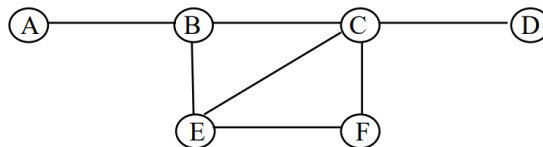




## PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

### Unidad 1

- Supóngase que  $A$  y  $B$  son eventos independientes, tales que la probabilidad de que no ocurra ninguno de los dos es  $a$  y la probabilidad de que ocurra  $B$  es  $b$ . Demuestra que  $P(A) = (1 - b - a)/(1 - b)$ .
  - Sean  $A$  y  $B$  dos eventos asociados con un experimento. Supóngase que  $P(A) = 0,4$ , mientras que  $P(A \cup B) = 0,7$ . Sea  $P(B) = p$ 
    - ¿Para qué elecciones de  $p$  son  $A$  y  $B$  mutuamente excluyentes?
    - ¿Para qué elecciones de  $p$  son  $A$  y  $B$  independientes?
- En el siguiente diagrama sean  $A, B, \dots, F$  islas, y las líneas que las conectan, puentes. Un hombre comienza en  $A$  y camina de isla a isla. Se detiene a almorzar cuando no puede continuar caminando sin cruzar el mismo puente dos veces.



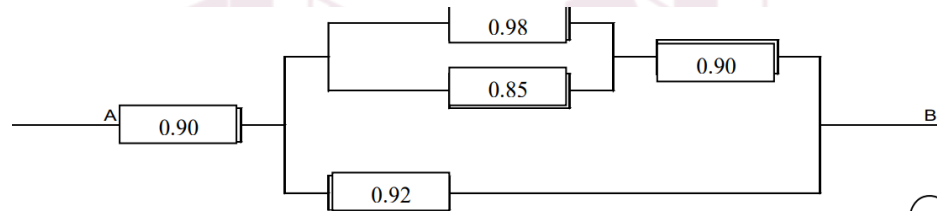
- Construir el diagrama de árbol apropiado, y encontrar el número de caminos que puede tomar antes de almorzar.
  - ¿En qué islas podrá almorzar?
- La urna 1 contiene  $y$  esferas blancas y  $x$  rojas. La urna 2 contiene  $z$  blancas y  $v$  rojas. Se escoge una esfera al azar de la urna 1 y se pone en la urna 2. Entonces se escoge una esfera al azar de la urna 2. ¿Cuál es la probabilidad de que esta esfera sea blanca?
  - Utiliza la regla de Bayes para:

Se supone que una cierta prueba detecta el cáncer con probabilidad de 0,8 entre gente que padece cáncer. Si una persona no padece cáncer la prueba indicará este hecho un 95% de las veces. Si el 3% de la población de prueba padece cáncer y la prueba de una persona determinada, seleccionada al azar indique:

    - tiene cáncer. ¿Cuál es la probabilidad de que efectivamente padezca dicha enfermedad?
    - No tiene cáncer ¿Cuál es la probabilidad de que padezca dicha enfermedad?



5. Considera el siguiente ensamble serie-paralelo que se muestra las probabilidades de que las unidades del sistema funcionen de manera correcta. Los componentes operan de manera independiente y el ensamble falla sólo cuando se rompe la trayectoria de  $A$  a  $B$ . ¿Cuál es la probabilidad de que el sistema funcione?



6. Un mecanismo puede ponerse en cuatro posiciones, digamos  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$ . Hay ocho de tales mecanismos en un sistema.
- Suponga que dichos mecanismos están instalados en cierto orden (lineal) pre-asignado. ¿De cuántas maneras posibles se instalan los mecanismos si dos mecanismos adyacentes no están en la misma posición?
  - ¿Cuántas maneras son posibles si sólo se usan las posiciones  $a$  y  $b$  con la misma frecuencia?
7. Un número binario está compuesto solo de los dígitos 0 y 1. (Por ejemplo, 1011, 1100, etc.) Esos números juegan un papel muy importante en el uso de las computadoras. Suponga que un número binario está formado por  $n$  dígitos. Suponga, además, que la probabilidad de que aparezca un dígito incorrecto es  $p$  y que los errores en dígitos diferentes son independientes uno de otro. ¿Cuál es la probabilidad de formar un número incorrecto?
8. Un tubo al vacío puede provenir de uno cualquiera de 3 fabricantes con probabilidades  $p_1 = 0,25$ ,  $p_2 = 0,50$  y  $p_3 = 0,25$ . Las probabilidades de que el tubo funcione correctamente durante un período de tiempo especificado son iguales a 0,1, 0,2 y 0,4, respectivamente, para los tres fabricantes. Calcular la probabilidad de que un tubo elegido aleatoriamente funcione durante el período de tiempo especificado.
9. Una empresa industrial grande utiliza tres hoteles locales para proporcionar alojamiento a sus clientes durante la noche. De pasadas experiencias se sabe que al 20 % de ellos se les asigna habitación en el Ramada Inn, al 50 % en el Sheraton y al 30 % en el Lakeview Motor Lodge. Si existe una falla en el servicio de plomería en el 5 % de los cuartos del Ramada Inn, en el 4 % de los cuartos del Sheraton y en 8 % de los cuartos del Lakeview Motor Lodge, ¿cuál es la probabilidad de que, a una persona con un cuarto que tenga problemas de plomería se le asigne acomodo en Ramada Inn?
10. a) Una estantería contiene 8 compartimentos separados. ¿De cuántas maneras se pueden colocar 5 canicas idénticas en los compartimentos?
- b) Una estantería contiene 8 compartimentos separados. ¿De cuántas maneras idénticas se pueden colocar 16 canicas idénticas de tal manera que no hayan compartimentos vacíos?



