribir en su forma normal disyuntiva y conjuntiva compacta, $h(w, x, y, z) = wx + w'y + x'yz$

10. Considere la función booleana $f(x, y, z, w) = \overline{(y + \bar{z})(\bar{x}\,\bar{w}) + (y + z)}$

    a) Llevar la función booleana a la FND
    b) Determinar la función simplificada como productos de sumas mediante mapas K.
    c) Determinar la función simplificada como sumas de productos mediante mapas K.
    d) Escribir el dual de la función original y de la función simplificada en el inciso b)
    e) Dibujar el circuito de la función más simplificada usando compuertas NAND

11. Considere la función booleana $f(x, y, z, w) = \overline{(\bar{y}\,\bar{z})}\ \overline{\bar{y}z + \overline{(x + w)}}$

    a) Llevar la función booleana a la FNC
    b) Determinar la función simplificada como productos de sumas mediante mapas.
    c) Determinar la función simplificada como sumas de productos mediante mapas K.
    d) Determinar el dual del complemento de la función obtenida en el inciso c)
    e) Dibujar el circuito de la función más simplificada usando solo compuertas OR y XOR

12. Considere la siguiente función booleana $f : B^4 \longrightarrow B$ dada por

$$f(w, x, y, z) = (\overline{w} + xy)(\overline{z} + x\overline{y}z)$$

    a) Utilizando las propiedades de un álgebra booleana determine la f.n.d. o f.n.c de f (Escríbala en su forma extensa).
    b) Utilize el inciso anterior para determinar la otra forma normal. (Si obtuvo la forma normal disyuntiva de forma algebraica, ocupe esta para obtener la forma normal conjuntiva y viceversa).
    c) Escriba f como una suma de mintérminos y como un producto de maxtérminos, es decir por medio de las etiquetas.
    d) Obtenga la tabla lógica de f correspondiente a la función booleana.

13. Encuentre una representación mediante una suma minimal de productos para

$$f(w,x,y,z) = \sum m(5,6,8,11,12,13,14,15)$$

Posteriormente dibuje el circuito combinatorio correspondiente a la suma minimal de productos de f.

14. Proporcione un ejemplo de relación R sobre $X = \{3,5,7,9,11\}$ que tenga las siguientes propiedades: no reflexiva, no antisimétrica, y transitiva.

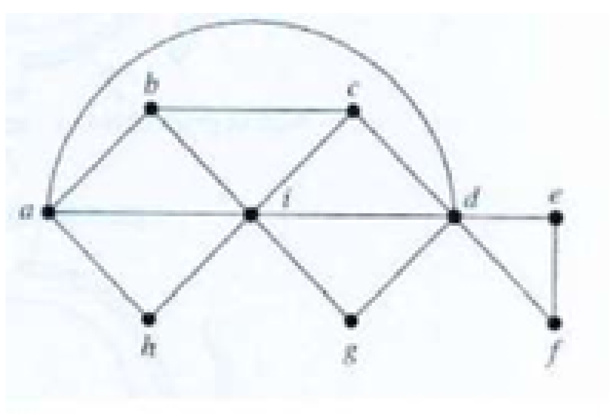
15. Sea R una relación sobre el conjunto de los enteros $\mathbb{Z}$, donde aRb si $a^2 + b$ es par.

    a) Liste al menos 8 elementos de la relación R.

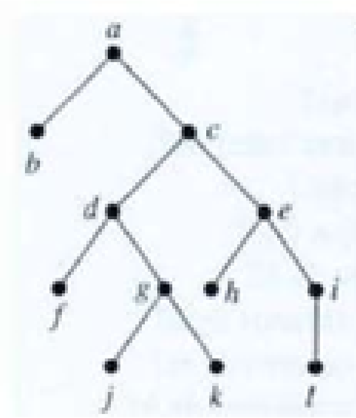
    b) Demuestre que R es una relación de equivalencia.

16. a) Encuentre y escriba un recorrido euleriano para la gráfica etiquetada como el inciso *a*.

    b) Escriba los recorridos en preorden, inorden y postorden del árbol etiquetado como inciso *b*.

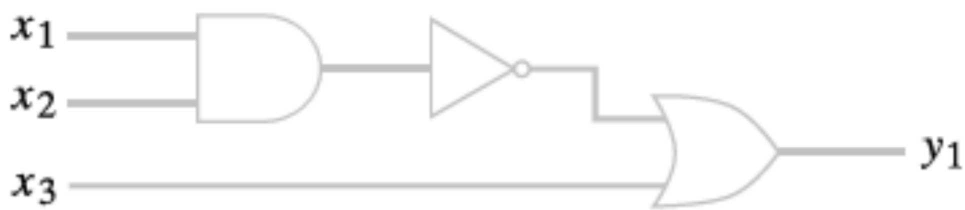


a.



b.

17. a) Escriba la expresión booleana que representa el circuito combinatorio dado. Escriba la salida de cada compuerta simbólicamente.

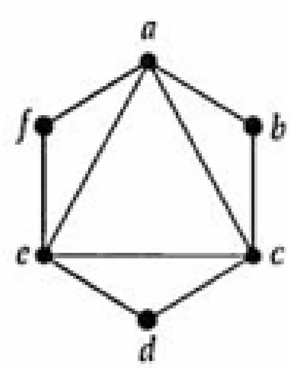


b) Escriba la tabla lógica.

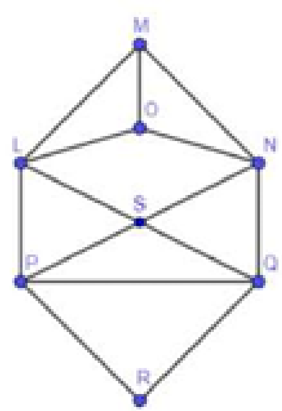
Represente la siguiente expresión como un circuito de conmutación

$$(A \wedge ((B \wedge \overline{C}) \vee (\overline{B} \wedge C))) \vee (\overline{A} \wedge B \wedge C)$$

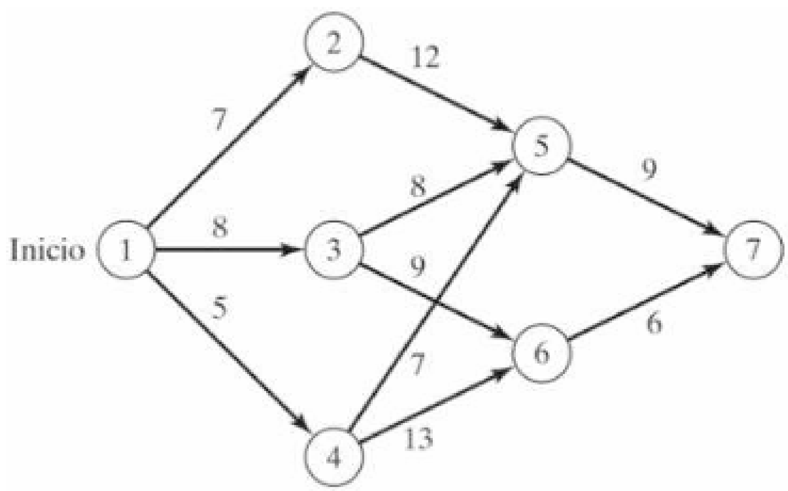
18. a) Sea G_1 la siguiente gráfica conexa, verifique que G_1 tiene un ciclo de Euler. Encuentre un ciclo de Euler para G_1.



b) Encuentre un ciclo de Hamilton para G_2.



19. Encuentre la longitud de la ruta más corta en la siguiente gráfica y también encuentre la ruta más corta (del nodo 1 al nodo 7). Utilice el algoritmo de Dijkstra.



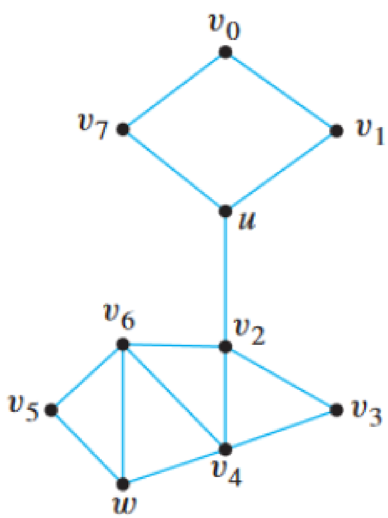
20. *a*) Escriba la expresión booleana que representa el circuito combinatorio dado. Escriba la salida de cada compuerta simbólicamente.

b) Escriba la tabla lógica.

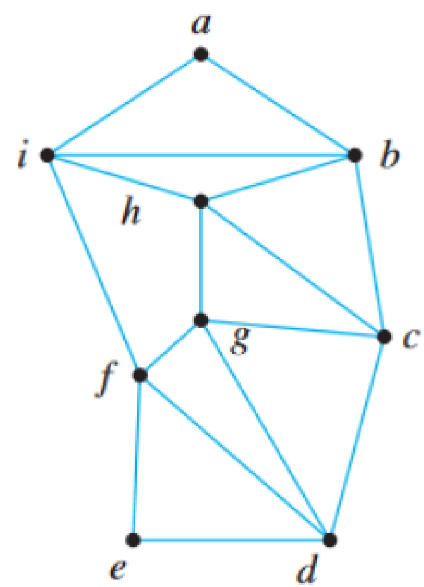
21. Simplificar con mapas de K. Obtener Max términos y Max términos. Dibuje el circuito simplificado.

$$\overline{(y+\overline{z})(\overline{xw})}+(\overline{y+z})$$

22. Determinar si los siguientes grafos tienen circuito y/o camino de Euler y expresar su correspondiente.



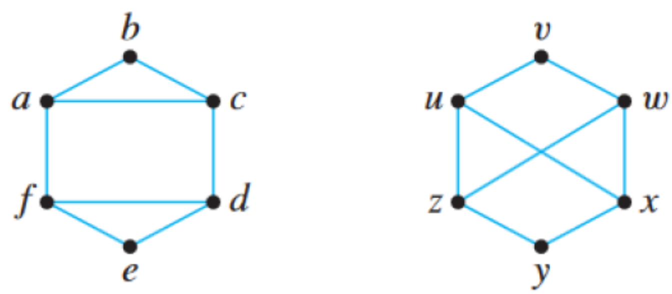
a)



b)

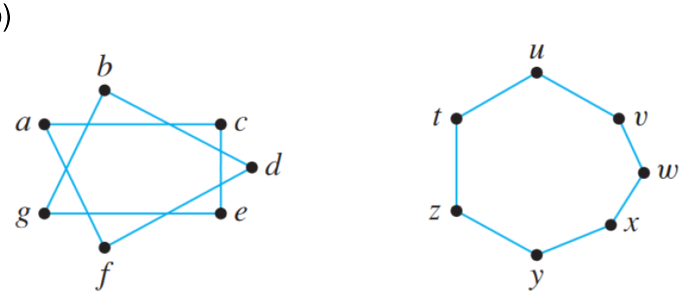
23. Determinar si los siguientes grafos son isomorfos.

a)



G G'

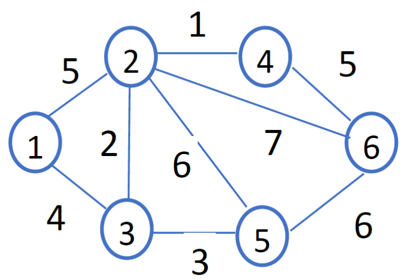
b)



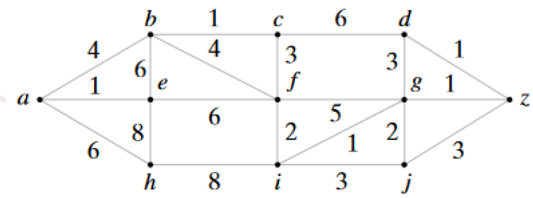
G G'

