PROBABILIDAD

Unidad 1

1. En un club de lectura hay 10 hombres y 10 mujeres. Se elige un comité de 6 personas del club que debe consistir en 2 hombres y 4 mujeres.
   a) ¿Cuántos posibles comités se pueden formar?
   b) ¿Cuál es la probabilidad de que un matrimonio (hombre-mujer) del club NO esté a la vez en el comité?

2. El centro de idiomas ofrece inglés, francés y alemán. 100 estudiantes estudian al menos uno de los 3 lenguajes; 39 estudian inglés, 38 estudian francés, y 37 estudian alemán. 72 estudian inglés o francés; 2 estudian francés y alemán, 4 estudian inglés y francés pero no alemán.
   a) Dibuje el diagrama de Venn de la situación.
   b) Si se elige uno de estos estudiantes al azar, determine la probabilidad de que estudie los 3 idiomas.
   c) Determine la probabilidad de que estudie solo inglés.

3. Encuentre el valor de c de una variable aleatoria X con función de densidad de probabilidad:
$$f(x) = cxe^{-x}, \quad \text{si } x \geq 2$$
   (y vale cero fuera de ese intervalo).

4. Sea $f(x) = c\binom{3}{x}\binom{4}{4-x}$ para $x = 0, 1, 2, 3$.
   a) Construya la tabla y calcule el valor de c.
   b) Calcule el valor esperado de X.

5. En una librería, un estante tiene 3 diccionarios, 2 almanaques y 3 recetarios. De ese estante, se extrae una muestra de 4 ejemplares de forma aleatoria. Si X representa el número de diccionarios y Y el número de almanaques presentes en la muestra, determine:
   a) La distribución de probabilidad conjunta.
   b) $P(X + Y \leq 2)$.

6. Sea $f(x, y) = kxe^{xy}$ una función de densidad de probabilidad sobre el dominio $\Omega = \{$triángulo con vértices en $(0, 0), (2, 0), (2, 1)\}$ (y vale cero fuera de esa región).

   a) ¿X e Y son estadísticamente independientes?

   b) Calcule la probabilidad de que $Y > 0{,}3$, dado que $X = 3/2$.

7. Sea $f(x) = \frac{2}{3}x$ para $1 \leq x \leq 2$ (y vale 0 fuera de ese intervalo). Dar una cota usando Chebyshev para $P(10/9 \leq X \leq 2)$.

8. ¿Cuántos números pares de cuatro cifras se pueden formar con los dígitos 0, 1, 2, 5, 6 y 9, si cada dígito se puede utilizar solo una vez?

9. ¿De cuántas formas se pueden asignar 7 estudiantes de posgrado a una habitación triple y dos dobles durante una conferencia?

10. Demostrar: Si A y A' son eventos complementarios, entonces,

$$P(A) + P(A') = 1$$

11. La caja A contiene 3 canicas rojas y 2 azules. La caja B contiene 2 canicas rojas y 8 azules. Se lanza una moneda no cargada. Si cae cara se toma una canica de la caja A; si cae cruz, se toma una canica de la caja B. Encuentre la probabilidad de tomar una canica roja.

12. Del problema anterior (ejercicio 96) se supone que la persona que lanza la moneda no dice si cayó cara o cruz (de manera que no se sabe de qué caja se tomó la canica) pero sí dice que se tomó una canica roja. ¿Cuál es la probabilidad de que se haya tomado de la caja A (es decir, que la moneda cayó cara)?

13. Demostrar: Si un suceso A debe de ser el resultado de la ocurrencia de uno de los eventos mutuamente excluyentes $A_1, A_2, \ldots, A_n$, entonces

$$P(A) = P(A_1)P(A \mid A_1) + P(A_2)P(A \mid A_2) + \cdots + P(A_n)P(A \mid A_n)$$

14. Samanta va a armar una computadora por sí misma. Puede elegir entre dos marcas de procesadores, cuatro discos duros, tres memorias y cinco accesorios. ¿De cuántas formas diferentes puede Samanta pedir las piezas?

15. Durante un entrenamiento de fútbol escolar el coordinador defensivo necesita tener a 10 jugadores en fila. Entre estos 10 jugadores hay 1 de primer grado, 2 de segundo grado, 4 de tercer grado y 3 de sexto grado. ¿De cuántas formas diferentes pueden colocarse en fila, si sólo se distingue el grado de su clase?

16. Una bolsa contiene 4 bolas blancas y 3 negras; una segunda bolsa contiene 3 bolas blancas y 5 negras. Se saca una bola de la primera bolsa y se coloca sin verla en la segunda. ¿Cuál es la probabilidad de que una bola extraída de la segunda bolsa sea negra?

17. Una empresa de manufactura emplea tres planes analíticos (p_j) para el diseño y desarrollo de un determinado producto. Por razones de costos, los tres se utilizan en distintos momentos. De hecho, los planes 1, 2 y 3 se utilizan para la elaboración de 30 %, 20 % y 50 % de los productos, respectivamente. La tasa de defectos (D) es diferente para los tres procedimientos de la siguiente manera:

$$P(D \mid p_1) = 0{,}01; \quad P(D \mid p_2) = 0{,}03; \quad P(D \mid p_3) = 0{,}02$$

Donde $P(D \mid p_j)$ es la probabilidad de un producto defectuoso, dado el plan j. Si se observa un producto al azar y se determina que es defectuoso, ¿cuál es el plan más probable que se haya utilizado y, por lo tanto, el responsable?