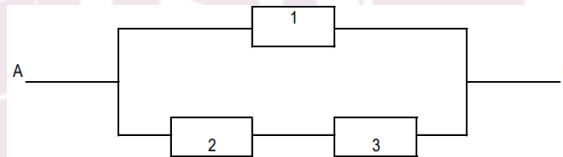
11. Un lote contiene 25 artículos. Si se sabe que 7 artículos son defectuosos y se inspeccionan en un orden aleatorio. ¿Cuál es la probabilidad de que el décimo artículo inspeccionado sea el último artículo defectuoso en el lote?
12. Suponga que tenemos dos urnas, 1 y 2, cada uno con dos cajones. La urna 1 contiene una moneda de oro en un cajón y una de plata en el otro, mientras que la urna 2 tiene una moneda de oro en cada uno de los cajones. Se escoge una urna al azar; y de ésta se escoge un cajón al azar. La moneda encontrada en este cajón resulta ser de oro. ¿Cuál es la probabilidad de que, en el otro cajón de esta urna exista una moneda de oro?
13. Un mecanismo puede ponerse en 6 posiciones diferentes, digamos  $a, b, c, d, e$  y  $f$ . Hay 8 de tales mecanismos en un sistema.
  - a) ¿De cuántas maneras puede instalarse este sistema?
  - b) Suponga que dichos mecanismos están instalados en cierto orden(lineal) pre-asignado. ¿De cuántas maneras posibles se instalan los mecanismos si dos mecanismos adyacentes no están en la misma posición?
  - c) ¿Cuántas maneras son posibles si sólo se usan las posiciones  $c$  y  $e$  con la misma frecuencia?
14. Se sacan tres cartas sin reemplazo de un naipe común de 52 cartas. Encuentre la probabilidad de que
  - a) todas las cartas sean de un mismo palo,
  - b) al menos se saque un as.
15. Un lote contiene  $n$  artículos. Si se sabe que  $r$  artículos son defectuosos y se inspeccionan en un orden aleatorio. ¿Cuál es la probabilidad de que el  $k$ -ésimo artículo (con  $k \geq r$ ) inspeccionado sea el último defectuoso en el lote?
16. Un bolso contiene 5 monedas, 2 de las cuales son normales, mientras que las otras 3 son sesgadas (están acuñadas con dos caras), por las demás características las monedas son idénticas. Se extrae una moneda aleatoriamente del bolso y, enseguida, se lanza 5 veces, obteniéndose 5 caras. Determine la probabilidad de que la moneda extraída sea una de las monedas sesgadas.
17. Un mecanismo puede ponerse en cinco posiciones diferentes, digamos  $a, b, c, d$  y  $e$ . Hay 6 de tales mecanismos en un sistema.
  - a) ¿De cuántas maneras puede instalarse este sistema?
  - b) Suponga que dichos mecanismos están instalados en cierto orden(lineal) pre-asignado. ¿De cuántas maneras posibles se instalan los mecanismos si dos mecanismos adyacentes no están en la misma posición?
  - c) ¿Cuántas maneras son posibles si sólo se usan tres posiciones con la misma frecuencia?



18. Encuentre la probabilidad de obtener en un juego de póker
- a) una escalera flor: la cual conste de 10, jota, reyna, rey y as del mismo palo,
  - b) un fuljan: que conste de tres cartas de un valor y dos de otro (como tres jotas y dos 10).
19. Un lote contiene 30 artículos. Se sabe que 6 artículos son defectuosos. Si se extraen uno a uno 10 artículos, sin reemplazo, para inspeccionarlos ¿Cuál es la probabilidad de que el décimo artículo inspeccionado sea quinto artículo defectuoso en el lote?
20. Un bolso contiene 5 monedas, 3 de las cuales son normales, mientras que las otras dos son sesgadas (tienen dos caras). Por las demás características las monedas son idénticas. Se extrae una moneda aleatoriamente del bolso y, enseguida, se lanza 4 veces, obteniéndose 4 caras. Determine la probabilidad de que la moneda extraída sea una de las monedas sesgadas.
21. Para evitar que lo descubran en la aduana, un viajero ha colocado 6 tabletas de narcóticos en cada una de 4 botellas que contienen 9 píldoras de vitaminas que son similares en apariencia. ¿Cuál es la probabilidad de que el viajero sea arrestado por posesión ilegal de narcóticos si,
- a) el oficial de la aduana selecciona 6 tabletas aleatoriamente para analizarlas, en solamente uno de los frascos.
  - b) el oficial de la aduana selecciona 6 tabletas aleatoriamente para analizarlas, en 2 de los 4 frascos.
22. Sean  $A$ ,  $B$ , y  $C$  eventos tales que  $A$  y  $B$  son mutuamente excluyentes,  $A$  y  $C$  son independientes,  $B$  es subconjunto de  $C$ . Además cumple
- $$4P(A) = 2P(B) = P(C) > 0$$
- y
- $$P(A \cup B \cup C) = 4P(A).$$
- Calcula  $P(A)$
23. De 6 números positivos y 8 números negativos se eligen 4 números al azar sin sustitución y se multiplican. ¿Cuál es la probabilidad de que el producto sea un número positivo?



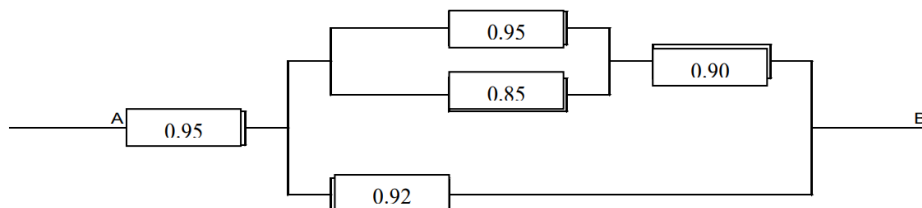
24. Construir un sistema de agua que fluye a través de unas válvulas de  $A$  a  $B$ . Las válvulas 1, 2 y 3 funcionan independientemente y cada una se abre correctamente mediante una señal con una probabilidad de 0,8.
- a) Encuentra la distribución de probabilidad de  $Y$ , el número de vías abiertas de  $A$  a  $B$  después de haber enviado la señal.
- b) La media, la varianza y la función generadora de momentos para  $Y$ .



25. Utiliza la regla de Bayes para:

Se ha observado que los hombres y las mujeres reaccionan de una manera diferente en ciertas circunstancias; 70 % de las mujeres reaccionan positivamente en dichas circunstancias, mientras que el porcentaje en los hombres es solamente del 40 %. Se somete a prueba un grupo de 20 personas, 15 mujeres y 5 hombres, y se les pide llenar un cuestionario para descubrir sus reacciones. Una respuesta escogida al azar de las 20 resultó negativa. ¿Cuál es la probabilidad de que haya sido contestada por un hombre?

26. Considera el siguiente ensamble serie-paralelo en el que se muestran las probabilidades de que las unidades del sistema funcionen de manera correcta. Los componentes operan de manera independiente y el ensamble falla sólo cuando se rompe la trayectoria de  $A$  a  $B$ .
- a) ¿Cuál es la probabilidad de que el sistema funcione?
- b) Si el sistema funciona ¿cuál es la probabilidad de que el componente de probabilidad 0,92 no funcione?



27. Una fuerza de tarea gubernamental sospecha que algunas fábricas violan los reglamentos contra la contaminación ambiental con respecto a la descarga de cierto tipo de producto, 20 empresas están bajo sospecha pero no todas se pueden inspeccionar. Supón que tres de las empresas violan los reglamentos. ¿Cuál es la probabilidad de que
- a) en la inspección de 5 empresas no se encuentre ninguna violación?
- b) el plan anterior encuentre 2 que violan el reglamento?