24. Determinar el camino más corto:

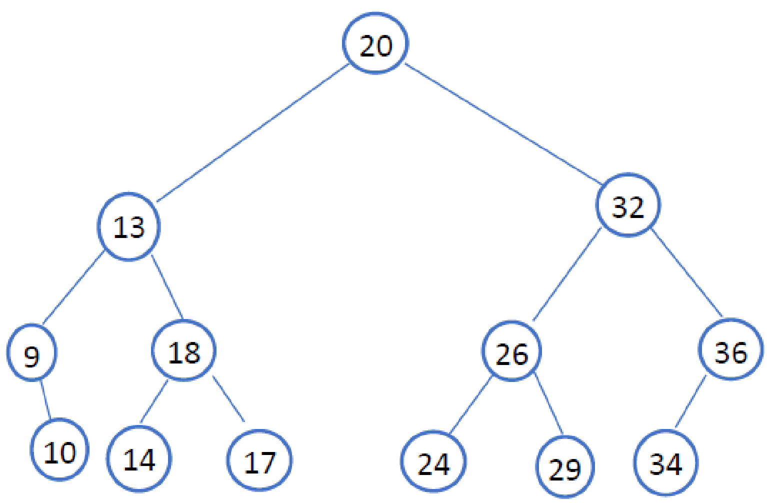
a) 1 a 6



b) a a z



25. Hacer los recorridos de preorden, inorden, postorden.



26. Considere la función booleana $f(x, y, z, w) = \overline{(y + \overline{z})(\overline{xw})} + (\overline{y + z})$

a) Llevar la función booleana a la FND

b) Determinar la función simplificada como productos de sumas mediante mapas K.

c) Determinar la función simplificada como sumas de productos mediante mapas K.

d) Escribir el dual de la función original y de la función simplificada en el inciso b)

e) Dibujar el circuito de la función más simplificada usando compuertas NAND

27. Considere la función booleana $f(x, y, z, w) = (\overline{\bar{y}\bar{z}})\left(\overline{\bar{y}z + \overline{(x + w)}}\right)$

    a) Llevar la función booleana a la FNC
    b) Determinar la función simplificada como productos de sumas mediante mapas.
    c) Determinar la función simplificada como sumas de productos mediante mapas K.
    d) Determinar el dual del complemento de la función obtenida en el inciso c)
    e) Dibujar el circuito de la función más simplificada usando solo compuertas OR y XOR

28. Analizar cada una de las propiedades de una relación y determinar cuáles de ellas cumple la relación R, definida como xRy si 3 divide a $x - y$ en $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

    a) Determinar si la relación es de equivalencia.
    b) Determinar si R es de Orden parcial.
    c) Determinar si R es de Orden total.
    d) Si la relación es de equivalencia determine las clases de equivalencia y determine el conjunto cociente.

29. Dar un ejemplo de relación en el conjunto $\{a, b, c\}$ que sea:

    a) Simétrica y antisimétrica
    b) Reflexiva, simétrica y transitiva

30. Sean R_1 y R_2 relaciones en un conjunto A representadas por las matrices

$$M_{R_1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad M_{R_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

    Determinar las matrices que representan las relaciones:

    a) $R_1 \cup R_2$
    b) $R_1 \cap R_2$
    c) $R_1 \oplus R_2$

31. Dada la siguiente tabla de verdad:

X	Y	Z	f
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

a) Determine la forma disyuntiva normal de la función f (f_m):

b) Determine la forma conjuntiva normal de la función f (f_M):

c) Simplifique las funciones booleanas de los incisos a) y b) utilizando un mapa de Karnaugh.

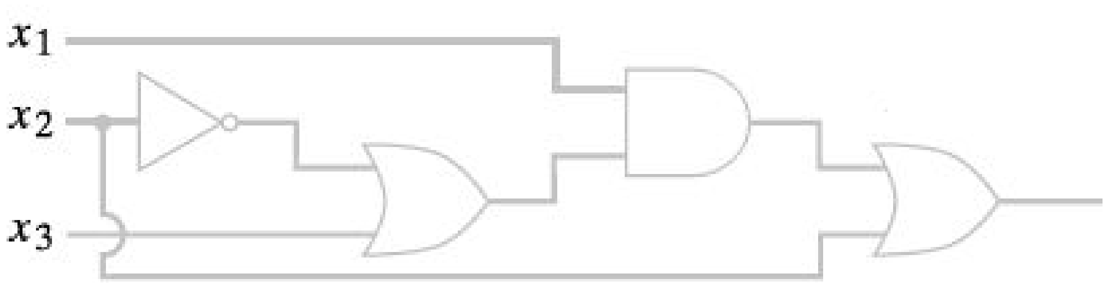
32. Simplifique la siguiente expresión booleana utilizando las leyes y reglas del álgebra booleana.

$$f = A + AB + A\bar{B}C$$

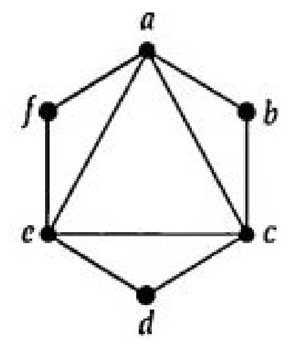
33. a) Escriba la expresión booleana que representa el circuito combinatorio dado. Escriba la salida de cada compuerta simbólicamente.

Aquí puedes insertar la imagen del circuito con el código que revisamos al principio:

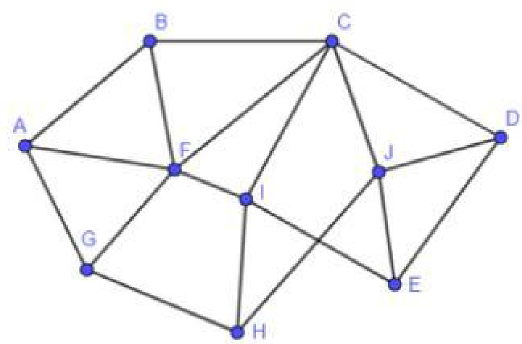
b) Escriba la tabla lógica.



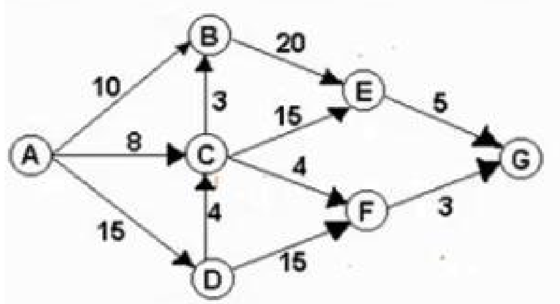
34. a) Sea G_1 la siguiente gráfica conexa, verifique que G_1 tiene un ciclo de Euler. Encuentre un ciclo de Euler para G_1.



b) Encuentre un ciclo de Hamilton para G_2.



35. Encuentre la longitud de la ruta más corta en la siguiente gráfica y también encuentre la ruta más corta (del nodo A al nodo G). Utilice el algoritmo de Dijkstra.



36. Determine si la relación R definida en el conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$: $(x, y) \in R$ si $x = y$ es o no un orden parcial. Justifique su respuesta.

37. a) Determinar la FND y FNC de la función

$$F(A, B, C, D) = \bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D} + A\bar{C} + C$$

    b) Simplificar la función mediante mapas K como una suma de productos.

    c) Dibujar el circuito de la función simplificada.

38. Modelar (determinar la expresión algebraica) y diseñar un circuito para una instalación eléctrica controlada por cuatro interruptores de modo que al pulsar uno de los interruptores se encienda la luz si está apagada y se apague si está encendida.

39. Sea R la relación

$$R = \{(x, y) \mid x(x + 1) = y(y + 1)\}$$

$A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

    a) Representar la relación mediante una matriz y un dígrafo.

    b) Determinar si la relación es de orden, cuasi orden, orden parcial u orden total.

40. Sea R la relación

$$R = \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (2, 2), (2, 6), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (4, 4), (5, 1), (5, 3), (5, 5), (6, 2), (6, 6)\}$$

Sobre $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
Determinar si R es de equivalencia, si la relación es de equivalencia determinar las clases de equivalencia y el conjunto cociente.

41. El grafo de intersección de una colección de conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ es el grafo que tiene un vértice por cada conjunto y que tiene una arista entre los vértices que representan a dos conjuntos si esos dos conjuntos tienen intersección no vacía. Construye el grafo de intersección de las siguientes colecciones de conjuntos:

$$A_1 = \{0, 2, 4, 6, 8\}$$
$$A_2 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$
$$A_3 = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$
$$A_4 = \{5, 6, 7, 8, 9\}$$
$$A_5 = \{0, 1, 8, 9\}$$

    a) Determinar las características: grafo, dígrafo, conexo, simple, multigrafo, pseudografo, grafo completo, bipartido, bipartido completo.

    b) Determinar si el grafo contiene un circuito o un camino euleriano.

    c) Determinar si el grafo contiene un camino o un ciclo hamiltoniano.

42. Obtenga el mapa de Karnaugh de cada función y encuentre la función lógica reducida, utilizando el mapa: a) $Q(t+1) = F(Q(t), J, K) = \sum m(2,3,4,6)$ (suma de minitérminos) y b) $P(t+1) = G(P(t), S, R) = \prod M(0,1,5)$ (producto de maxitérminos).

43. Considere un tablero de 8x8 celdas. Cada fila ha sido identificada por una secuencia única de 3 bits X, Y, Z (utilizando código Gray), de igual manera que las columnas, con bits U, V, W. Se han colocado 6 piezas en las siguientes coordenadas: A (101, 011), B (010, 001), C (011, 101), D (111, 101), E (110, 010) y F (100, 110). Las piezas pueden desplazarse en el tablero: La pieza A puede avanzar solo 1 celda hacia adelante. La pieza B puede desplazarse vertical u horizontalmente por cuantas celdas desee. La pieza C puede recorrer celdas en L (avanza una celda, vertical u horizontalmente en cualquier dirección, gira perpendicularmente y avanza 2 celdas). La pieza D se desplaza en diagonal por el tablero, en cualquier dirección. La pieza E puede atravesar, en cualquier dirección, en línea recta cuantas celdas desee. Finalmente, la pieza F avanza 1 celda hacia adelante, en cualquier dirección. Considere al tablero como un mapa de Karnaugh, con topología toroidal, y a las celdas en donde se sitúan las piezas, así como también las celdas que conforman sus trayectorias a partir de esa posición, como casillas activas. Obtenga la función lógica que describe esta configuración de piezas y sus movimientos.

44. Calcule las tablas de las operaciones modulares $(+,\cdot)$ para los anillos $\mathbb{Z}_7$ y $\mathbb{Z}_9$. Demuestre que para $\mathbb{Z}_q$, $[a]$ es una unidad si y sólo si $mcd(q,a) = 1$.

45. Sea K_n un grafo completo a) ¿Para cuales valores de n, se puede ubicar un circuito euleriano en el grafo, que pase 1 sola vez por cada arista? Para estos valores que ha calculado, ¿todavía existe un circuito euleriano si: b) se remueve 1 vértice, c) se remueve una arista, d) se agrega una nueva arista, e) se agrega una nueva arista?

46. Para el mismo grafo completo K_n. a) ¿Se puede encontrar un circuito hamiltoniano, que atraviese 1 sola vez cada vértice? Para estos valores que ha calculado, ¿todavía existe un circuito hamiltoniano si: b) se remueve 1 vértice, c) se remueve una arista, d) se agrega un nuevo vértice, e) se agrega una nueva arista?