18. En el lanzamiento de un par de dados no cargados, se define X como la variable aleatoria que representa la suma de los puntos. Determinar la tabla de distribución de probabilidad de X y la función.

19. Un lanzamiento (de 1 vez) para un par de dados, 1 rojo y 1 verde, no cargados. Con X el número que aparece en el dado rojo y Y el número que aparece en el dado verde. Determinar:

   a) Valor esperado de la suma de los 2 números.
   b) Valor esperado del producto de los 2 números.

20. Sea X el número de veces que fallará cierta máquina de control numérico: 1, 2 o 3 veces en un día dado. Y si Y denota el número de veces que se llama a un técnico para una emergencia, su distribución de probabilidad conjunta estará dada como:

   a) Evalúe la distribución marginal de X.
   b) Evalúe la distribución marginal de Y.
   c) Calcule $P(Y = 3 \mid X = 2)$.
   d) La función de probabilidad conjunta $f_{XY}(x, y)$.
   e) Covarianza y correlación.

21. Demostrar que dadas X y Y ambas variables aleatorias independientes:

   a) $\sigma^2_{X+Y} = \sigma^2_X + \sigma^2_Y$
   b) $\sigma^2_{X-Y} = \sigma^2_X + \sigma^2_Y$

22. Demostrar que dadas X y Y ambas variables aleatorias independientes:

$$\sigma_{XY} = 0$$

23. Al comprar cuatro focos de 60 vatios, se identifica que el empaque dice que la vida promedio es de 1000 horas. Entonces, si X es la duración de uno de estos focos, por lo cual es obvio $E(X)$. Enumere cada foco respectivamente como 1, 2, 3 y 4. Si se supone que la duración de cada foco se selecciona de una distribución simétrica con media igual a 1000:

    a) ¿Cuál es la probabilidad de que los 4 focos duren más de las 1000 horas? Suponiendo que el tiempo para que falle cada uno es de forma independiente.
    b) Determinar la distribución conjunta de los focos comprados, suponiendo que de forma más estricta las vidas de estos focos se seleccionan con base a una distribución normal con $\mu = 1000$, $\sigma = 100$, considerando independientes sus duraciones.
    c) ¿Cuál es la probabilidad de que los 4 focos duren al menos 900 horas?
    d) ¿Cuál es la probabilidad de que los 4 focos duren menos de 1050 horas?

24. Demostrar: La media y la varianza de la distribución hipergeométrica $h(x; N, n, k)$ son:

$$\mu = \frac{nk}{N} \quad \text{y} \quad \sigma^2 = \left(\frac{N-n}{N-1}\right) n \left(\frac{k}{N}\right)\left(1 - \frac{k}{N}\right)$$

    Nota: n es el tamaño de la muestra aleatoria, seleccionada de N elementos de los cuales k están clasificados como éxito.

25. Sea $f(x) = \frac{\theta^4}{6}x^3 e^{-\theta x}$

    a) Calcule Densidad.
    b) Hallar la Esperanza matemática.
    c) Determine la expresión de la Varianza.

26. Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} x+2, & [a, 2a] \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

    Calcule el intervalo donde la expresión es una función de densidad de probabilidad.

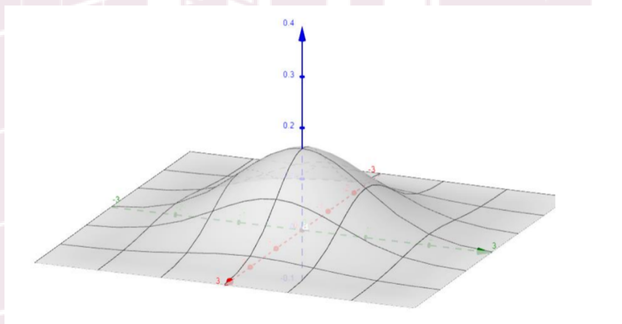
27. Compruebe que las siguientes funciones son funciones de densidad de probabilidad conjunta.

$$f(y_1, y_2) = \begin{cases} \left(\frac{1}{8}\right) y_1 e^{-(y_1+y_2)/2}, & y_1 > 0,\ y_2 > 0 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

28. Demuestre que la expresión es función de densidad de probabilidad.

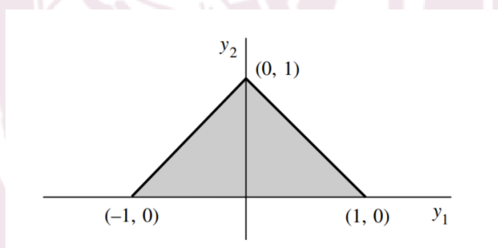
$$f(y_1, y_2) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & y_1^2 + y_2^2 \leq 1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

29. Encuentre la distribución de probabilidad bivariante de la siguiente figura:



30. Con la expresión del ejercicio anterior demuestre que la $f(y_1, y_2)$ es una función de densidad de probabilidad.

31. Hallar la esperanza matemática dada la siguiente figura:



32. Una moneda equilibrada y marcada con cara y cruz se lanza 4 veces consecutivas. Calcule la probabilidad de que:

    a) Las dos caras caigan el mismo número de veces.

    b) El número de veces que cae “cara” sea estrictamente mayor al número de veces que cae “cruz”.