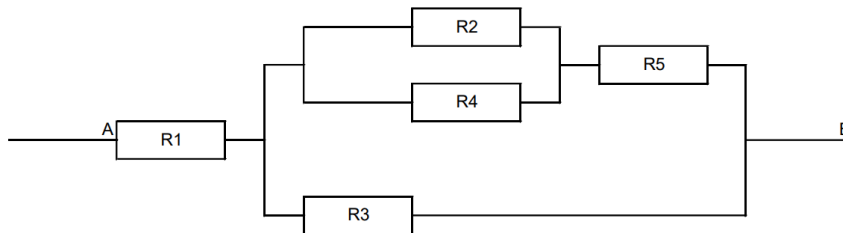


28. Un mecanismo puede ponerse en cuatro posiciones, digamos  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$ . Hay 8 de tales mecanismos en un sistema, ¿Cuál es la probabilidad de instalar el sistema de tal manera que sólo se usen dos posiciones diferentes y una de ellas aparezca tres veces más a menudo que la otra?
29. Considera el ensamble serie-paralelo que se muestra abajo. Los valores  $R_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 5$ ) son las confiabilidades de los 5 componentes indicados, esto es,

$R_i$  = probabilidad de que la unidad  $i$  funcione de manera adecuada.

Los componentes operan de manera mutuamente independiente y el ensamble falla sólo cuando se rompe la trayectoria de  $A$  a  $B$ . Expresa la confiabilidad del ensamble como una función de

$$R_1, \dots, R_5.$$



30. Cinco urnas llevan los números 1, 2, 3, 4 y 5 respectivamente. La urna  $i$  contiene  $i$  bolas blancas y  $(5 - i)$  bolas negras, con  $i = 1, \dots, 5$ . Se selecciona al azar una urna y después se sacan sin reposición dos bolas de dicha urna. Si ambas bolas seleccionadas son blancas ¿Cuál es la probabilidad de que se haya seleccionado la urna 3?
31. Si  $A$ ,  $B$ ,  $C$  son sucesos independientes, demostrar que  $A$  y  $(B \cup C)$  son independientes.
32. En una fábrica de zapatos, se sabe por experiencia pasada que la probabilidad es de 0,82 de que un trabajador que ha asistido a un programa de capacitación de la fábrica cumplirá con la cuota de producción y que la probabilidad correspondiente es 0,53 para un trabajador que no asistió al programa de capacitación. Si 60% de los trabajadores asisten al programa de capacitación de la fábrica, ¿Cuál es la probabilidad de que un trabajador que cumple con la cuota de producción habrá asistido al curso?
33. Una moneda equilibrada y marcada con cara y cruz, se lanza 4 veces consecutivas. Calcule la probabilidad de que:
- a) Las dos caras caigan el mismo número de veces.



34. Se escogen dos números  $x$  y  $y$  al azar dentro del intervalo unitario  $[0, 1]$ . ¿Cuál es la probabilidad de que la distancia

a) de  $x$  a  $y$  sea menor a  $\frac{1}{2}$ .

b) de  $x$  a  $y$  sea mayor a  $\frac{1}{4}$ .

35. Demostrar

$$P(A \Delta B) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B).$$

36. Un grupo de personas está compuesto de 60 % hombres y 40 % mujeres. De los hombres, el 30 % fuma y de las mujeres 20 % fuma. Si se elige una persona al azar, encuentre la probabilidad de que

a) sea hombre y fume.

b) sea mujer y no fume.

37. La Procuraduría del Consumidor selecciona  $n$  radios sonni y  $n$  radios hitachi para ver cuál marca es mejor, forma  $n$  parejas con un radio de cada marca y anota cuál falla primero. ¿Cuál es la probabilidad de que sonni falle primero en  $(n - 1)$  de las  $n$  parejas?

38. Demuestre que:

$$P(A^c \cap B^c) = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)$$

39. Demuestre que:

$$\sum_{r=0}^n \binom{n}{r} = 2^n$$

40. Se entrevistó a 38 alumnos sobre el refresco de su preferencia y se supo que 18 toman Coca-cola, 22 toman Kass, 22 toman Tehuacán; 14 toman Coca-cola y Kass, 15 toman Kass y Tehuacán, 9 toman Tehuacán y Coca-cola y además 8 toman los tres refrescos. Si se selecciona al azar a un alumno y se sabe que toma Coca-cola, ¿cuál es la probabilidad de que no tome Kass?

41. En una fábrica de pernos, las máquinas  $A$ ,  $B$  y  $C$  producen respectivamente el 25 %, 35 % y el 40 % de la producción total. En esta producción, el 5 %, 4 % y 2 % son pernos defectuosos. Se toma al azar un perno de la producción total y se le encuentra defectuoso. ¿Cuál es la probabilidad de que haya sido producido por  $B$ ?

42. Un jurado de 7 jueces debe decidir entre 2 finalistas quién es la ganadora de un concurso de belleza, para lo cual bastará una mayoría de los jueces. Suponga que 4 jueces votan por María y que los otros tres votan por Susana. Si se seleccionan al azar 3 jueces y se les pregunta por quién van a votar, ¿cuál es la probabilidad de que la mayoría de los jueces de la muestra estén a favor de Susana?

43. Sean  $A$  y  $B$  dos eventos, relativos a un espacio muestral  $S$ ,

a) En función de  $A$  y  $B$ , escriba simbólicamente  $C = \text{“Sólo uno de los eventos ocurre”}$ , dibuje el diagrama de Venn.



44. Una caja contiene esferas numeradas

$$1, 2, \dots, n.$$

Se escogen al azar dos esferas. Encontrar la probabilidad de que los números sobre las esferas sean enteros consecutivos, si:

- a) Las esferas se escogen sin sustitución.    b) Las esferas se escogen con sustitución.
45. Supóngase que tenemos 2 urnas, 1 y 2, cada una con dos cajones. La urna 1 tiene una moneda de oro en un cajón y una de plata en el otro, mientras que la urna 2 tiene una moneda de oro en cada cajón. Se escoge una urna al azar, y de ésta se escoge un cajón al azar. La moneda que se encontró es de oro. ¿Cuál es la probabilidad de que la moneda provenga de la urna 2?
46. Una caja contiene 20 chocolates, 60 chicles y 80 caramelos, se toman dos dulces uno después del otro y se prueba el segundo notando que es un chocolate, ¿cuál es la probabilidad de que el primero también sea chocolate?
47. En la ESCOM IPN, se observa que el 25 %, 35 % y 40 % de los alumnos cursaron Probabilidad y estadística en tres diferentes grupos (por ejemplo  $A$ ,  $B$  y  $C$ ). Se sabe que el 12, 9 y 5 % de los alumnos en cada uno de esos grupos, respectivamente, son aprobados. Se escoge un alumno al azar y se sabe que es aprobado, calcule las probabilidades de que el alumno seleccionado provenga de  $A$ ,  $B$  y  $C$  respectivamente.
48. En un teatro, la fila A tiene asientos numerados del 1 al 10. Si 5 niños y 5 niñas deben sentarse en la fila A. Determine el número de configuraciones en que esto es posible si:
- a) no existen restricciones.  
b) deben sentarse en dos grupos: uno de niños y otro de niñas.  
c) deben sentarse de manera alternada.
49. Si se saca al azar una canica de una caja que contiene 10 canicas rojas, 30 blancas, 20 azules y 15 anaranjadas. Encuentre la posibilidad de que la canica:
- a) sea anaranjada o roja.  
b) no sea azul o roja.  
c) no sea azul.  
d) sea blanca.  
e) sea roja, blanca o azul.
50. La urna I contiene 10 bolas blancas y 15 bolas negras; mientras que la urna II contiene 20 bolas blancas y 10 bolas negras. Se extrae una bola de la urna I y sin ver su color se deposita en la urna II. Posteriormente se extrae una bola de la urna II. ¿Cuál es la probabilidad de que la bola extraída de la urna II sea blanca?