47. Considere un autómata celular conformado por una lattice toroidal de M x N celdas ubicadas en una superficie bidimensional. Una celda en la posición (x, y) considera el estado actual de los vecinos que se encuentran a su alrededor. Si la celda central está encendida y solo 2 ó 3 vecinos están encendidos, permanece encendida en el siguiente paso; en caso contrario se apaga. Si la celda está apagada, solamente se enciende en la siguiente iteración si exactamente 3 vecinos se encienden. Describa una estrategia, usando funciones lógicas y grafos, para implementar el diseño de este autómata celular.

48. Dada la expresión booleana representarla en su forma normal conjuntiva realizando álgebra booleana,

$$X(x, y, z) = (x + yz')'$$

49. A partir de la función en su forma normal disyuntiva obtener el mapa de Karnaugh, su síntesis y el circuito combinatorio que representa la función booleana reducida:

$$f(w, x, y, z) = \sum_{i=1}^{12} m_i(0, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 11, 12, 14, 15)$$

50. Convertir los números a la base que se indica anotando todo el procedimiento:

   a) de base 10 a base 2: 1733.
   b) de base 16 a base 8: F2D1.
   c) de base 16 a base 10: D46E.
   d) de base 2 a base 8: 10110011111001.

51. Realizar las operaciones en la base hexadecimal:

a.

		5	A	F	9
		2	0	C	3
+		1	D	3	E
		F	D	8	B

b.

		A	1	B	5
−			A	2	7

c.

		A	1	B	5
×			A	2	7

52. Determinar el máximo común divisor del par de números $m.c.d(1817, 3585) =?$, y también una combinación lineal de ese par de números utilizando el algoritmo de Euclides.

53. Sea la relación R en el conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ definida por la regla $(x, y) \in R$ si $x = y - 1$.

   a) Liste los elementos de R y de R^{-1}.
   b) Encuentre el dominio y el rango de R y de R^{-1}.

54. Sea X un conjunto no vacío. Defina la relación en $P(X)$, el conjunto potencia de X, como $(A, B) \in R$ si $A \subseteq B$. ¿Es ésta una relación reflexiva, simétrica, antisimétrica, transitiva y/o de un orden parcial?

55. Sea $X = \{1, 2, 3\}$ y $Y = \{3\}$ subconjuntos no vacíos. Defina la relación en $P(X)$, el conjunto potencia de X, como $(A, B) \in R$ si $A \cup Y = B \cup Y$. ¿Es ésta una relación reflexiva, simétrica, antisimétrica y/o una relación de equivalencia?

56. Proporcione una relación en $\{1, 2, 3, 4\}$ que sea reflexiva, simétrica, y no transitiva.

57. En la gráfica de la Figura 1 se continúa hasta una profundidad finita, arbitraria. ¿Contiene la gráfica un ciclo de Euler? Si la respuesta es afirmativa defina uno.

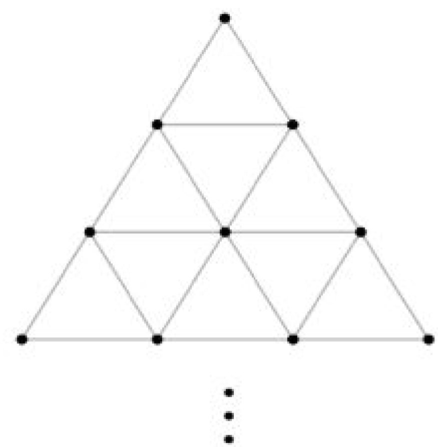


Figura 1.

58. Una gráfica completa K_n, ¿cuándo contiene un ciclo de Euler?

59. Una gráfica bipartita y completa $K_{m,n}$, ¿cuándo contiene un ciclo de Euler?

60. Determine si la gráfica de la Figura 2 tiene un ciclo de Euler y de Hamilton de $a \to a$, si es así, obténgalos como una sucesión de vértices.

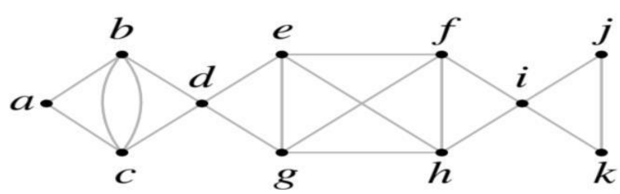
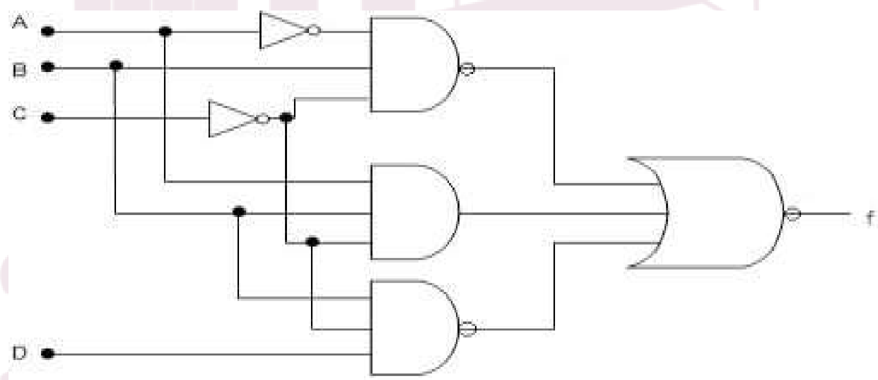


Figura 2.

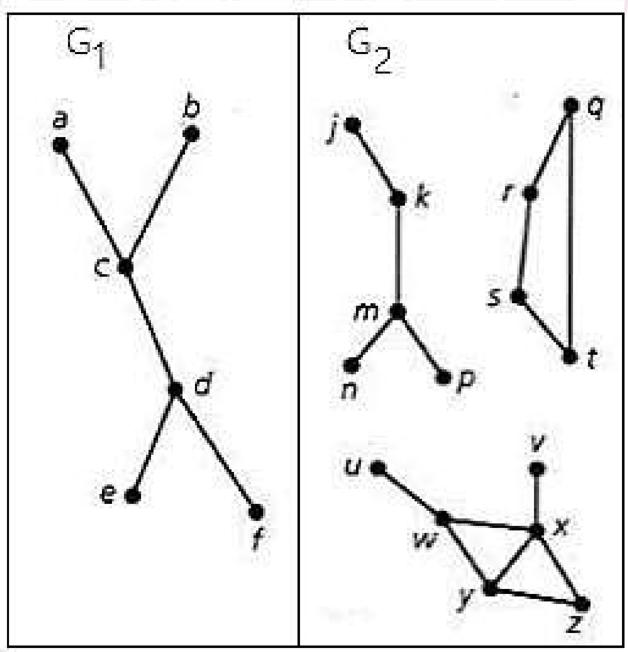
61. Dados $a, b \in \mathbb{Z}_6 = \{0, 1, \ldots, 5\}$, se define una relación como $a\mathcal{R}b \iff a - b \geq 0$. (a) Enliste todos los elementos de dicha relación. (b) Verifique si $\mathcal{R}$ es reflexiva, antisimétrica, simétrica y/o transitiva. (c) ¿Es relación de equivalencia? ¿relación de orden parcial? ¿relación de orden total?

62. Determinar si la siguiente es relación de equivalencia. En caso de lo sean, determinar o describir las clases de equivalencia. En $\mathbb{Z}$, la relación $a\mathcal{R}b$ si y solo si $a + b$ es impar.

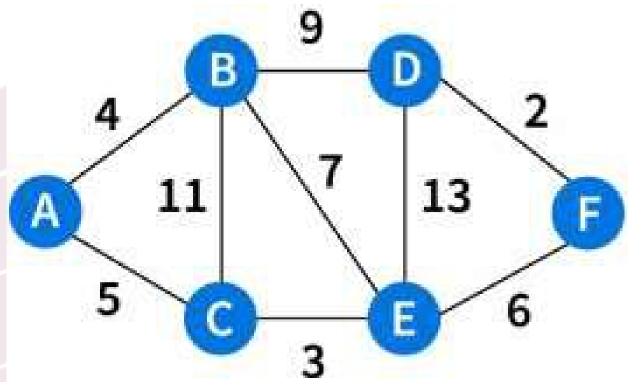
63. Para el circuito de abajo: (a) obtener la función de salida; (b) obtener la FND y la FNC; (c) simplifique usando mapas de Karnaugh y, finalmente, (d) dibuje el diagrama del circuito simplificado (con puertas lógicas elementales).



64. Para los grafos no dirigidos G_1, G_2 (abajo, izquierda) determine: (a) la matriz de adyacencia e incidencia del grafo G_1; (b) Justifique si pueden (o no) ser bosque o árbol.



65. Usando el algoritmo de Dijkstra encuentre las distancias más cortas desde el nodo C, del grafo de abajo (derecha).



66. Consideremos en $\mathbb{Z}_7$ la siguiente relación binaria $[a]R[b] \iff [a][b] = [1]$

    a) ¿Cuántos elementos tiene la relación?
    b) ¿Es una relación simétrica?
    c) Dibuje el diagrama que representa la relación.

67. Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ definimos $aRb \iff a^3 \leq b^3$. ¿Esta relación es un orden en los números enteros?

68. Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ definimos $aRb \iff 2 \mid a + b$ demostrar que es una relación de equivalencia y decir cuál es la clase de equivalencia del $[0]$.

69. Determinar la forma normal disyuntiva de la función booleana $f(x, y, z)$ que vale 1 si la cadena $(xyz)_2$ representa un número par y 0 si no.

x	y	z	$f(x, y, z)$
1	1	1	
1	1	0	
1	0	1	
0	1	1	
1	0	0	
0	1	0	
0	0	1	
0	0	0	

Llenar la tabla, calcular su expresión mínima y representar esta última en un diagrama de compuertas.

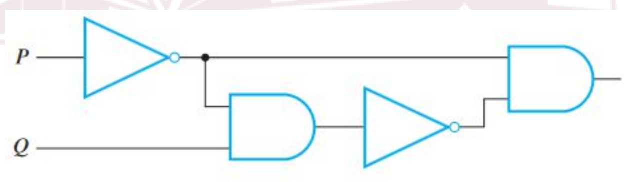
70. Realizar el diagrama de compuertas (mínimo) capaz de cubrir las necesidades de control de aterrizaje de un aeropuerto que consta de cuatro pistas A, B, C y D, en este aeropuerto aterrizan tres tipos de aviones un DC9 que requiere de solo una pista para aterrizar un B747 que requiere de dos pistas descubiertas y un AB25 que también requiere de dos pistas, el avión AB25 tiene prioridad de aterrizar sobre el avión B747 y este tiene prioridad de aterrizar sobre el DC9.

71. Calcular del siguiente grafo su matriz de incidencia y adyacencia, y encuentre un circuito euleriano dentro de él.

72. Vamos a definir un nuevo recorrido (recorrido inder) en un árbol binario como sigue: a) Recorrer el subárbol derecho inder b) Procesar vértice raíz c) Recorrer el subárbol izquierdo inder. Aplicar este recorrido al siguiente árbol binario para obtener la lista de elementos.

73. Encontrar los pesos de los caminos más cortos (usando el algoritmo de Dijkstra) al siguiente grafo dirigido con pesos.

74. a) Escriba la expresión booleana que representa el circuito combinatorio dado. Escriba la salida de cada compuerta simbólicamente.