33. Dos personas tienen la misma probabilidad de llegar al lugar de su cita en cualquier instante dentro del intervalo de tiempo $[0, T]$ y llegan de manera independiente una de la otra. Encuentre la probabilidad de que el tiempo que una persona que tenga que esperar a la otra sea, a lo suma $t > 0$.

34. Sean A y B eventos tales que $P(A) = p$, $P(B) = p$, $P(A \cap B) = r$. Encuentre lo siguiente:

   a) $P(A \cap B^c)$
   b) $P(A^c \cap B)$
   c) $P(A^c \cap B^c)$
   d) $P(A \triangle B)$

35. Un dado equilibrado se lanza dos veces consecutivas. Dado que en el primer lanzamiento se obtuvo un 3, ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de los dos resultados sea mayor a 6?

36. Si

$$f(x,y) = \begin{cases} 2(1-x), & 0 < x, y < 1 \\ 0, & \text{otro caso} \end{cases}$$

   Encuentre:

   a) Identificar qué tipos de variables son.
   b) Graficar la función de probabilidad.
   c) Encontrar la función de distribución.
   d) Graficar la función de distribución.
   e) La Esperanza de las variables X y Y.
   f) La Varianza de las variables X y Y.
   g) Encontrar la $Cov(X,Y)$.

37. Usando los siguientes datos:

x \ y	0	1	2	3
0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{20}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{20}$	0
2	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{40}$	0	0

   Encontrar:

   a) $P(X = 1, Y = 2)$
   b) $P(X = 0, 1 \leq Y \leq 3)$
   c) $P(X + Y \leq 1)$
   d) $F_{X,Y}(1{,}2, 0{,}9)$

38. Una oficina de finanzas solicita suministros de papel de uno de tres vendedores, V_1, V_2 o V_3. Los pedidos han de colocarse en dos días sucesivos, un pedido por día. Así, (V_2, V_3) podría denotar que el vendedor V_2 obtiene el pedido en el primer día y el vendedor V_3 obtiene el pedido en el segundo día.

    a) Suponga que los vendedores se seleccionan al azar cada día y se asigna probabilidad a cada punto muestral.
    b) Denote con A el evento de que el mismo vendedor obtenga ambos pedidos y B el evento de que V_2 obtenga al menos un pedido. Encuentre $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cup B)$ y $P(A \cap B)$ al suponer las probabilidades de los puntos muestrales en estos eventos.

39. Se necesitan dos jurados adicionales para completar un jurado para un juicio criminal. Hay seis jurados en perspectiva, dos mujeres y cuatro hombres. Dos de los jurados son seleccionados al azar de entre los seis disponibles.

    a) Defina el experimento y describa un punto muestral. Suponga que es necesario describir sólo los dos jurados seleccionados y no el orden en el que fueron elegidos.
    b) ¿Cuál es la probabilidad de que los dos jurados seleccionados sean mujeres?

40. Se ha de realizar un estudio en un hospital para determinar las actitudes de los enfermeros hacia diversos procedimientos administrativos. Se ha de seleccionar una muestra de 10 enfermeros de entre un total de 90 enfermeros empleadas por el hospital.

    a) ¿Cuántas muestras diferentes de 10 enfermeros se pueden seleccionar?
    b) Veinte de los 90 enfermeros son hombres. Si 10 enfermeros se seleccionan al azar entre los empleados por el hospital, ¿cuál es la probabilidad de que la muestra de diez incluirá exactamente 4 hombres (y 6 mujeres) enfermeros?

41. Los ocho miembros del Consejo Asesor de Relaciones Humanas de Gainesville, Florida, consideró la queja de una mujer que alegaba discriminación, basada en su género, de parte de una empresa local. El Consejo, compuesto de cinco mujeres y tres hombres, votó 5-3 a favor de la quejosa, con las cinco mujeres votando a favor de ella y los tres hombres en contra. El abogado que representaba a la compañía apeló la decisión del Consejo reclamando sesgo de género de parte de los miembros del Consejo. Si no hubo sesgo de género entre los miembros del Consejo, podría ser razonable hacer conjeturas de que sería probable que cualquier grupo de cinco miembros votara a favor de la quejosa como lo haría cualquier otro grupo de cinco. Si éste fuera el caso, ¿cuál es la probabilidad de que el voto se dividiera por líneas de género (cinco mujeres a favor, tres hombres en contra)?

42. Un experimento consiste en tirar un par de dados.

    a) Use los teoremas combinatorios para determinar el número de puntos muestrales del espacio muestral S.

    b) Encuentre la probabilidad de que la suma de los números que aparezcan en el dado sea igual a 7.

43. Suponga que Y posee la función de densidad

$$f(y) = \begin{cases} cy, & 0 \le y \le 2 \\ 0, & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

    a) Encuentre el valor de c que haga de $f(y)$ una función de densidad de probabilidad.

    b) Encuentre $F(y)$.

    c) Grafique $f(y)$ y $F(y)$.

    d) Use $F(y)$ para hallar $P(1 \le Y \le 2)$.

    e) Use $f(y)$ y geometría para hallar $P(1 \le Y \le 2)$.