51. La urna I tiene 2 bolas blancas y 3 negras; la urna II, 4 blancas y 1 negra; y la urna III, 3 blancas y 4 negras. Se selecciona una urna al azar y una bola extraída al azar resulta ser blanca. Encuentre la probabilidad de que haya seleccionado de la urna I.
52. ¿De cuántas maneras pueden ser seleccionados 2 hombres, 4 mujeres, 3 muchachos y 3 muchachas a partir de 6 hombres, 8 mujeres, 4 muchachos y 5 muchachas si:
- no se impone ninguna restricción.
  - un hombre y una mujer determinados deben ser seleccionados.
53. Se sacan 5 cartas de una baraja inglesa. Determine la probabilidad de que:
- todas las cartas sean de un mismo palo.
  - se saquen exactamente 2 ases.
  - que no se saquen ases.
  - se saque al menos un as.
54. La caja I contiene 3 bolas rojas y 5 blancas, mientras que la caja II contiene 4 bolas rojas y 2 blancas. Se extrae una bola al azar de la primera caja y se coloca en la segunda caja sin observar su color. Después se extrae una bola de la segunda caja. Encuentre la probabilidad de que sea blanca.
55. Una compañía posee tres máquinas que producen cierto tipo de perno. Las máquinas  $M_1$ ,  $M_2$  y  $M_3$  fabrican 50 %, 30 % y 20 % de la producción total, respectivamente. De lo que cada una produce, 7 %, 3 % y 2 %, respectivamente, son pernos defectuosos. Si se escoge un perno al azar y éste resulta defectuoso. ¿Cuál es la probabilidad de que el perno provenga de la máquina  $M_2$ ?
56. Un estudiante debe responder 7 de 10 preguntas en una prueba psicométrica. Hallar
- las opciones que tiene en total,
  - las opciones que tiene si debe responder al menos 3 de las primeras 5.
57. De un grupo de 8 mujeres y 6 hombres se forma un comité que consiste de 3 hombres y 3 mujeres. ¿Cuántos comités son posibles si
- 2 de las mujeres se rehúsan a estar en el mismo comité;
  - 1 hombre y 1 mujer se rehúsan a estar en el mismo comité?
58. Si 3 alumnos de la ESCOM, 6 de la ESFM, 5 de la UPIITA y 7 de ESIME son sentados en una fila, ¿cuántas formas de acomodarlos son posibles si es necesario que estén juntos por escuela?



59. Compare las probabilidades de las manos siguientes en una baraja americana (52 cartas):
- un color: 5 cartas del mismo palo;
  - una escalera (sucia): 5 cartas consecutivas no todas del mismo palo;
  - una tercia: p. ej., a, a, a, b, c, donde a, b y c son distintas.

60. Hugo, Paco y Luis juegan a lanzar un dado equilibrado por turnos. El primero en obtener un par es el ganador. ¿Es posible describir el espacio muestral de tal experimento de la siguiente manera? Explique.

$$\Omega = \{1, 01, 001, 0001, 00001, 000001, \dots\}$$

Si es posible, defina los eventos siguientes en términos de  $\Omega$ :

- Hugo nunca gana = A.
- Paco nunca gana = B.
- $(A \cup B)$ .

Asuma que Hugo es el primero en lanzar el dado, seguido de Paco y después Luis, luego otra vez Hugo, etc.

61. Sobre los cumpleaños:
- Si  $n$  personas se encuentran en un salón de clases, ¿cuál es la probabilidad de que no existan dos personas que cumplan años el mismo día? ¿Qué tan grande debe ser  $n$  para que esta probabilidad sea menor a  $1/2$ ?
  - Si hay 12 extraños en una habitación, ¿cuál es la probabilidad de que no existan dos personas que cumplan años el mismo mes?
62. Suponga que se tienen tres cofres, cada uno con dos cajones. El primer cofre tiene una moneda de oro en cada cajón. El segundo cofre tiene una moneda de oro en un cajón y una moneda de plata en el otro cajón, y el tercer cofre tiene una moneda de plata en cada cajón. Se elige un cofre al azar y se abre un cajón. Si el cajón contiene una moneda de oro, ¿cuál es la probabilidad de que el otro cajón también contenga una moneda de oro?
63. Suponga que 5% de todos los hombres y 0.25% de todas las mujeres son daltónicos. Una persona elegida al azar es daltónica. ¿Cuál es la probabilidad de que esta persona sea hombre? Asuma que la población total tiene el doble de mujeres que de hombres.
64. Sea  $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$  y asuma que cada punto tiene probabilidad de  $1/4$ . Tome  $A = \{1, 2\}$ ,  $B = \{1, 3\}$  y  $C = \{1, 4\}$ . Muestre que los pares de eventos A y B, A y C, y B y C son independientes.
65. ¿Qué es más probable: obtener un seis en una serie de 4 lanzamientos con un dado u obtener un doble seis en una serie de 24 lanzamientos con 2 dados? Argumente.



66. Una empresa de producción emplea 20 trabajadores en el turno de día, 15 en el turno de tarde y 10 en el turno de medianoche. Un consultor de control de calidad va a seleccionar 6 de estos trabajadores para entrevistas a fondo. Suponga que la selección se hace de tal modo que cualquier grupo particular de 6 trabajadores tiene la misma oportunidad de ser seleccionado al igual que cualquier otro grupo (sacando 6 papelitos de entre 45 sin reemplazarlos).
- ¿Cuál es la probabilidad de que los 6 trabajadores seleccionados sean del turno de noche?
  - ¿Cuál es la probabilidad de que por lo menos dos turnos diferentes estén representados entre los trabajadores seleccionados?
67. La tabla adjunta proporciona información sobre el tipo de café seleccionado por alguien que compra una taza en un kiosco del aeropuerto en particular. Considere la posibilidad de seleccionar al azar un comprador de café.

	Regular	Descafeinado
Pequeño	14 %	20 %
Mediano	20 %	10 %
Grande	26 %	10 %

- ¿Cuál es la probabilidad de que la persona adquiera una taza pequeña?
- Si nos enteramos de que la persona seleccionada compra una taza pequeña, ¿cuál es ahora la probabilidad de que él/ella escoja el café descafeinado y cómo interpreta esta probabilidad?
- Si nos enteramos de que el individuo seleccionado compró un café descafeinado, ¿cuál es ahora la probabilidad de que un tamaño pequeño fue el escogido, y cómo se compara esto con la probabilidad incondicional correspondiente de a)?