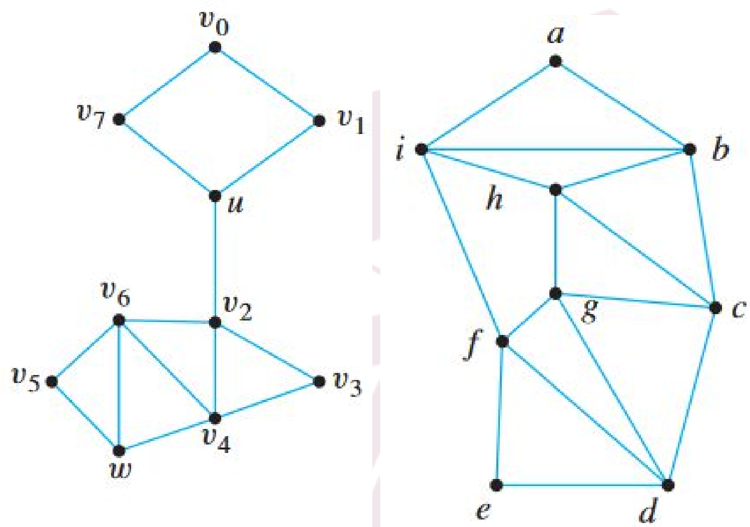


b) Escriba la tabla lógica.

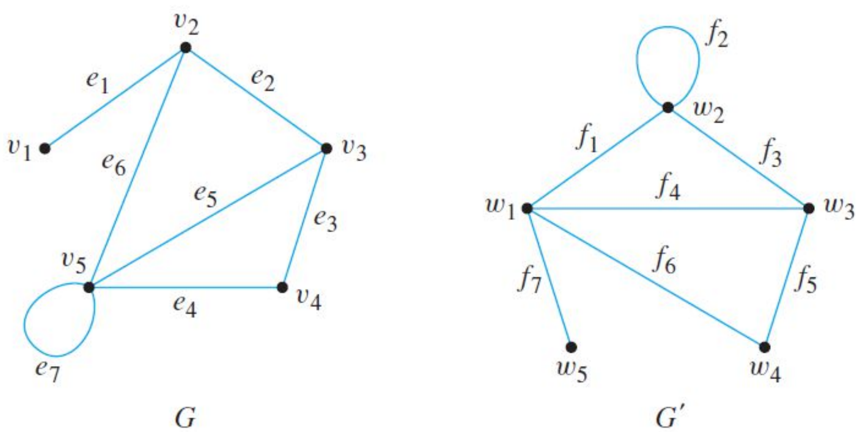
75. a) Obtener Minitérminos y Maxitérminos.
    b) Determinar la función simplificada como sumas de productos mediante mapas de k.
    c) Dibujar el circuito de la función simplificada.

$$f(x, y, w, z) = \overline{(y + \bar{z})(\overline{xw})} + \overline{(y + z)}$$

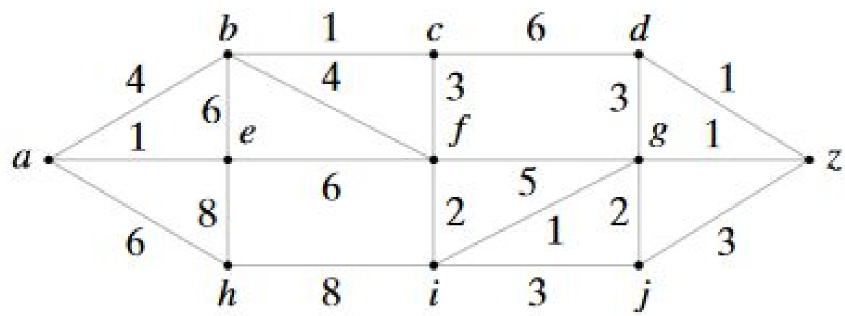
76. Determinar si los siguientes grafos tienen circuito y/o camino de Euler y expresar su correspondiente.



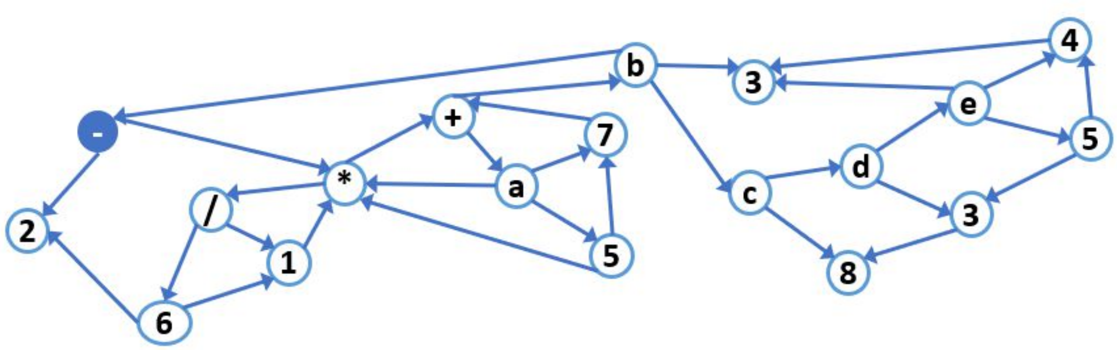
77. Determinar si los siguientes grafos son isomorfos.



78. Determinar el camino más corto de $a \to z$.



79.
   a) realizar el recorrido en profundidad y dibujar el diagrama.
   b) A partir del diagrama realizado en el inciso a realizar los recorridos de pre-orden, in-orden, post-orden.
   c) Evaluar la expresión resultante inciso anterior del recorrido in-orden.



$a = /, b = -, c = *, d = -, e = *$

80. Considere la relación $\mathcal{R}$ en $\mathbb{Z}$, definida por $(m, n) \in \mathcal{R}$ si $m + n$ es par. Pruebe que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.

81. Sea $\mathcal{S} = \{a, b, c, d\}$ y $\mathcal{T} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. ¿Diga cuál de las siguientes relaciones en $\mathcal{S} \times \mathcal{T}$ es una función? ¿Porqué?

   a) $\{(a, 4), (d, 3), (c, 3), (b, 2)\}$
   b) $\{(a, 5), (c, 4), (d, 3)\}$

82. Diga ¿cuál de las siguientes funciones es *uno-a-uno*? y ¿cuál es *sobre*?

    a) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \quad f(m) = m + 2$

    b) $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \quad g(m) = 2m^2 - 7$

83. Sea A un conjunto y sea R una relación en A. Definimos la relación R' en A por $R' = (A \times A) - R$. Para cada una de las opciones siguientes, responda:

    a) Si R es reflexiva, es R' necesariamente reflexiva, necesariamente no-reflexiva o no necesariamente ninguna de las dos?

    b) Si R es simétrica es R' necesariamente simétrica, necesariamente no-simétrica o no necesariamente ninguna de las dos?

    c) Si R es transitiva es R' necesariamente transitiva, necesariamente no-transitiva o no necesariamente ninguna de las dos?

84. Sea A un conjunto. Sea I un conjunto no vacío y sea $\{R_i\}_{i \in I}$ una familia de relaciones en A indexada por I. Para cada una de las opciones siguientes, responda y dé un ejemplo o t dé un contraejemplo.

    a) Si cada R_i es respectivamente una relación reflexiva, simétrica o transitiva, entonces $\bigcap_{i \in I} R_i$ es respectivamente una relación reflexiva, simétrica o transitiva en A.

    b) Si cada R_i es respectivamente una relación reflexiva, simétrica o transitiva, entonces $\bigcup_{i \in I} R_i$ es respectivamente una relación reflexiva, simétrica o transitiva en A.

85. Definimos una relación R en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, tal que para cualquier $(x, y), (u, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, tenemos $(x, y)R(u, v)$, si y sólo si $y = v$. Muestre que R es una relación de equivalencia.

86. Sea $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Definimos una relación R de A como:
    $R = \{(1, 3), (4, 2), (2, 4), (2, 3), (3, 1)\}$. Diga cuál de las siguientes propiedades no se cumplen en la relación?

    a) Reflexiva.

    b) Simétrica.

    c) Transitiva.

    d) Todas las tres anteriores.

87. Para cada una de las siguientes funciones, muestre que la función es 1-1; o si no lo es, encuentre un par apropiado de puntos para mostrarlo:

    a) $F : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$
    $$F(n) = \begin{cases} n^2 & \text{para } n \geq 0 \\ -n^2 & \text{para } n \leq 0 \end{cases}$$

    b) $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
    $$F(x) = \begin{cases} x+1 & \text{para } x \in \mathbb{Q} \\ 2x & \text{para } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

    c) $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
    $$F(x) = \begin{cases} 3x+2 & \text{para } x \in \mathbb{Q} \\ x^3 & \text{para } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

    d) $F : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$
    $$F(n) = \begin{cases} n+1 & \text{para } n \text{ impar} \\ n^3 & \text{para } n \text{ par} \end{cases}$$

88. Pruebe que la función $F : (0,1) \to \mathbb{R}$ definida como:
    $F(x) = (1/2 - x)/(x(1-x))$, es una biyección.

89. Si las siguientes funciones tienen dominio y codominio en $\mathbb{R}$, encuentre la regla para la función inversa g. Pruebe si su respuesta es correcta en cada caso.

    a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f(x) = 2x - 4$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
    b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f(x) = 3x + 5$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
    c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f(x) = \frac{2}{7}x - \frac{1}{3}$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
    d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f(x) = \sqrt[3]{x} - 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

90. Sea $f : [0, \infty) \to [4, \infty)$ la función con la regla $f(x) = x^2 + 4$.

    a) Pruebe que f es 1-1
    b) Pruebe que f es sobre y diga si f es invertible
    c) Demuestre que f es invertible y encuentre una fórmula algebraica que describe a f^{-1}

91. Pruebe o dé un contraejemplo a cada uno de los siguientes argumentos:

    a) Si R es una relación reflexiva en A, entonces R^{-1} es una relación reflexiva en A.
    b) Si R es una relación antisimétrica en A, entonces R^{-1} es una relación antisimétrica en A.
    c) Si R es una relación transitiva en A, entonces R^{-1} es una relación transitiva en A.

92. De acuerdo a la red de Petri de la figura 1, consideremos un sistema de gestión de recursos en un pequeño aeropuerto. Disponemos de 4 salas de embarque y de 3 pasarelas. Para los vuelos de salida. Primero que nada, hay que reservar una sala de embarque libre ("e_libre") para ejecutar el evento "dEr" (comienzo del registro) que es el que permite ejecutar la actividad "Er" (registro). Ahora, la sala de embarque queda reservada para realizar el evento "dEb" ("comienzo del embarque"), ahora sólo hace falta reservar una pasarela libre ("p_libre"), esto permitirá ejecutar la actividad "Eb" ("embarque"). Por último, el evento "fEb" ("fin del embarque") ocasiona la liberación de la sala de embarque y de la pasarela. Para los vuelos de llegada, es necesario reservar una pasarela disponible para el evento "dD" ("comienzo del desembarque") esto permite ejecutar la actividad "D" ("desembarque"). El evento "fD" termina esta actividad liberando el recurso pasarela.

   a) Mostrar que el sistema puede estar representado por la red de Petri de la figura 1, asociando los estados y las actividades a los lugares y los eventos a las transiciones.
   b) Analizar la dinámica de la red de Petri a través de la ecuación de estado. Proponga valores para el vector de disparo.
   c) ¿Cómo cambia la matriz de incidencia, tomando como base a la evolución de marcas a todo lo largo de la red de Petri?
   d) Analizar las "buenas propiedades" (justificar bien las reglas). ¿Los resultados se modificarían si agrandamos el aeropuerto añadiendo más salas de embarque y más pasarelas?

   Notas:

   i) Para la solución del problema, se sugiere primero identificar lugares y transiciones.
   ii) Para cada uno de los puntos anteriores, interprete con sus propias palabras el significado de cada cambio de marcaje, en el contexto del problema.