44. Como una medición de inteligencia, a unos ratones se les toma el tiempo que tardan para pasar por un laberinto para llegar a una recompensa de alimento. El tiempo (en segundos) necesario para cualquier ratón es una variable aleatoria Y con una función de densidad dada por

$$f(y) = \begin{cases} \frac{b}{y^2}, & b \le y \\ 0, & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

donde b es el tiempo mínimo posible necesario para recorrer el laberinto.

    a) Demuestre que $f(y)$ tiene las propiedades de una función de densidad.

    b) Encuentre $F(y)$.

    c) Encuentre $P(Y > b + c)$ para una constante positiva c.

    d) Si c y d son constantes positivas tales que $d > c$, encuentre $P(Y > b+d \mid Y > b+c)$.

45. Si, como en el Ejercicio 4.17, Y tiene función de densidad

$$f(y) = \begin{cases} \frac{3}{2}y^2 + y, & 0 \le y \le 1 \\ 0, & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

encuentre la media y la varianza de Y.

46. La temperatura Y a la que se conecta un interruptor controlado por un termostato tiene función de densidad de probabilidad dada por

$$f(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 59 \leq y \leq 61 \\ 0, & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

encuentre la media y la varianza de Y.

47. Al estudiar bajas cotizaciones para contratos de embarques, una empresa fabricante de microcomputadoras encuentra que los contratos interestatales tienen bajas cotizaciones que están uniformemente distribuidas entre 20 y 25, en unidades de miles de dólares. Encuentre la probabilidad de que la baja cotización en el siguiente contrato interestatal

    a) esté por debajo de $22,000.
    b) sea de más de $24,000.

48. En un congreso en la ESCOM asistieron 131 personas. En el break, un asistente observó que de los 79 asistentes que tomaron café, 28 tomaron solamente café. Entre las 60 personas que tomaron té, hubo 21 invitados que también comieron galletas. De los 50 que comieron galletas, 12 comieron sólo galletas. Además, 9 consumieron las tres cosas. Haga un diagrama de Venn y determine: (a) cuántas personas consumieron café y té; (b) cuántas sólo café y té; (c) cuántas tomaron sólo té; (d) cuántas consumieron una sola cosa.

49. Sean A y B dos eventos tales que A ocurre con probabilidad $2/7$, B con probabilidad $3/7$, y ocurre exactamente uno de los dos con probabilidad $4/7$. Calcule la probabilidad de que ocurra A pero no B.

50. (a) Considere un área acotada y no vacía Ω en el plano y defina $p(A) = \frac{\text{Area}(A)}{\text{Area}(\Omega)}$, donde A es el evento definido como una sub-área de Ω. Verifique que p cumple los axiomas de probabilidad, considerando el tercer axioma sólo con dos eventos. (b) Se escogen dos números x y y al azar dentro del intervalo unitario $[0, 1]$. Calcule la probabilidad de que el producto de estos números sea menor a $1/2$.

51. Considere un canal de transmisión de bits con ruido. El ruido provoca que un 0 se distorsione en un 1 con probabilidad $0{,}14$, mientras que un 1 se distorsiona en un 0 con probabilidad $0{,}18$. Se asume que, en las cadenas transmitidas, el 1 aparece el $46{,}5\,\%$ de las veces. Encuentre la probabilidad de que al transmitir un bit: (a) se reciba un 1; (b) haya algún error en la transmisión; (c) se haya enviado un 1 dado que se recibió un 1.

52. Se eligen al azar dos personas en la calle. Encuentre la probabilidad de que los dos últimos dígitos de sus números de teléfono: (a) sean diferentes; (b) sean iguales.

53. Considere la variable aleatoria continua T, que representa el tiempo en horas que un estudiante de ESCOM de Ciencia de Datos invierte en estudiar la unidad de aprendizaje de probabilidad. La función acumulada de T está dada por $F(t) = k(2t^3 - t^4)$, para $0 \leq t \leq 1{,}5$, con $F(t) = 0$ para $t < 0$ y $F(t) = 1$ para $t > 1{,}5$. Determine: (a) el valor de k; (b) la proporción de estudiantes que estudian por más de una hora; (c) la función generadora de momentos y los dos primeros momentos alrededor del origen; (d) la media y la varianza.

54. Una moneda legal se lanza tres veces consecutivas. Sea X el número de águilas obtenidas y sea Y la mayor hilera de águilas consecutivas. Determine: (a) la tabla de distribución conjunta; (b) $P(X \leq 1 \mid Y \geq 1)$; (c) la covarianza $\operatorname{Cov}(X, Y) = E[(X - \mu_x)(Y - \mu_y)]$; (d) si las variables aleatorias conjuntas son estadísticamente independientes.

55. Encuentre todas las formas en que se pueden sentar 6 pasajeros en un camión de transporte público de la Ciudad de México con 25 lugares disponibles, sin importar el orden.