68. Para los clientes que compran un refrigerador en una tienda de aparatos domésticos, sea  $A$  el evento en que el refrigerador fue fabricado en EU,  $B$  el evento en que el refrigerador contaba con una máquina de hacer hielos y  $C$  el evento en que el cliente adquirió una garantía ampliada. Las probabilidades pertinentes son:

$$P(A) = 0,7, \quad P(B|A) = 0,9, \quad P(B|A') = 0,8$$

$$P(C|A \cap B) = 0,8, \quad P(C|A \cap B') = 0,6$$

$$P(C|A' \cap B) = 0,7, \quad P(C|A' \cap B') = 0,3$$

- a) Construya un diagrama de árbol compuesto de ramas de primera, segunda y tercera generaciones y anote el evento y la probabilidad apropiada junto a cada rama.
- b) Dibuje el diagrama de Venn.
- c) Calcule  $P(A \cap B \cap C)$ .
- d) Calcule  $P(A|B \cap C)$ , la probabilidad de la compra de un refrigerador fabricado en EU dado que también se adquirieron una máquina de hacer hielos y una garantía ampliada.
69. Para generar un número telefónico de 10 dígitos, se tienen 10 opciones de números (0-9) para cada dígito. Se sabe que los primeros dos dígitos son correspondientes a la localidad dentro del país. ¿Cuántas posibilidades de números telefónicos puede haber?
70. Imagine que tiene 3 pacientes: probabilidad baja, moderada y alta de infección por COVID19 antes de la prueba. Los individuos asintomáticos en un entorno de prevalencia presuntamente baja constituirían una probabilidad baja de infección por COVID19 antes de la prueba a lo más del 20 %, mientras que a un individuo con tos y fiebre en una ciudad/jurisdicción con casos conocidos de COVID19 se le puede asignar una probabilidad moderada de enfermedad antes de la prueba (60 %). Una probabilidad alta de COVID19 antes de la prueba 90 % puede incluir un paciente con fiebre, tos, dificultad para respirar, con un contacto cercano conocido con COVID19 confirmado. Para cada uno de estos individuos, un resultado negativo de la prueba rRT-PCR tendrá diferentes implicaciones, a saber, un paciente bajo después de la prueba presenta un 4 %, mientras que uno de moderada presenta 37 % y uno de alta 87 %.
- a) Diagrama del árbol.
- b) Sabiendo que tienen el resultado de rRT-PCR, ¿Cuál es la probabilidad de que realmente sea un paciente de enfermedad moderada?
- c) Considera que los datos justifican las características del paciente moderado.
71. ¿De cuantas formas pueden ordenarse 7 libros en un estante si:
- a) es posible cualquier ordenación,
- b) 3 libros determinados deben estar juntos,
- c) 2 libros determinados deben ocupar los extremos.



72. Una clase consta de 9 niños y 3 niñas.
- ¿de cuántas maneras puede un profesor escoger un comité de 4?
  - ¿Cuántos comités contarán con una niña por lo menos?
  - ¿cuántos tendrán una niña exactamente?
73. ¿Cuántas palabras diferentes se pueden formar con las letras de la palabra MISSISSIPPI?
74. Una caja contiene 8 bolas rojas, 3 blancas y 9 azules. Si se extraen 3 bolas aleatoriamente sin reemplazo, determinar la probabilidad de que:
- las tres sean bolas rojas,
  - las tres bolas sean blancas,
  - dos sean rojas y una blanca,
  - al menos una sea blanca,
  - se extraiga una de cada color,
  - las bolas sean extraídas en el orden rojo, blanco, azul.
75. La tienda de departamentos Friendly ha sido objeto de muchos robos durante el último mes; pero, debido al aumento en las medidas de seguridad, se ha detenido a 250 ladrones. Se registró el sexo de cada ladrón; también se anotó si se trataba de un primer delito o era reincidente. Los datos se resumen en la siguiente tabla.

Sexo	Primera ofensa	Reincidente
Hombre	60	70
Mujer	44	76
	<b>104</b>	<b>146</b>

Calcule las siguientes probabilidades:

- La probabilidad de que sea mujer o primera ofensa.
  - La probabilidad de que sea la primera ofensa, dado que es hombre.
  - La probabilidad de que sea hombre y reincidente.
  - La probabilidad de que sea mujer, dado que es la primera ofensa.
  - La probabilidad de que sea primera ofensa o reincidente.
  - La probabilidad de que el ladrón sea hombre.
  - Los eventos primera ofensa y mujer ¿son independientes?. Explique.
  - Con la información de la tabla mencione dos eventos que sean mutuamente excluyentes. Explique.
76. De 6 números positivos y 8 números negativos se eligen 4 números al azar sin sustitución y se multiplican. Si el producto es positivo ¿Cuál es la probabilidad de que los números seleccionados tengan el mismo signo?



77. Resuelve usando el Teorema de Bayes. Se sabe por experiencias pasadas que el 85 % de los alumnos que toman el taller de preparación para el ETS aprueban el examen mientras que sólo el 15% de los que no lo toman aprueban el examen. Si sólo el 35 % de los alumnos que deben la materia toman el taller ¿Cuál es la probabilidad de que un alumno que aprobó el ETS haya tomado el taller?
- Para la probabilidad pedida encuentra la probabilidad total del evento adecuado.
  - Utiliza la Ley de la Multiplicación para encontrar la probabilidad que necesitas para poder usar Bayes.
  - Escribe la formula y la sustitución del Teorema de Bayes para llegar al resultado.

78. La contaminación de los rios de Estados Unidos ha sido un problema por muchos años. Considere los siguientes eventos:
- A: El rio está contaminado.
  - B: Al probar una muestra de agua se detecta contaminación.
  - C: Se permite pescar.

Suponga que la probabilidad de que el rio esté contaminado es de 0.3 y que la probabilidad de detectar contaminación en una muestra dado que el rio está contaminado es de 0.75, y la probabilidad de detectar contaminación dado que el rio no esta contaminado es de 0.2. Además se conocen las siguientes probabilidades:

$$P(C|A \cap B) = 0,20$$

$$P(C|A' \cap B) = 0,15$$

$$P(C|A \cap B') = 0,8$$

$$P(C|A' \cap B') = 0,9$$

- Interprete las cuatro probabilidades anteriores.
  - Calcule  $P(A \cap B \cap C)$ .
  - Calcule  $P(B' \cap C)$ .
  - Calcule  $P(C)$ .
  - Calcule la probabilidad de que el rio esté contaminado, dado que está permitido pescar y que la muestra probada no detectó contaminación.
79. Tres máquinas de cierta planta de ensamble,  $B_1$ ,  $B_2$  y  $B_3$  montan 30 %, 45 % y 25 % de los productos, respectivamente. Se sabe por experiencia que 2 %, 3 % y 2 % de los productos ensamblados por cada máquina, respectivamente, tienen defectos. Ahora bien, suponga que se selecciona de forma aleatoria un producto terminado. Elabore un diagrama de árbol para calcular la probabilidad de que esté defectuoso.