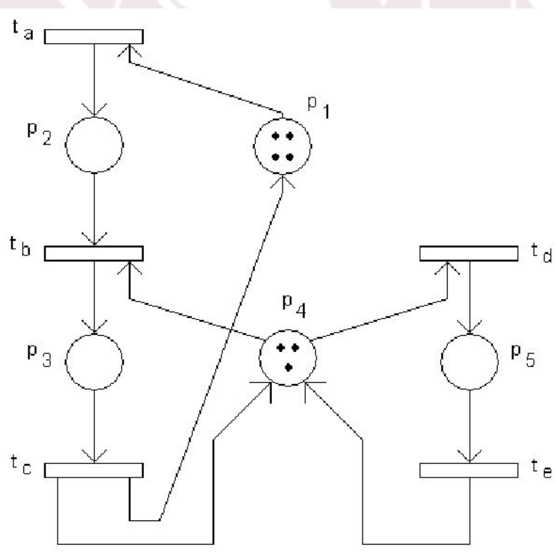


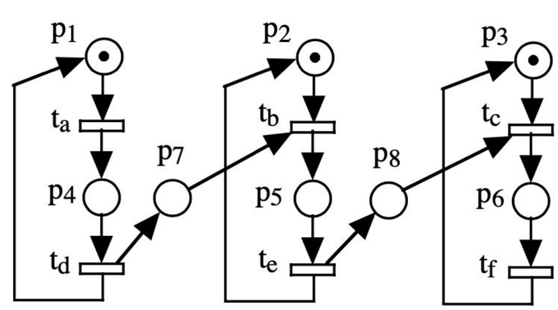
Figura 1

93. Consideremos un proceso de “flujo de paquetes de información” en tres niveles, es decir, el flujo de los paquetes de información se descompone en tres partes. Supongamos que cada paquete de información provoca el disparo de la transición t_a. Una primer tarea computacional (tarea de primer nivel) con un paquete de información, se refiere a poner el paquete de información en un ciclo. Al final del tratamiento de un paquete de información, éste se envía a una segunda tarea (segundo nivel). Esta segunda tarea igualmente que en el primer nivel, procesa cada paquete de información en un ciclo y después lo envía a un tercer nivel. Supongamos que la salida de la tarea del tercer nivel es la transición t_f. Así, cada disparo de t_f corresponde a la emisión de un paquete de información resultante (información ya procesada en las tres etapas).

   a) Mostrar que el sistema puede estar representado por la red de Petri de la figura 1, asociando los estados y las actividades a los lugares y los eventos a las transiciones.
   b) Analizar la dinámica de la red de Petri a través de la ecuación de estado. Proponga valores para el vector de disparo.
   c) ¿Cómo cambia la matriz de incidencia, tomando como base a la evolución de marcas a todo lo largo de la red de Petri?
   d) Analizar las “buenas propiedades” (justificar bien las reglas).
   e) Suponga ahora que el funcionamiento del segundo nivel es más lento que el del primer nivel, y entonces duplicaremos la tarea asociada al primer nivel. ¿Cómo tener en cuenta esta modificación de duplicar la tarea, sin agregar un nuevo lugar, ni tampoco una nueva transición, ni un nuevo arco?
   f) Tomando en cuenta la respuesta al punto e, ¿Las propiedades analizadas en d, se modifican?
   Si la respuesta es **si**: ¿Cuáles se modifican y porqué?
   Si la respuesta es **no**: ¿Porqué?

Notas:

   i) Para la solución del problema 1, se sugiere primero identificar lugares y transiciones.
   ii) Para cada uno de los puntos anteriores, interprete con sus propias palabras el significado de cada cambio de marcaje, en el contexto del problema.

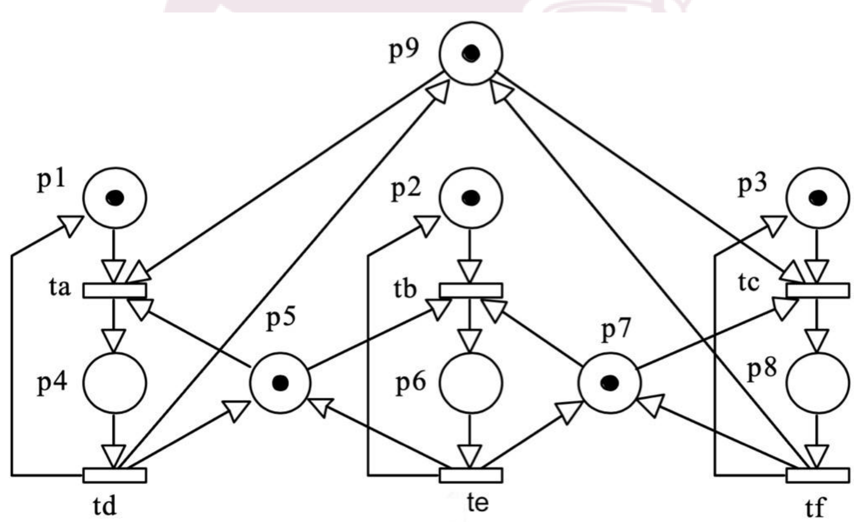


94. Consideremos el problema de los filósofos comensales de spaghettis (consideremos tres filósofos), cada filósofo puede estar en dos estados, ya sea comiendo spaghettis o pensando (filosofando). Para la actividad de comer, cada filósofo tiene necesidad de dos recursos que son los tenedores. Sin embargo, sólo hay tres tenedores; por lo tanto cada vez que un filósofo decide comer, debe tomar dos tenedores; el de su derecha y el de su izquierda. Una vez que termina de comer, deja los dos tenedores para que su vecino filósofo pueda entonces comer. Este ciclo de comer y filosofar está representado en la red de Petri de la figura 1.

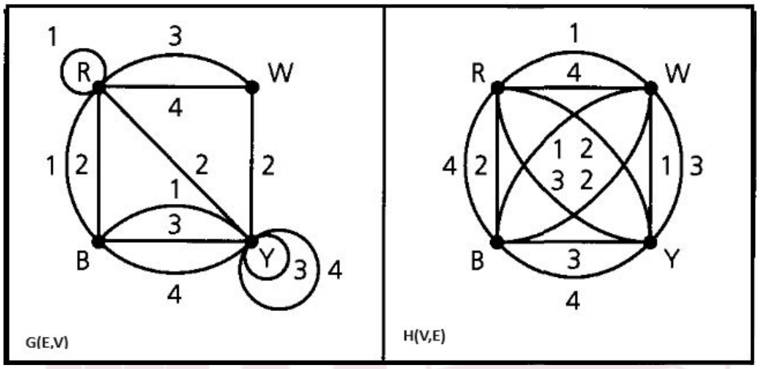
   a) Llamemos $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ y $\mathbf{F}_3$ a los filósofos y $\mathbf{T}_1$, $\mathbf{T}_2$ y $\mathbf{T}_3$ a los tenedores. Los estados son **F_pensando**, **F_comiendo** y **T_libre**. Explique cómo la red de Petri de la figura 1 puede representar esta secuencia de actividades.
   b) Analizar la dinámica de la red de Petri a través de la ecuación de estado. Proponga valores para el vector de disparo.
   c) ¿Cómo cambia la matriz de incidencia, tomando como base a la evolución de marcas a todo lo largo de la red de Petri?
   d) Analizar las "buenas propiedades" (justificar bien las reglas). ¿Los resultados se modificarían si compactamos los lugares y las transiciones de la red de Petri (agrupación de estados y transiciones), como se muestra en la figura 2, en donde los filósofos y sus estados comparten un solo lugar?

Notas:

   i) Observe que $\mathbf{F}_n$ y $\mathbf{T}_n$, donde $n = \{1, 2, 3\}$, son las marcas en los lugares. Y los estados **F_pensando**, **F_comiendo** y **T_libre**, definen los nombres de los lugares.
   ii) Para la solución del problema 1, se sugiere primero identificar lugares y transiciones.
   iii) Para cada uno de los puntos anteriores, interprete con sus propias palabras el significado de cada cambio de marcaje, en el contexto del problema.



95. Dados los grafos G y H, como se muestra en la figura.



a) Para G obtener lo siguiente:
   a) Describir el conjunto de vértices.
   b) Describir el conjunto de aristas.
   c) Obtener el grado de todos los vértices.
   d) Obtener la matriz de adyacencia y la matriz de incidencia.
   e) ¿Es un grafo conexo o no? Justifique.
   f) Determinar el camino más corto.

b) Definir el orden de las aristas de H de tal forma que sea un grafo dirigido. Y Obtener lo siguiente:
   a) Describir el conjunto de vértices.
   b) Describir el conjunto de aristas.
   c) Obtener el grado de todos los vértices.
   d) Obtener el grado de todos los vértices de entrada.
   e) Obtener el grado de todos los vértices de salida.
   f) Obtener la matriz de adyacencia y la matriz de incidencia.
   g) ¿Es un grafo conexo o no? Justifique.
   h) Determinar el camino más corto.

96. a) Encontrar la forma normal disyuntiva de

$$F(x, y, z, w) = \bar{x}y + z + \overline{(xw)}$$

b) Verificar con una tabla de valores.

97. Dibujar los K-diagramas de los siguientes desarrollos en sumas de productos.

a) $x\bar{y}$

b) $xy + x\bar{y} + \bar{x}y + \bar{x}\bar{y}$

98. En el conjunto de todas las rectas en el plano, $\mathcal{L}$, se define la relación $L_1 \mathcal{R} L_2$ si y solo si L_1 y L_2 son paralelas (que se verifica con la pendiente de la recta). ¿Es relación de equivalencia? Si lo es, ¿cómo describiría sus clases de equivalencia?

99. Sea $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$, junto con la relación:

$$\begin{aligned}\mathcal{R} = \{(x, x) \mid x \in A\} \cup \{&(c, a), (d, a), (e, b), (g, d), (g, a), (h, f), (h, g), (h, c), (h, d),\\ &(h, e), (h, b), (h, a), (i, g), (i, d), (i, a)\} \cup \{(j, x) \mid x \in A\}\end{aligned}$$

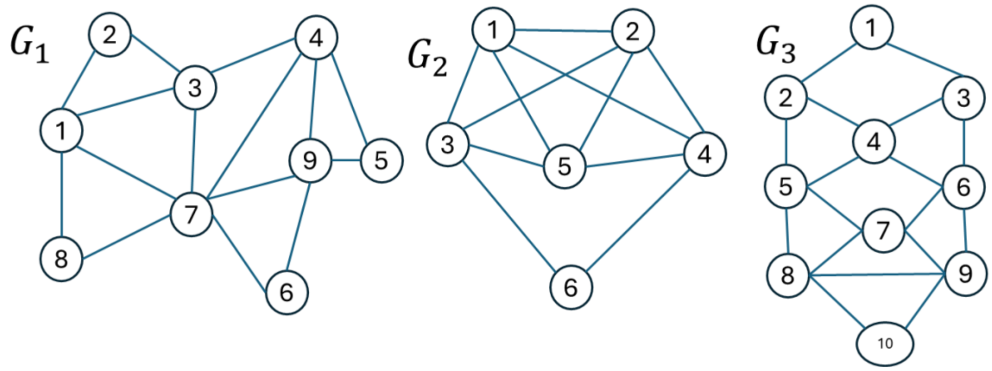
¿Es $\mathcal{R}$ una relación de orden parcial? ¿será un orden total?