56. Determine el intervalo para que la función $f(x)$ sea una función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} x + 6, & x \in \left[\frac{1}{2}a, 3a\right], \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

57. Calcule el valor esperado del ejercicio indicado en la guía.

58. Calcule la varianza del ejercicio indicado en la guía.

59. Encuentre la probabilidad de obtener un número inferior a 8 al lanzar dos dados.

60. Una fábrica de focos dispone de dos máquinas, 1 y 2, que elaboran el $65\,\%$ y $35\,\%$ de la producción, respectivamente. El porcentaje de focos defectuosos es $6\,\%$ y $10\,\%$, correspondiente a cada máquina. Si se toma un foco al azar del lote del día, determine la probabilidad de que el foco fabricado por la máquina 1 sea defectuoso.

61. En cierta escuela primaria, el $27\,\%$ de los estudiantes practica soccer, el $15\,\%$ practica baloncesto y únicamente el $3\,\%$ practica ambos deportes. Encuentre el porcentaje de estudiantes que no practican ningún deporte.

62. Sea

$$f(y_1, y_2) = \begin{cases} \frac{1}{8} y_1 e^{-(y_1 + y_2)/2}, & y_1 > 0,\ y_2 > 0, \\ 0, & \text{en cualquier otro punto.} \end{cases}$$

Verifique que es una función de densidad y calcule $P\left(y_1 < 5,\ y_2 > \frac{3}{4}\right)$.

Unidad 2

1. Dada la variable aleatoria X con función de masa dada abajo; calcule la FGM $M_X(t)$, y con ella determine $E[X]$ y $V[X]$:

x	1	2	3
$f(x)$	0.7	0.2	0.1

2. Una empresa que fabrica pantalones de mezclilla tiene varias estaciones de trabajo; cada estación cuenta con 4 etapas independientes para el acabado de una pieza (los patrones cortados de un pantalón van transitando de estación en estación para sus diversas costuras). Las 4 etapas de trabajo son: costura de cierres (tiempo X_1), costura de bolsas (tiempo X_2), costura general (X_3); y detalles menores (X_4). En cada estación, el tiempo necesario para cada etapa se modela con variables aleatorias normales (en minutos) como sigue: $X_1 \sim N(9, 0{,}9)$, $X_2 \sim N(5, 0{,}4)$, $X_3 \sim N(10, 1{,}6)$ y $X_4 \sim N(5, 0{,}4)$

   a) ¿Cuál es la media y varianza del tiempo total que requiere el acabado de un pantalón?

   b) Si un día de trabajo en particular se han fabricado 15 pantalones, ¿cuál es la probabilidad de que el promedio del tiempo de acabado total sea menor a 30 minutos?

3. En el IPN-Zacatenco, se reportan 45 accidentes por año. Use la aproximación a la normal para encontrar la probabilidad de que haya más de 50 accidentes en un año cualquiera.

4. Los terremotos anuales más grandes en la escala de Richter para México (área central) en el periodo de 1912-2019 sigue aproximadamente una distribución de Fréchet$(8{,}0, 4)$. Calcule media y varianza.

5. Para la función de densidad de probabilidad:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} & 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

   a) Calcule la función generadora de momentos de la variable aleatoria X.

   b) Determinar los primeros 4 momentos.

6. Tras las pruebas de fin de cursos de los alumnos en el último año de nivel medio superior en el Estado de México, se obtiene una media de 60 y una varianza de 64. Cierta generación específica de la escuela Número 15, con $n = 100$ alumnos tuvo una media de 58. ¿Puede afirmarse que esta preparatoria sea inferior al resto de las escuelas?

7. Calcule la Varianza de la distribución:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda\alpha(\lambda x)^{\alpha-1}e^{-(\lambda x)^{\alpha}}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

8. La población de las temperaturas corporales de adultos sanos tiene media $\mu = 36{,}8°C$ y desviación típica $\sigma = 0{,}4°C$. Determine: (a) qué proporción de adultos sanos reportará más de $37{,}5°C$; (b) por debajo de qué valor se obtiene el $15\,\%$ más alto del reporte de temperaturas; (c) las temperaturas que contienen el $60\,\%$ de lo reportado, centrado en la media; (d) usando el teorema central del límite, si se obtiene una muestra de 100 personas, cuál es la probabilidad de que la media muestral sea menor o igual que $36{,}5°C$.

9. En Zacatenco se reportan 45 accidentes por año. Use la aproximación a la normal para encontrar la probabilidad de que haya más de 50 accidentes en un semestre cualquiera.

10. El tiempo de antelación con el que los viajeros compran sus billetes de avión a Estados Unidos se puede modelar mediante una distribución exponencial con tiempo promedio igual a 1 mes, es decir, 30 días. Determine: (a) la probabilidad de que un viajero compre un billete con menos de quince días de antelación; (b) usando distribución de extremos, la probabilidad de que el tiempo de antelación máxima supere los 4 meses.

Unidad 3

1. Pepito tiene un dado con 9 caras (enumeradas del 1 al 9) y lleva a cabo 5 lanzamientos.
   a) Encuentre la probabilidad de que al menos 2 de las 5 salidas sea menor o igual que 4.
   b) Ahora se efectúan n lanzamientos, y se define la variable aleatoria X como el número de valores que fueron menores o iguales a un cierto k ($k \leq 9$). Si se sabe que $\mu = 96$ y $\sigma^2 = 32$, ¿cuánto valen n y k?