80. Quince teléfonos acaban de llegar a un centro de servicio autorizado. Cinco de éstos son celulares, cinco inalámbricos y los otros cinco alámbricos. Suponga que a estos componentes se le asignan al azar los números 1, 2,..., 15 para establecer el orden en que serán reparados.

- ¿Cuál es la probabilidad de que los teléfonos inalámbricos estén entre los primeros diez que van a ser reparados?
- ¿Cuál es la probabilidad de que después de reparar diez de estos teléfonos, sólo dos de los tres tipos de teléfonos queden para ser reparados?
- ¿Cuál es la probabilidad que dos teléfonos de cada tipo estén entre los primeros seis reparados?

81. Para los clientes que compran un refrigerador en una tienda de aparatos domésticos, sea A el evento en que el refrigerador fue fabricado en EU, B el evento en que el refrigerador contaba con una máquina de hacer hielos y C el evento en que el cliente adquirió una garantía ampliada. Las probabilidades pertinentes son:

$$P(A) = 0,75, \quad P(B|A) = 0,9, \quad P(B|A') = 0,8$$

$$P(C|A \cap B) = 0,8, \quad P(C|A \cap B') = 0,6$$

$$P(C|A' \cap B) = 0,7, \quad P(C|A' \cap B') = 0,3$$

- Calcule  $P(A \cap B \cap C)$ .
- Calcule  $P(C)$ .
- Calcule  $P(A|B \cap C)$ , la probabilidad de la compra de un refrigerador fabricado en EU dado que también se adquirieron una máquina de hacer hielos y una garantía ampliada.

82. Componentes de cierto tipo son enviados a un distribuidor en lotes de diez. Suponga que 50% de dichos lotes no contienen componentes defectuosos, 30% contienen un componente defectuoso y 20% contienen dos componentes defectuosos. Se seleccionan al azar dos componentes de un lote y se prueban. ¿Cuáles son las probabilidades asociadas con 0, 1 y 2 componentes defectuosos que están en el lote en cada una de las siguientes condiciones?

- Ningún componente probado está defectuoso.
- Uno de los dos componentes probados está defectuoso.



## Unidad 2

1. En un problema de una prueba aplicada a jóvenes de ESCOM, se les pide que hagan corresponder cada uno de los tres teoremas de PyE con el nombre de su autor. Si los jóvenes no estudiaron y la v.a es el número de correspondencias correctas encuentra:
  - a) La f.d.p de la v.a
  - b) La  $F_X(x)$
  - c) La f.g.m
  - d) La media usando la definición.
  - e) La media usando f.g.m
  - f) La varianza usando la definición.
  - g) La varianza usando la f.g.m

2. El período de tiempo, en minutos, que un aeroplano espera vía libre para aterrizar en un cierto aeropuerto es una variable aleatoria definida por  $Y = 3X - 2$ , donde

$$f_X(x) = \frac{1}{4}e^{-x/4}$$

si  $x > 0$  y 0 en otro caso

Encuentra la media y la varianza de la variable aleatoria  $Y$

3. Un tazón contiene 5 fichas que no pueden distinguirse unas de otras. Tres de las fichas están marcadas con \$5 y las dos restantes con \$10. Un jugador saca del tazón dos fichas al azar sin reemplazo, y se le paga con una cantidad igual a la suma de los valores indicados en las dos fichas. ¿Cuánto debe pagarse por jugar si el juego debe ser justo?
4. La función de densidad de las mediciones codificadas del diámetro del hilo de un encaje es,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4}{\pi(1+x^2)}, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Encuentre el valor esperado de  $X$ .



5. Suponga que el período  $X$  en minutos de un tipo particular de conversación telefónica es una variable aleatoria con función de densidad de probabilidad,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5}e^{-x/5}, & x > 0 \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

- Determine el promedio de este tipo de conversación,
  - encuentre la varianza y la desviación estándar de  $X$ ,
  - encuentre  $E((X + 5)^2)$
6. Una variable aleatoria  $X$  tiene distribución exponencial con parámetro  $\alpha > 0$ .
- Determine la función generadora de momentos.
  - Determine la media usando la función generadora de momentos.
7. Supóngase que  $X$  es una variable aleatoria para la cual  $E(X) = \mu$  y  $var(X) = \sigma^2$ . Suponiendo que  $Y$  está distribuida uniformemente en el intervalo  $(a, b)$ , determine  $a$  y  $b$  de manera que  $E(X) = E(Y)$  y  $var(X) = var(Y)$ .
8. La función generadora de momentos de una variable aleatoria  $X$  está determinada por

$$M_X(t) = \frac{1}{1-t^2}, \quad -1 < t < 1.$$

- Determine la media y la varianza de la variable aleatoria  $X$ .
  - Encuentre la media y varianza de la variable aleatoria  $Y = 3X + 2$ .
9. La v.a discreta  $X$  ( $x = 0, 1, \dots$ ) tiene probabilidades de ocurrencia de

$$kr^x \quad (0 < r < 1).$$

Encuentra el valor apropiado de  $k$ .

10. Supóngase que la v.a  $X$  tiene valores posibles

$$1, 2, 3, \dots$$

y

$$P(X = j) = \frac{1}{2^j}, \quad j = 1, 2, \dots$$

Calcula la probabilidad de que  $X$  sea par.



11. Supón que una urna contiene cinco bolas rojas y diez azules. Si se seleccionan al azar sin reemplazo siete bolas.

- a) ¿Cuál es la probabilidad de obtener al menos tres bolas rojas?  
b) Si  $\bar{X}$  representa la proporción de bolas rojas en la muestra, ¿Cuáles son la media y la varianza de  $\bar{X}$ ?

12. Un dado sin cargar se lanza tres veces. Sean  $Y_1, Y_2,$  y  $Y_3,$  el número de puntos vistos en la cara superior para los tiros 1, 2 y 3, respectivamente. Suponga que estamos interesados en

$$\bar{Y} = \frac{Y_1 + Y_2 + Y_3}{3},$$

el número promedio de los puntos vistos en una muestra de tamaño 3, ¿Cuáles son  $\mu_Y$  y la desviación estándar  $\sigma_Y,$  de  $\bar{Y}$ ? ¿Cómo podemos determinar la distribución muestral de  $\bar{Y}$ ?

13. Construya la Función Generadora de Momentos de la expresión.

a)

$$p(y) = \binom{n}{y} p^y (1-p)^{n-y}$$

c)

$$p(y) = \frac{\lambda^y e^{-\lambda}}{y!}$$

b)

$$p(y) = p(1-p)^{y-1}$$

14. En la siguiente tabla se identifica la probabilidad de que el sistema de computación se caiga el número señalado por períodos por semana, durante la fase inicial de instalación del sistema. Calcule el número esperado de veces por semana que la computadora no está trabajando y la varianza de esta distribución.