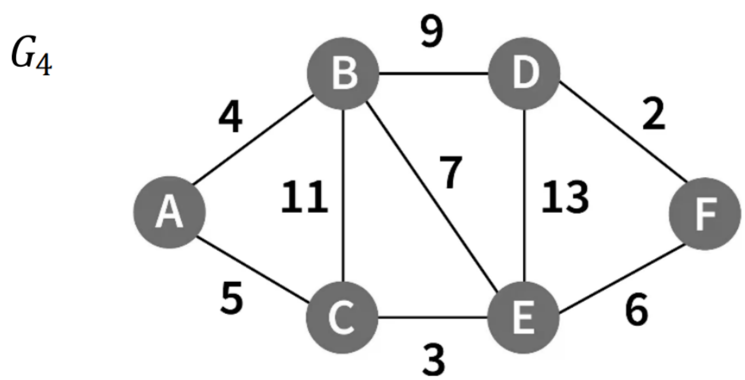
100. Para la función Booleana dada en la tabla de la derecha: (a) encuentre las formas normales disyuntiva y conjuntiva, y (b) una forma simplificada de la función usando mapas de Karnaugh.

x, y, z, w	$f(x, y, z, w)$
0000	1
0001	0
0010	1
0011	1
0100	0
0101	0
0110	0
0111	1
1000	1
1001	1
1010	1
1011	1
1100	1
1101	0
1110	0
1111	1

101. Para los grafos G_1, G_2, G_3 de abajo: (a) explique si existe algún recorrido de Euler (si existe, dar un ejemplo). (b) Explique si existe algún circuito de Euler (si existe, dar un ejemplo). (c) explique si puede existir algún ciclo Hamiltoniano (si existe, dar un ejemplo).

102. (a) Sobre el grafo G_4, usar el algoritmo de Dijkstra para encontrar las distancias más cortas desde el nodo A. (b) Escriba las matrices de incidencia y adyacencia de este grafo.





103. Sea $X = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$, y sea R una relación sobre X, para $x, y \in X, xRy$ si y solo si $xy \geq 0$.

   a) Liste los elementos de R.

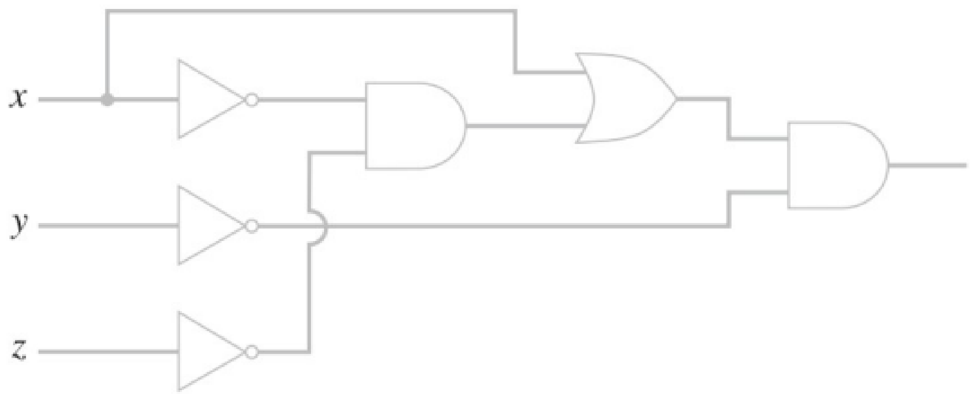
   b) Determine si la relación es reflexiva, simétrica, antisimétrica y / o transitiva, si no cumple con la propiedad use un contraejemplo para justificarlo.

104. Sea R una relación sobre el conjunto de los enteros $\mathbb{Z}$, donde aRb si y solo si $a = b$ o $a = -b$. Demuestre que R es una relación de equivalencia.

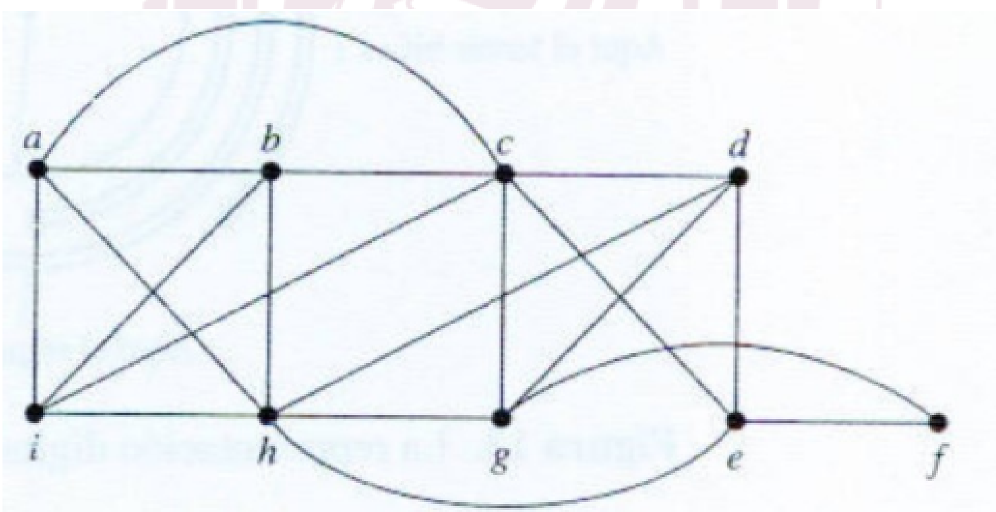
105. Encuentre una representación mediante una suma minimal de productos para

$$f(u, w, x, y, z) = \sum m(1, 2, 3, 4, 10, 17, 18, 19, 22, 23, 27, 28, 30, 31)$$

106. Dado el circuito combinatorio, determine su expresión booleana asociada $f(w, x, y, z) = X(w, x, y, z)$, luego utilizando las propiedades de un álgebra booleana determine la f.n.d. o f.n.c de f, luego a partir de la que obtuvo de forma algebraica determine la otra. (Escriba ambas en su forma extensa y como suma de mintérminos y como un producto de maxtérminos, es decir por medio de las etiquetas).



107. Dada la siguiente gráfica determine si es euleriana, justifique; si lo es encuentre un circuito euleriano.



108. Sean $A = \{\text{Vocales}\}$ y $B = \{x \in \mathbb{Z} | 0 \leq x \leq 4\}$.

a) Encuentre una relación entre estos conjuntos con exactamente 8 elementos.

b) Si definimos la relación $R_1 \subset A \times B$ como $xR_1y \iff x$ es una letra del nombre del número y. ¿Cuántos elementos tiene esta relación?

c) Sea $R_2 = A \times B - \{(a, 4), (e, 3), (i, 2), (o, 1), (u, 0)\}$. ¿Cuántos elementos tiene esta relación? Además realice un diagrama para determinar si es función o no.

109. Considere la relación binaria R definida $R \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ dada por $xRy \iff x \cong y \pmod{5}$. Demuestre que R es una relación de equivalencia, es decir simétrica, reflexiva y transitiva.

110. Haga el grafo asociado a la relación $R \subset \mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_7$ dada por $[x]_7 R [y]_7 \iff [mcd(x, y)]_7 = [1]_7$. ¿Es una relación antisimétrica, simétrica, reflexiva y transitiva?

111. Considere la función booleana $f(x, y, z, w) =$ Esprimo$[(xyzw)_2]$, donde $(xyzw)_2$ representa un número escrito en base 2. Encuentre su forma normal disyuntiva, encuentre su expresión mínima y represéntela por un circuito lógico.

112. Una tienda departamental quiere dar a sus clientes un regalo por fin de año considerando cuatro aspectos: compras por internet, compras por un monto mínimo, membresía y visitas a la tienda. El gerente determina que para poder dar regalo el cliente debe tener estrictamente más de 2 rubros a consideración y si tiene compras por monto mínimo también, en el caso que tenga los 4 se le dará otro descuento y no el regalo. Encuentre el circuito lógico más pequeño que le permita a los usuarios de la tienda saber si recibirán el regalo.

113. ¿Cuántas matrices de adyacencia distintas puede haber de un grafo de n-vértices fijos? Encuentre al menos 3 matrices de adyacencia distintas para el grafo completo de 5 vértices.

114. El grado de un vértice en un grafo $g(v)$ es el número de aristas que inciden en él. Demuestre que en un grafo G con n-vértices la suma de todos los grados de sus vértices no supera al número $n(n-1)$. Es decir:

$$g(v_1) + g(v_2) + \cdots + g(v_n) \leq n(n-1)$$

115. Sea $S = \{1, 2, 3\}$. Determine si cada una de las siguientes relaciones en S es reflexiva, simétrica, antisimétrica y/o transitiva.

    a) $R_1 = \{(1, 3), (3, 3), (3, 1), (2, 2), (2, 3), (1, 1), (1, 2)\}$
    b) $R_2 = \{(1, 1), (3, 3), (2, 2)\}$
    c) $R_3 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 1), (1, 3)\}$
    d) $R_4 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 3), (1, 3)\}$

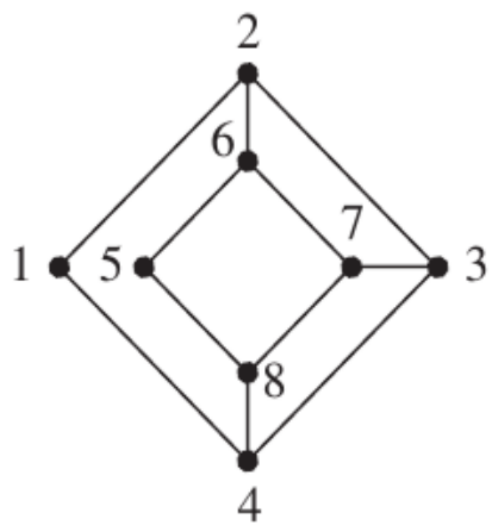
116. Si $A = \mathbb{Z}$, defina la relación R en A por $(x, y) \in R$ si y solo si $x - y$ es múltiplo de 3.

    a) Demuestre que R es una relación de equivalencia en A.
    b) Determine las clases de equivalencia y la partición de A inducida por R.

117. Determine si las siguientes relaciones en el conjunto $\{0, 1, 2, 3\}$ son órdenes parciales:

    a) $(0, 0), (1, 1), (2, 0), (2, 2), (2, 3), (3, 3)$
    b) $(0, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 1), (3, 3)$
    c) $(0, 0), (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 0), (2, 2), (2, 3), (3, 0), (3, 3)$
    d) $(0, 0), (0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 0), (2, 2), (3, 3)$

118. Para la siguiente gráfica:



a) Determine el grado de todos los vértices.
b) Determine su matriz de adyacencia.
c) Determine si tiene un circuito euleriano, en caso afirmativo liste los vértices.
d) Determine si tiene un circuito hamiltoniano, en caso afirmativo liste los vértices.

119. Considere la función booleana $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_3x_4 + \overline{x_2 + (x_1x_3)} + \overline{(x_1 + \overline{x_2}) + \overline{x_3}x_4}$

a) Utilice un mapa de Karnaugh para encontrar el desarrollo mínimo como suma de productos de la función f.
b) Dibuje el circuito de la función simplificada utilizando compuertas NOT, AND y OR.

120. Dada la función $f(x, y, z)$ exprésela sólo en compuertas NAND definida como: $a \uparrow b = \overline{a \wedge b}$ realizando álgebra booleana,

$$X(x, y, z) = (\bar{x} \vee (y \wedge \bar{z})) \wedge x.$$

121. A partir de la tabla determinar la función en su forma normal disyuntiva, el mapa de Karnaugh, su síntesis y el circuito combinatorio que representa la función booleana reducida:

w	x	y	z	$f(w,x,y,z)$
0	0	0	0	1
0	0	0	1	1
0	0	1	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

122. En la gráfica de la figura 1 se continúa hasta una profundidad finita, arbitraria. ¿Contiene la gráfica un ciclo de Euler? Si la respuesta es afirmativa defina uno.

123. Una gráfica completa K_n, ¿cuándo contiene un ciclo de Euler?

124. Una gráfica bipartita y completa $K_{m,n}$, ¿cuándo contiene un ciclo de Euler?

125. Determine si la gráfica de la figura 2 tiene un ciclo de Euler y de Hamilton de $a \to a$, si es así, obténgalos como una sucesión de vértices.