2. Una fábrica de pantalones de mezclilla determina que el número de pantalones cortados defectuosamente por las máquinas es una variable de Poisson con media de 1 pantalón defectuoso cada 4 horas. Considere que una jornada diaria de las máquinas de corte consta de 16 horas por día.
   a) ¿Cuál es la probabilidad de que no haya pantalones con defecto en una jornada diaria dada?
   b) ¿Cuál es la probabilidad de que haya entre 19 y 21 fallos (ambos incluidos) en un periodo de una semana laboral (es decir, 6 días)?

3. Considerando la misma información que el ejercicio previo:
   a) ¿Cuál es la probabilidad de tener que esperar 6 semanas laborales hasta obtener la segunda semana laboral donde se tiene entre 19 y 21 fallos (ambos incluidos)?
   b) ¿Cuál es la probabilidad de tener que esperar 5 jornadas diarias hasta obtener la primera jornada diaria en la que no hay pantalones con defecto?

4. Suponga que la FGM de una variable aleatoria $Y = \text{función}(X)$ está dada por: $M_Y(t) = e^{5t}\left(1 - \frac{3t}{4}\right)^{-1}$, calcule $P(X < 5{,}6 \mid X > 2{,}5)$ [*Hint*: determine la distribución de X, usando los teoremas de abajo].
   a) **Teorema 1:** Si la FGM existe, entonces es única y determina por completo a la distribución de probabilidad.
   b) **Teorema 2:** $M_{\alpha X+\beta}(t) = e^{\beta t} M_X(\alpha t)$.

5. Las bolsas de colación con frutos secos que venden en la cafetería tienen un peso que sigue una distribución normal con media de 60 gr y desviación 4 gr.
   a) ¿Cuál es la probabilidad de que una de esas bolsas (tomada al azar), haya pesado más de 67 gr?
   b) Calcular el peso que tuvo el 23 % más bajo de la población de productos.
   c) Las bolsas son compradas una tras otra, ¿cuál es la probabilidad de que la 5ª bolsa vendida sea la segunda con peso mayor a 67 gr?

6. La edad de los autos de los profesores en el estacionamiento de la ESCOM corresponde a una distribución uniforme desde los seis meses a 9.5 años.

   a) Encuentre media y varianza.

   b) Si se consideran solo los carros de menos de 6.5 años, encuentre la probabilidad de que tengan menos de 4 años.

7. Suponga que X tiene una distribución beta. Determine el valor de la constante C (su expresión en términos de la función beta y su valor numérico) si la f.d.p. está dada como $f(x) = Cx^3(1-x)^6$. Determine media y varianza.

8. Una empresa que fabrica pantalones de mezclilla tiene varias estaciones de trabajo; cada estación cuenta con 4 etapas independientes para el acabado de una pieza (los patrones cortados de un pantalón van transitando de estación en estación para sus diversas costuras). Las 4 etapas de trabajo son: costura de cierres (tiempo X_1), costura de bolsas (tiempo X_2), costura general (X_3); y detalles menores (X_4). En cada estación, el tiempo necesario para cada etapa se modela con variables aleatorias normales (en minutos) como sigue: $X_1 \sim N(9, 0{,}9)$, $X_2 \sim N(5, 0{,}4)$, $X_3 \sim N(10, 1{,}6)$ y $X_4 \sim N(5, 0{,}4)$.

   a) ¿Qué proporción de pantalones reportará más de $9{,}1$ min en la estación 1?

   b) ¿Por arriba de qué valor se obtiene el 15 % del reporte de los tiempos más altos en la estación 2?

   c) Calcular los tiempos que tienen el 60 % de lo reportado, centrado en la media para la estación 3.

9. En familias de 3 hijos, determinar la distribución de probabilidad correspondiente a niños y niñas. Suponga probabilidades iguales para niños y para niñas.

10. Demostrar: Suponga que $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$ son variables aleatorias independientes discretas y defina $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Entonces, la función generatriz de los momentos para Y es:

$$\mathcal{M}_Y(t) = \prod_{i=1}^{n} \mathcal{M}_{X_i}(t)$$

11. Se embarca un producto industrial en lotes de 20. Un proyecto de muestreo elaborado para minimizar el número de artículos defectuosos surtidos a los consumidores exige un muestreo de cinco artículos de cada lote y el rechazo del lote, si se encuentra más de un artículo defectuoso. (En el caso de ser rechazado el lote se prueba cada artículo de éste). Si un lote contiene cuatro defectuosos, ¿cuál es la probabilidad de que sea rechazado?

12. Demostrar: Que las probabilidades asignadas para una distribución de probabilidad de Poisson satisfacen los requisitos:

$$0 \leq p(x) \leq 1 \quad \forall x \quad \text{y} \quad \sum_{x=0}^{\infty} p(x) = 1$$

13. En un proceso de manufacturación, se sabe que en promedio, 1 de cada 100 artículos es defectuoso. Determinar la probabilidad de que el quinto artículo inspeccionado sea el primer artículo defectuoso encontrado.

14. En la última serie de campeonatos de la NBA, el equipo que resulta ganador en cuatro partidos de siete es el ganador de la serie. Suponiendo que los equipos T_A y T_B se han enfrentado en los partidos del campeonato y que el equipo T_A tiene una probabilidad de $0{,}55$ de ganar un partido al equipo T_B. Determinar:

    a) La probabilidad de que el T_A gane la serie en 6 partidos.
    b) La probabilidad de que el equipo T_A gane la serie.
    c) La probabilidad de que el equipo T_A gane la serie si estos equipos se enfrentaran en una serie de eliminatorias por región, que se decide ganando 3 de 5 partidos.