Número de períodos	4	5	6	7	8	9
Probabilidad	0.01	0.08	0.29	0.42	0.15	0.06

15. a) Suponga que la variable aleatoria discreta  $X$  toma los valores 1, 2, y 3 con igual probabilidad. Encuentre la distribución de probabilidades de

donde  $X$  es una v.a. continua con alguna distribución definida en  $(0, 1)$ . Si

$$Y = 1 - X,$$

$$Y = 2X + 3.$$

determine  $k,$  de modo que

b) Suponga que

$$P(X < 0,29) = 0,75,$$

$$P(Y \leq k) = 0,25.$$



16. Sea  $X$  una variable aleatoria geométrica i.e. tiene una fdp

$$f(x) = q^{x-1}p, \quad x = 1, 2, \dots \quad p + q = 1$$

calcule la fgm y con ella la

$$E(X)$$

y la

$$V(x).$$

17. Una urna contiene 5 canicas blancas y 3 negras. Si se extraen 2 canicas al azar sin reposición y  $X$  denota el número de canicas blancas, encuentre la distribución de probabilidad de  $X$ .

18. Sea  $X$  una variable aleatoria definida mediante la función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & x \notin [0, 1] \end{cases}$$

Encuentre a)  $E(X)$ , b)  $E(3X - 2)$ , c)  $E(X^2)$

19. Si  $X$  denota el número de caras en un solo lanzamiento de cuatro monedas legales, determine:

a)  $P(x = 3)$ , b)  $P(x < 2)$ , c)  $P(x \leq 2)$ , d)  $P(1 < X \leq 3)$

20. Sea  $X$  una variable aleatoria con función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} cx & 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & x \notin [0, 2] \end{cases}$$

Encuentre a) el valor de la constante  $c$ , b)  $P\left(\frac{1}{2} < X < \frac{3}{2}\right)$  c)  $P(X > 1)$ , d) la función de distribución

21. La función de densidad de una variable aleatoria  $X$  es:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & 0 \leq x \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Encuentre a)  $E(X)$ , b)  $E(X^2)$ , c)  $E[(X - 1)^2]$ .



22. Explique cada uno de los conceptos siguientes:

- Variable aleatoria discreta;
- Función de densidad de una variable aleatoria discreta;
- Función de distribución de una variable aleatoria;
- Proporcione un ejemplo de un experimento e identifique explícitamente cada uno de los conceptos anteriores junto con gráficos correspondientes.

23. Se distribuyen cinco números de manera aleatoria entre jugadores numerados del 1 al 5. Se comparan los números entre dos jugadores y aquél que posee el más grande resulta ganador. Inicialmente, los jugadores 1 y 2 comparan sus números, el ganador compara su número con el jugador 3, y así sucesivamente. Sea  $X$  la v.a. que denota el número de veces que gana el jugador 1. Calcule  $P(X = k)$ ,  $k = 0, 1, 2, 3, 4$ .

24. Si la función de distribución de una v.a.  $X$  está dada por

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \frac{1}{2}, & 0 \leq x < 1; \\ \frac{3}{5}, & 1 \leq x < 2; \\ \frac{4}{5}, & 2 \leq x < 3; \\ \frac{9}{10}, & 3 \leq x < 3,5; \\ 1, & x \geq 3,5; \end{cases}$$

calcule la función de densidad de  $X$ . Haga un esbozo de ambas gráficas.

25. Un vendedor ha programado una cita para vender enciclopedias. Su primera cita conducirá a una venta con una probabilidad de 0.3, y la segunda conducirá de manera independiente a una venta con una probabilidad de 0.6. Cualquier venta realizada tiene la misma probabilidad de ser del modelo de lujo, que cuesta \$1000, o del modelo estándar, que cuesta \$500. Determine la función de densidad de la v.a.  $X$  que mide el valor total en pesos de todas las ventas.

26. Cualquier punto en el intervalo  $[0, 1)$  puede ser representado por su expansión decimal  $0,7172\dots$ . Suponga que se elige un punto de manera aleatoria en  $[0, 1)$ . Sea  $X$  la v.a. que denota el primer dígito de la expansión decimal que representa el punto. Hallar la función de densidad de  $X$ .

27. Si la v.a.  $X$  tiene una función de distribución  $F_X$ , ¿cuál es la función de distribución de la v.a.  $\alpha X + \beta$ , donde  $\alpha$  y  $\beta$  son constantes, con  $\alpha \neq 0$ ?

28. El tiempo de vida en horas de un tubo electrónico es una v.a. cuya función de densidad está dada por

$$f(x) = xe^{-x}, \quad x \geq 0$$

Calcule el tiempo de vida esperado de tal tubo.



29. La velocidad de una molécula en un gas ideal en equilibrio es una v.a. cuya función de densidad está dada por

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 e^{-bx^2}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

donde  $b = \frac{m}{2kT}$ , y  $k$ ,  $T$  y  $m$  denotan, respectivamente, la constante de Boltzman, la temperatura absoluta, y la masa de la molécula. Evalúe  $a$  en términos de  $b$ .

30. Sea  $X$  una v.a. cuya función de distribución  $F_X$  está dada por

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{x}{2}, & 0 \leq x < 1, \\ \frac{1}{2}, & 1 \leq x < 2, \\ 1, & x \geq 2. \end{cases}$$

Encuentre:

- a)  $P\left(\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{3}{2}\right)$ ;
  - b)  $P\left(\frac{1}{2} \leq X \leq 1\right)$ ;
  - c)  $P\left(\frac{1}{2} \leq X < 1\right)$ ;
  - d)  $P\left(1 \leq X \leq \frac{3}{2}\right)$ ;
  - e)  $P(1 < X < 2)$ .
31. Una v.a. de Cauchy estándar tiene la función de densidad

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \quad -\infty < x < \infty.$$

Si  $X$  es una v.a. de Cauchy estándar, muestre que  $1/X$  es también una v.a. de Cauchy estándar.

32. En un estudio sobre movilidad de los ejecutivos en el área de compras, se encontró que la distribución que se describe a continuación describe con suficiente aproximación a la distribución de probabilidad de  $x$ , el número de compañías en las que un ejecutivo actualmente empleado ha prestado sus servicios como jefe de compras.

$X$	1	2	3	4	5
$f(x)$	0.52	0.22	0.19	0.04	0.03

- a) Determine si es una función de probabilidad.
- b) Encuentre la media.
- c) Calcule la desviación estándar de  $x$ .



33. La variable aleatoria  $X$  representa el intervalo de tiempo entre dos llegadas consecutivas a una tienda y su función de densidad de probabilidad está dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}, & x > 0 \\ 0, & \text{para cualquier otro valor} \end{cases}$$

Determine  $P(2 < X < 6)$ .