Figura 1.

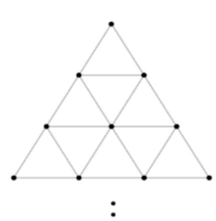
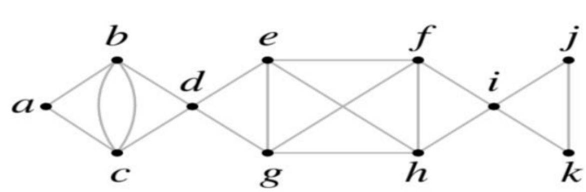


Figura 2.



126. Para la función booleana $f(x, y, z) = \overline{x\bar{y} + xz} + \bar{x}$ realice lo siguiente

a) Simplifique a su mínima expresión la función usando los operadores básicos (suma, producto y complemento) de forma algebraica.

b) Determine su forma normal disyuntiva de forma algebraica.

c) Determine su forma normal conjuntiva.

d) Simplifique usando la FND del mapa K.

e) Simplifique usando la FNC del mapa K.

127. Dibuje el circuito de la función $f(A, B, C) = ABC + A\bar{B}\overline{\bar{A}\bar{C}}$ con la menor cantidad de compuertas NAND.

128. Sea $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ y $R = \{(x, y) \mid x(x + 1) = y(y + 1)\}$ definida en $A \times A$

a) Determine las propiedades de la relación.

b) Determine si la relación es de equivalencia

c) Determine si R es de Orden parcial

d) Determine si R es de Orden total

e) Si la relación es de equivalencia determine las clases de equivalencia y el conjunto cociente.

129. Determina si la relación dada por la matriz siguiente es reflexiva, simétrica, transitiva y, con base en ello, si es relación de orden parcial o de equivalencia:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

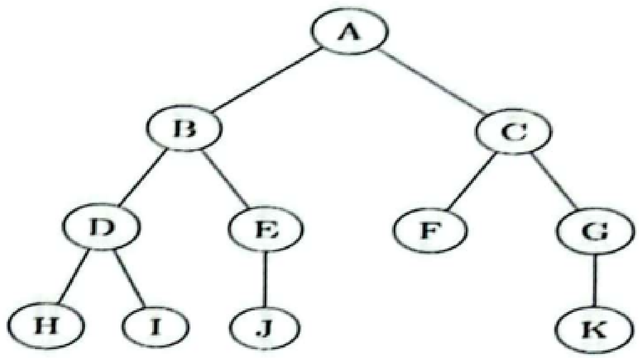
130. La relación en el conjunto de triángulos en un plano dada por "x es semejante a y". ¿Es relación de orden o de equivalencia? Justifica tu respuesta a detalle.

131. Dadas las permutaciones

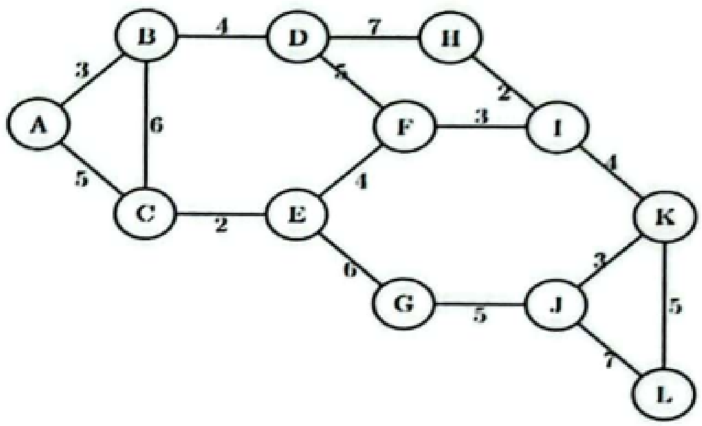
$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 6 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 3 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

determina las permutaciones $\tau \circ \sigma$ y τ^{-1}, y exprésalas como ciclos.

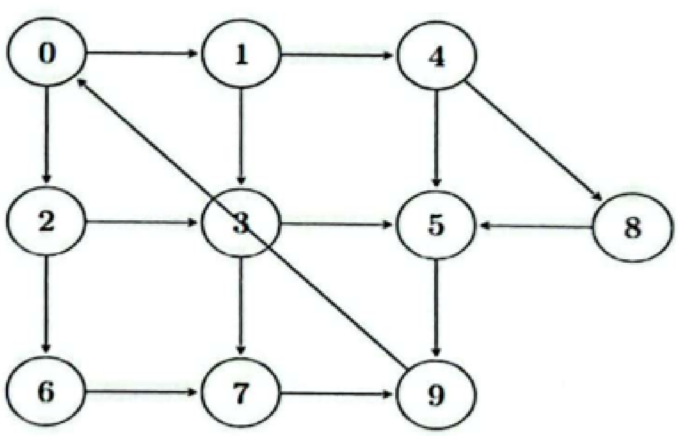
132. Escribe los recorridos en preorden, inorden y postorden del siguiente árbol binario; considera a los nodos J y K como nodos izquierdos.



133. Determina el árbol de expansión mínima para el siguiente grafo, así como el camino más corto entre los nodos B y L.

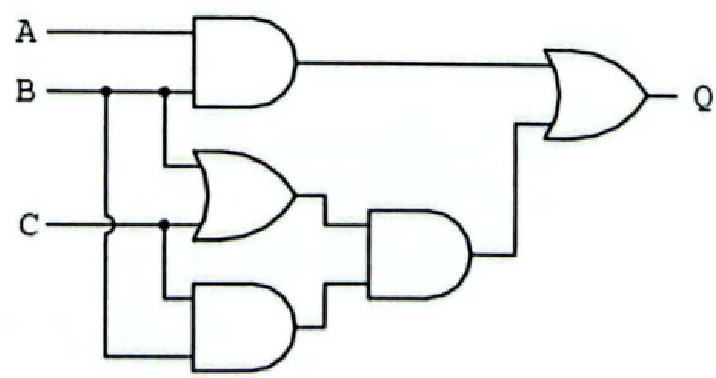


134. Determina el tipo de conexidad del siguiente grafo dirigido y escribe su matriz de adyacencia.



135. La siguiente es la tabla de verdad de la expresión booleana $E(p,q,r) = 10110101$. Determina su expresión como forma normal disyuntiva y simplifícala a una forma minimal.

136. Simplifica el siguiente circuito lógico.



137. Desarrolla la siguiente expresión booleana, escribe su forma normal disyuntiva y una forma minimal:

$$F(a,b,c) = a(a'b + bc') + (a' + c)(b' + c)$$

138. Consideremos en $\mathbb{Z}_7$ la relación binaria

$$[a]R[b] \iff [a][2b] = [1].$$

a) ¿Cuántos elementos tiene la relación?

b) ¿Es una relación simétrica?

c) Dibuja el diagrama que representa a la relación.

139. Sean $a, b \in \mathbb{Z}$. Se define

$$aRb \iff 2 \mid a^2 + b^2.$$

¿R es una relación de equivalencia? Si lo es, determina la clase de equivalencia de $[0]$.

140. Dibujar el circuito lógico óptimo que represente a la función booleana $f(x,y,z)$ que vale 1 si la cadena $(xyz)_2$ representa un número primo o es una potencia de 2, y vale 0 en caso contrario.

x	y	z	$f(x,y,z)$
1	1	1	
1	1	0	
1	0	1	
0	1	1	
1	0	0	
0	1	0	
0	0	1	
0	0	0	

141. Realizar el circuito lógico óptimo capaz de cubrir las necesidades de control de aterrizaje de un aeropuerto que consta de cuatro pistas A, B, C y D. En este aeropuerto aterrizan tres tipos de avión: un $DC9$, que requiere solo una pista para aterrizar; un $B747$, que requiere dos pistas descubiertas; y un $AB25$, que también requiere dos pistas. El avión $AB25$ tiene prioridad sobre el $B747$, y este tiene prioridad sobre el $DC9$.

142. Sea G el grafo con

$$V = \{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_8\}, \qquad E = \{\{v_i, v_j\} \mid i + j \text{ es impar}\}.$$

Dibuja el grafo, su matriz de incidencia y su matriz de adyacencia.

143. Se define un nuevo recorrido en un árbol binario, llamado recorrido inder, como sigue:

a) Recorrer el subárbol derecho inder.

b) Recorrer el subárbol izquierdo inder.

c) Procesar el vértice raíz.

Aplicar este recorrido al árbol binario dado para obtener la lista de elementos.

144. Encontrar los pesos de los caminos más cortos, usando el algoritmo de Dijkstra, para el grafo dirigido con pesos dado.

145. Considere las dos relaciones siguientes sobre el conjunto

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

i)

$$R = \{(1,1), (1,5), (2,2), (2,3), (2,6), (3,2), (3,3), (3,6), (4,4), (5,1), (5,5), (6,2), (6,3), (6,6)\}$$

ii) $\emptyset$, la relación vacía.

Determine si cada una de las relaciones es:

a) reflexiva,

b) simétrica,

c) transitiva,

d) antisimétrica.

En caso de existir, indique las clases de equivalencia.

146. Sea $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{si } x > 0, \\ -2x, & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

Determinar:

a) inyectividad,

b) sobreyectividad.

147. Para

$$h(w, x, y, z) = (wx) + (w'y)(x'yz)$$

determinar:

a) Forma Normal Disyuntiva algebraica.

b) Forma Normal Disyuntiva, $\Sigma m(\ )$.

c) Forma Normal Conjuntiva algebraica.

d) Forma Normal Conjuntiva, $\Pi M(\ )$.

148. Sea

$$g(w, x, y, z) = \Sigma m(0001, 0011, 0100, 0110, 1100, 1110, 1001, 1011),$$

simplificar mediante el mapa de Karnaugh.

149. Sin hacer uso de tablas de verdad, de

$$g(w, x, y, z) = (w + x + y)(x + y' + z)(w + y')$$

determinar:

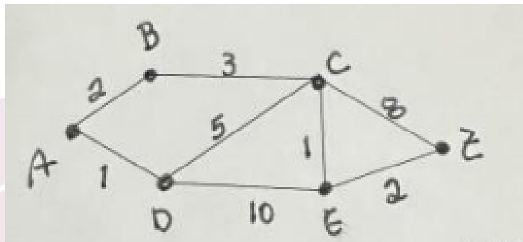
a) la FND algebraica,

b) las dos FND, $\Sigma m(\ )$,

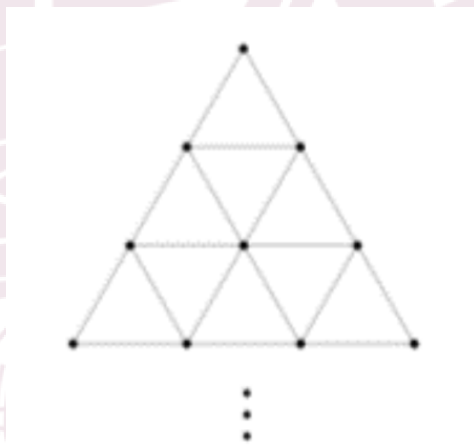
c) la FNC algebraica,

d) las dos FNC, $\Pi M(\ )$.

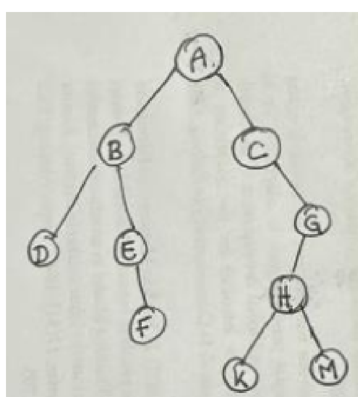
150. Utilizar el algoritmo de Dijkstra para encontrar el camino más corto de A a Z.