15. Una muestra aleatoria de 7 pingüinos en la que se pretende conocer la estatura promedio arrojo los siguientes datos:

N	1	2	3	4	5	6	7
X (m)	1.01	1.21	1.17	1.05	0.99	1.28	1.07

16. Calcule los intervalos de confianza para 0.68, 0.95 y 0.99.

17. Del problema anterior, calcule la probabilidad de hallar un pingüino que mida entre 1.15m. y 1.17m. con el supuesto de que la población de pingüinos tiene una distribución normal estándar.

18. Llegan clientes a un mostrador de salida en una tienda de departamentos de acuerdo con una distribución de Poisson, a un promedio de 7 por hora. Durante una hora determinada ¿Cuáles son las probabilidades de que no lleguen más de tres clientes?

19. Suponga que entrevistamos sucesivamente personas que trabajan en la gran empresa estudiada en el ejemplo 3.10 y denotamos las entrevistas cuando encontramos a la primera persona que le guste esa política. Si la sexta persona entrevistada es la primera que está a favor de la nueva política. Encuentre una estimación para p, la proporción verdadera pero desconocida de empleados que están a favor de la nueva política.

20. Un problema importante encontrado por directores de personal y otros que se enfrentan a la selección del mejor candidato en un conjunto finito de elementos, queda ejemplificado en la siguiente situación. De un grupo de ingenieros con titulo de Ph. D, diez de ellos son seleccionados al azar para un ejemplo. ¿Cuál es la probabilidad de que los 10 seleccionados incluyan los cinco mejores ingenieros del grupo de 20?

21. Calcule la varianza de la función Gamma:

$$f(y) = \begin{cases} \frac{y^{\alpha-1}e^{-y/\beta}}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}, & y \geq 0 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

22. Demuestre que la expresión es función de densidad de probabilidad.

$$f(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < y < \infty.$$

23. Llegan clientes a un mostrador de salida en una tienda de departamentos de acuerdo con una distribución de Poisson, a un promedio de 6 por hora. Durante una hora determinada ¿Cuáles son las probabilidades de que no lleguen más de cuatro clientes?

24. Calcule la varianza de la función Beta:

$$f(y) = \begin{cases} \frac{y^{\alpha-1}(1-y)^{\beta-1}}{B(\alpha,\beta)}, & 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

25. Un estudio geológico indica que un pozo petrolero de exploración perforado en una región particular debe producir petróleo con probabilidad 0.35. Encuentre la probabilidad de que el quinto descubrimiento de petróleo llegue en el quinto pozo perforado.

26. Si

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{n(n+1)}, & x = 1, 2, \ldots, n \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

    a) Identificar qué tipo de variable es.
    b) Graficar la función de probabilidad.
    c) Encontrar la función de distribución.
    d) Graficar la función de distribución.
    e) La Esperanza de la variable X.
    f) La Varianza de la variable X.

27. Sean a y l constantes con $l > 0$, si

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2l}, & |x-a| < l \\ 0, & |x-a| \geq l \end{cases}$$

a) Identificar qué tipo de variable es.
b) Graficar la función de probabilidad.
c) Encontrar la función de distribución.
d) Graficar la función de distribución.
e) La Esperanza de la variable X.
f) La Varianza de la variable X.

28. Suponga que un lote de 5000 fusibles contiene 5 % de piezas defectuosas. Si se prueba una muestra de 5 fusibles. Encuentre la probabilidad de hallar al menos uno defectuoso.

29. Sea X una v.a. discreta tal que $X \sim geo(p)$.

a) Encuentre $E(X)$.
b) $Var(X)$.
c) La función generadora de probabilidad.

30. Una persona participa cada semana con un boleto en un juego de lotería, en donde la probabilidad de ganar el primer premio es $p = \frac{1}{1{,}000{,}000}$. ¿Cuántos años en promedio debe esta persona participar en el juego hasta obtener el primer premio?

31. Sea X una v.a. discreta tal que $X \sim Poisson(p)$.

a) Encuentre $E(X)$.
b) $Var(X)$.
c) La función generadora de probabilidad.

32. El número de semillas en una variedad de naranjas sigue una distribución de Poisson con media 1. Encuentre la probabilidad de que una naranja seleccionada al azar contenga:

a) ninguna semilla
b) al menos dos semillas
c) a lo sumo tres semillas

33. Sea X una v.a. continua tal que $X \sim exp(\lambda)$.

a) Encuentre $E(X)$.
b) $Var(X)$.
c) La función generadora de probabilidad.

34. Supongamos que el tiempo de espera en minutos que un usuario cualquiera permanece revisando su correo electrónico sigue una distribución exponencial de parámetro $\lambda = \frac{1}{5}$. Esto significa que la conexión promedio al servidor de correos es de $(\frac{1}{\lambda}) = 5min$. Calcule la probabilidad de que un usuario cualquiera permanezca conectado al servidor de correo:

    a) menos de un minuto
    b) más de una hora

35. Sea X una v.a. continua tal que $X \sim gamma(\alpha, \lambda)$.

    a) Encuentre $E(X)$.
    b) $Var(X)$.
    c) El momento k.

36. Si Z es una variable aleatoria normal estándar, encuentre el valor z_0 tal que

    a) $P(Z > z_0) = 0{,}5$.
    b) $P(Z < z_0) = 0{,}8643$.
    c) $P(-z_0 < Z < z_0) = 00{,}90$.
    d) $P(-z_0 < Z < z_0) = {,}99$.

37. Se especifica que los cables manufacturados para usarse en un sistema de computadora deben tener resistencias entre 0.12 y 0.14 ohms. Las resistencias medidas reales de los cables producidos por la compañía A tienen una distribución de probabilidad normal con media de 0.13 ohms y desviación estándar 0.005 ohm.

    a) ¿Cuál es la probabilidad de que un cable seleccionado al azar de la producción de la compañía A satisfaga las especificaciones?
    b) Si cuatro de estos cables se usan en el sistema de cada computadora y todos son seleccionados de la compañía A, ¿cuál es la probabilidad de que los cuatro en un sistema seleccionado al azar satisfagan las especificaciones?

38. Si Y tiene una distribución exponencial y $P(Y > 2) = 0{,}0821$, ¿cuál es

    a) $\beta = E(Y)$?
    b) $P(Y \leq 1{,}7)$?

39. A es el crush de un alumno B. En cualquier día existe un $18\,\%$ de probabilidad de que A le sonría. Defina claramente la variable aleatoria que usará y determine: (a) la probabilidad de que pasen más de 6 días sin que A le sonría; (b) la probabilidad de que B no tenga que esperar más de 5 días hasta ver una sonrisa de A; (c) la probabilidad de que A le sonría a B en exactamente 3 días dentro de los siguientes 10 días.

40. El BBVA de la Plaza Torres recibe, en promedio, 2 billetes falsos al día. Si se asume que el número de billetes falsos sigue una distribución de Poisson, determine: (a) la probabilidad de recibir más de tres billetes falsos en un día dado; (b) la probabilidad de recibir 10 billetes falsos en una semana; (c) la probabilidad de que el quinto día consecutivo que se inspecciona el banco sea el tercero en que se reciben más de 3 billetes falsos; (d) la probabilidad de que, en dos de cinco semanas consecutivas revisadas, se hayan recibido 10 billetes falsos.

41. La experiencia ha demostrado que el $18\,\%$ de todas las personas afectadas por cierta enfermedad se recuperan. Una empresa fabricante de medicamentos ha invertido en una nueva medicina. Doce personas con la enfermedad se seleccionaron al azar y recibieron la medicina; nueve se recuperaron al poco tiempo. Suponga que la medicina no es eficaz en absoluto. Calcule la probabilidad de que se recuperen al menos ocho de las doce personas que recibieron la medicina, usando distribución binomial.

42. Un estudio geológico indica que un pozo petrolero de exploración perforado en una región particular debe producir petróleo con probabilidad $0{,}35$. Encuentre la probabilidad de que el segundo descubrimiento de petróleo llegue en el sexto pozo perforado, usando distribución binomial negativa.

43. Suponga que se entrevista sucesivamente a personas que trabajan en una empresa y se registra cuándo se encuentra a la primera persona que está a favor de una nueva política. Si la octava persona entrevistada es la primera que está a favor, encuentre una estimación para p, la proporción verdadera pero desconocida de empleados a favor de la nueva política, usando distribución geométrica.

44. De un grupo de 21 ingenieros con título de Ph.D., nueve son seleccionados al azar. Determine la probabilidad de que los nueve seleccionados incluyan a los seis mejores ingenieros del grupo, usando distribución hipergeométrica.

45. Llegan clientes a un mostrador de salida en una tienda departamental de acuerdo con una distribución de Poisson, a un promedio de 11 por hora. Durante una hora determinada, calcule: (a) la probabilidad de que no lleguen más de dos clientes; (b) la probabilidad de que lleguen al menos tres clientes; (c) la probabilidad de que lleguen exactamente cuatro clientes.

46. Calcule la varianza de la distribución exponencial utilizando la definición para una distribución de probabilidad continua o cualquiera de sus propiedades.

47. Calcule el valor de la función gamma cuando $\alpha = 5$.

48. Demuestre que la distribución gamma es una función de densidad.

49. Sea

$$f(y) = \begin{cases} k y^3 e^{-y/2}, & y > 0, \\ 0, & \text{en otro punto.} \end{cases}$$

Halle el valor de k que hace de $f(y)$ una función de densidad.

50. Determine el valor esperado de la variable aleatoria definida en el ejercicio anterior.

51. Sea

$$f(y) = \begin{cases} \dfrac{y^{\alpha-1} e^{-y/\beta}}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}, & 0 \leq y < \infty, \\ 0, & \text{en otro punto.} \end{cases}$$

Determine la varianza.

52. Trace el isométrico, es decir, la gráfica 3D, de la función

$$f(y_1, y_2) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2)}, \qquad -\infty < y_1 < \infty, \; -\infty < y_2 < \infty.$$

53. Trace el sistema de ecuaciones de la siguiente red. Proponga las probabilidades y las variables que prefiera para cada nodo.