151. El siguiente grafo continúa hasta una profundidad finita. Determina, de existir, un ciclo de Euler y/o un ciclo de Hamilton, y descríbelo.



152. Determinar los recorridos de preorden, inorden y postorden para el siguiente árbol binario.



153. Usar mapas de Karnaugh para simplificar la función como suma de productos:

$$f(x, y, z) = xyz' + x'yz' + x'yz + x'yz + xy'z'$$

154. Usar mapas de Karnaugh para simplificar la función como producto de sumas a partir de la siguiente tabla:

Option	A	B	C	Output
0	0	0	0	1
1	0	0	1	1
2	0	1	0	1
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	1	0	1	0
6	1	1	0	1
7	1	1	1	0

155. Sean $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y R una relación definida en $A \times A$ por:

$$xRy \iff x + y \text{ es par.}$$

a) Determina si la relación es de equivalencia.

b) Determina si R es de orden parcial.

c) Determina si R es de orden total.

d) Si la relación es de equivalencia, determina las clases de equivalencia y el conjunto cociente.

e) Representa la relación R como un dígrafo.

156. Analizar cada una de las propiedades de la relación R, definida por

$$xRy \iff 3 \text{ divide a } x - y$$

en

$$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}.$$

a) Determina si la relación es de equivalencia.

b) Determina si R es de orden parcial.

c) Determina si R es de orden total.

d) Si la relación es de equivalencia, determina las clases de equivalencia y el conjunto cociente.

e) Representa la relación R^{-1} como una matriz.

157. Responde:

    a) ¿Para qué valores de n, el grafo completo de n vértices tiene un ciclo euleriano?

    b) ¿Para qué valores de m y n, el grafo bipartito $G_{m,n}$ tiene un camino hamiltoniano?

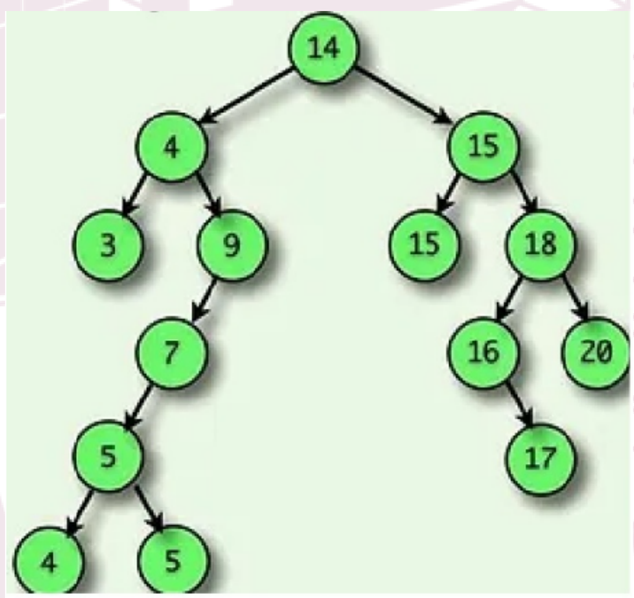
158. Vamos a definir un nuevo recorrido (recorrido inder) en un árbol binario como sigue:

    a) Recorrer el subárbol derecho inder.

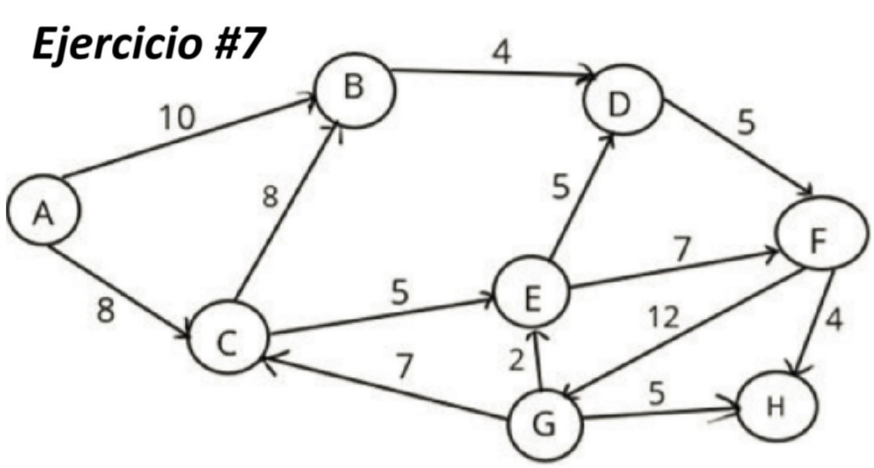
    b) Recorrer el subárbol izquierdo inder.

    c) Procesar vértice raíz.

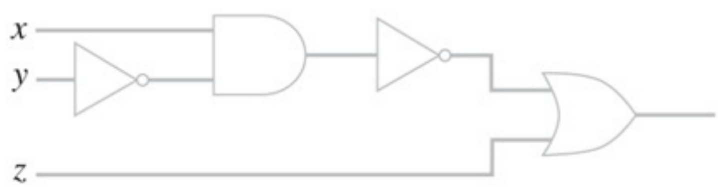
    Aplicar este recorrido al siguiente árbol binario para obtener la lista de elementos.



159. Encontrar los pesos de los caminos más cortos (usando el algoritmo de Dijkstra) al siguiente grafo dirigido con pesos.



160. Considere el circuito combinatorio de la figura de la parte inferior, determine su expresión booleana asociada $f(x, y, z) = X(x, y, z)$, luego utilizando las propiedades de un álgebra booleana determine la f.n.d. de f, luego a partir de f.n.d. obtenga f.n.c. (Escríba ambas en su forma extensa y como suma de mintérminos y como un producto de maxtérmimos, es decir por medio de las etiquetas).



161. Encuentre una representación mediante una suma minimal de productos para (Utilice los mapas de Karnaugh de las notas que están en la plataforma)

$$f(w, x, y, z) = \sum m(3, 4, 5, 7, 13, 15, 11).$$

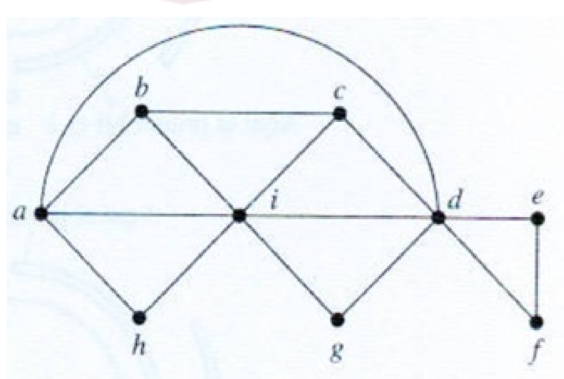
162. Sea $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Sea R una relación sobre X definida de la siguiente manera xRy si y sólo si $|x - y| \leq 2$.

   a) Liste los elementos de R
   b) Liste los elementos de R^{-1}.
   c) Liste los elementos de $R \circ R^{-1}$.
   d) Determine si la relación R es reflexiva, simétrica, antisimétrica y / o transitiva.

163. Sea $X = \{3, 5, 7, 9\}$, sea $Y = \{3, 9\}$, y sea R una relación sobre $\mathcal{P}(X)$, ARB si y solo si $A \cap Y = B \cap Y$.

   a) Demuestre que R es una relación de equivalencia.
   b) Escriba todas las clases de equivalencia, cada una con todos sus respectivos elementos.

164. Considere el grafo en la figura de la parte inferior, determine si es semieuleriana, justifique; si lo es encuentre un recorrido euleriano.



165. Demuestre que en álgebra Booleana si $x + y = 1$ y $xy = 0$ entonces $y = \overline{x}$, es decir, el complemento de x es único.

166. Sea $f(w, x, y, z)$ una función Booleana definida en la tabla. Determine:

   a) La FND de la función.
   b) La FNC de la función.
   c) El mapa de Karnaugh.
   d) La forma más simplificada de la función.

w	x	y	z	$f(w, x, y, z)$
1	1	1	1	1
1	1	1	0	0
1	1	0	1	1
1	1	0	0	0
1	0	1	1	0
1	0	1	0	0
1	0	0	1	0
1	0	0	0	1
0	1	1	1	1
0	1	1	0	0
0	1	0	1	0
0	1	0	0	0
0	0	1	1	1
0	0	1	0	0
0	0	0	1	0
0	0	0	0	0

167. Dibuje el circuito combinatorio con entradas A, B, C y salida Y que corresponde a cada expresión Booleana:

   a) $Y = A\overline{B}C + A\overline{C} + \overline{A}C$
   b) $Y = \overline{A}BC + \overline{A}B\overline{C} + AB\overline{C}$

168. Utilizando álgebra Booleana simplificar la función $F(a, b, c) = ab + \overline{a}c + bc + a\overline{b}c$.

169. Sea $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 15\}$ y S una relación sobre $A \times A$ definida por $S = \{(x, y) \mid (x - y) \in \mathbb{N}$ y sea divisible por 5$\}$. Determine:

   a) S^{-1}
   b) S^3
   c) Determine si S es una relación de equivalencia.

170. Sea $X = \{1, 2\}$ se define la relación R sobre $P(X)$ (la potencia de X) como $R = \{(A, B) \mid A \cup Y = B \cup Y$ para algún $Y \in P(X)\}$. Determine si R es una relación de equivalencia.

171. Sea $X = \mathcal{P}(\{a, b, c, d\})$, junto con la relación: $A\mathcal{R}B \Leftarrow A \subset B$ $(A, B \in \mathcal{P}(\{a, b, c, d\}))$. Dibuje el correspondiente grafo. Verifique qué propiedades cumple y diga si es relación de equivalencia o relación de orden parcial y/o un orden total.

172. Para la función Booleana dada en la tabla:

   a) encuentre las formas normales disyuntiva y conjuntiva, y

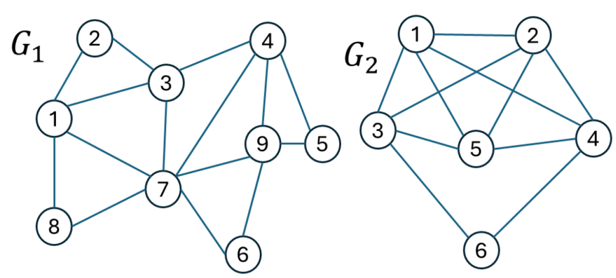
   b) una forma simplificada de la función usando mapas de Karnaugh.

x, y, x, w	$f(x, y, x, w)$
0000	1
0001	0
0010	1
0011	1
0100	0
0101	0
0110	0
0111	1
1000	1
1001	1
1010	1
1011	1
1100	1
1101	0
1110	0
1111	1

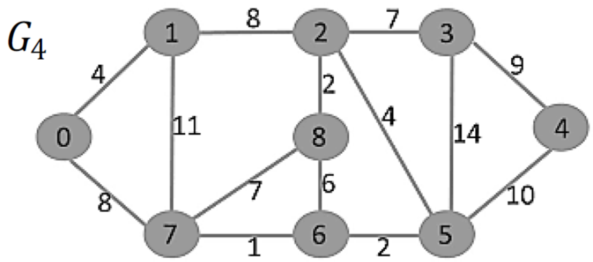
173. Para los grafos G_1 y G_2 de abajo:

   a) explique si existe algún circuito de Euler (si existe, dar un ejemplo).

   b) explique si puede existir algún ciclo Hamiltoniano (si existe, dar un ejemplo)



174. Sobre el grafo G_4, usar el algoritmo de Dijkstra para encontrar las distancias más cortas desde el nodo A.



175. *a*) Escriba las matrices de incidencia y adyacencia del grafo G_3.

b) Haga los recorridos del árbol correspondiente a G_5.