34. En un problema de una prueba aplicada a niños pequeños, se les pide que hagan corresponder cada uno de los tres dibujos de animales con la palabra que identifica a ese animal. Si un niño asigna aleatoriamente las tres palabras a los tres dibujos encuentra:
- la f.d.p para  $X$ : el número de correspondencias correctas.
  - la distribución acumulada.
  - Grafica ambas funciones.
  - Encuentra la f.g.m
  - Encuentra la media y la varianza usando la f.g.m
35. Según Y. Zimmels, los tamaños de partículas que se utilizan en experimentos de sedimentación tienen a menudo una distribución uniforme. En sedimentaciones con mezclas de partículas de diferente tamaño, las partículas mayores obstruyen los movimientos de las más pequeñas. Así que es importante estudiar la media y la varianza de los tamaños de partículas. Supón que partículas esféricas tienen diámetros con una distribución uniforme entre 0.01 y 0.05 cm. Determina la media y la varianza de los volúmenes de estas partículas. Recuerda que el volumen de una esfera está dado por  $\frac{4}{3}\pi r^3$ .
36. La demanda semanal de gas propano (en miles de galones) de una instalación particular es una variable aleatoria  $X$  con función de densidad de probabilidad

$$f(x) = \begin{cases} 2(1 - (1/x^2)) & 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{de lo contrario} \end{cases}$$

- Calcule la función de distribución acumulativa de  $X$ .
- Calcule  $E(X)$  y  $V(X)$ .
- Calcule  $P(x \leq 2,5)$ ,  $P(x > 1,5)$ ,  $P(1,3 \leq x \leq 1,8)$ ,  $P(x = 1,5)$ .



37. Un pequeño mercado ordena ejemplares de cierta revista para su exhibidor de revistas cada semana. Sea  $X$  demanda de la revista, con función masa de probabilidad

$X$	1	2	3	4	5
$p(x)$	1/15	2/15	3/15	4/15	5/15

Suponga que el propietario de la tienda paga \$1.00 por cada ejemplar de la revista y el precio para los consumidores es de \$2.00. Si las revistas que se quedan al final de la semana no tienen valor de recuperación, ¿es mejor ordenar tres o cuatro ejemplares de la revista? Tanto para tres o cuatro ejemplares ordenados, exprese un ingreso neto como una función de la demanda  $X$  y luego calcule el ingreso esperado.

38. Tres pelotas son lanzadas al azar en cinco cajas numeradas del 1 al 5. Cada pelota tiene la misma probabilidad de caer en cualquiera de las cajas, y pueden caer varias pelotas en la misma caja. Sea  $X$  la cantidad de cajas que quedan vacías después de lanzar las tres pelotas. Preguntas:
- ¿Cuáles son los valores posibles de  $X$ ?
  - Determina la distribución de probabilidad de  $X$ .
  - Encuentra la función generadora de momentos de  $X$ .
  - Determinar el valor esperado, desviación estándar a partir de la función generadora de momentos.



## Unidad 3

1. Se sabe que el proceso de producción de luces de un tablero de automóvil de indicador giratorio produce a % de luces defectuosas. Si se selecciona al azar una muestra de  $n$  luces y  $\hat{p}$  es la fracción de luces defectuosas de la muestra.
  - a) ¿Quién es la v.a?
  - b) ¿Cómo se distribuye la v.a?
  - c) Escribe a  $\hat{p}$  en función de la v.a
  - d) Encuentre  $P(\hat{p} \leq r)$ .
  - e) ¿Se debe poner alguna restricción para  $r$ ? ¿Cuál?
2. El chef de un restaurante prepara una ensalada revuelta que contiene, en promedio,  $s$  vegetales. Encuentra la probabilidad de que la ensalada contenga a lo más de  $s + 1$  vegetales:
  - a) en un día dado
  - b) en  $k$  de los siguientes  $n$  días
  - c) por primera vez en este mes el día 12 de diciembre.
  - d) ¿Se debe poner alguna restricción para  $k$  y para  $n$ ? ¿Cuál?
3. Un examen de biología consta de 10 preguntas de opción múltiple con cuatro posibles respuestas a cada pregunta, donde sólo una de ellas es cierta. Paco no estudió para el examen y ha decidido hacerlo al azar. El examen se considera acreditado con un 70 % de preguntas correctas. ¿Cuál es la probabilidad de que Paco acredite el examen?
4. En un proceso industrial el diámetro de un balero es una cantidad importante. El comprador establece en sus especificaciones que el diámetro debe ser de  $3,0 \pm 0,01$  cm. La consecuencia es que no se acepta ningún balero que se salga de ésta especificación. Se sabe que en el proceso, el diámetro del balero tiene una distribución normal con media de 3,0 y varianza de  $2,5 \times 10^{-5}$ . En promedio, ¿Cuántos baleros fabricados se descartarán?
5. Supón que el tiempo empleado por un estudiante seleccionado al azar que utiliza una terminal conectada a un centro local de cómputo de tiempo compartido, tiene una distribución gamma con media de 20 minutos y varianza de 80 minutos<sup>2</sup>.
  - a) ¿Cuáles son los valores de  $\alpha$  y  $\beta$ ?
  - b) ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante utilice la terminal por lo menos 24 minutos?



6. Un tipo particular de tanque de gasolina para un automóvil compacto está diseñado para contener 15 galones. Supón que la capacidad real  $X$  de un tanque escogido al azar de este tipo esté normalmente distribuido con media de 15 galones y desviación estándar de 0,2 galones.
- ¿Cuál es la probabilidad de que un tanque seleccionado al azar contenga entre 14,7 y 15,1 galones?
  - Si el automóvil en el que se instala un tanque seleccionado al azar recorre exactamente 25 millas por galón, ¿Cuál es la probabilidad de que el automóvil pueda recorrer 370 millas sin reabastecerse?

7. El número promedio de ratas de campo por acre en un campo de trigo es de 12. Encuentre la probabilidad de que menos de 6 ratas de campo se encuentren:
- en un acre de terreno determinado,
  - en al menos uno de los siguientes cuatro acres inspeccionados,
  - por primera vez al inspeccionar el acre número cuatro.

8. El tiempo de espera, en horas, que tarda un radar en detectar dos conductores sucesivos a alta velocidad es una variable aleatoria continua con función de distribución acumulada,

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-8x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

Encuentre la probabilidad de esperar menos de 12 minutos entre dos conductores sucesivos:

- utilizando la distribución acumulada de  $X$ ,
  - utilizando la función de densidad de  $X$ .
9. Un productor de películas produce 10 rollos de una película especialmente sensible cada año. Si la película no se vende dentro del año, debe descartarse. Experiencias pasadas indican que  $D$ , la demanda (pequeña) para la películas es una variable aleatoria con distribución de Poisson cuyo parámetro es 8. Si se obtiene una utilidad de \$7 en cada rollo vendido, mientras que ocurre una pérdida de \$3 por cada rollo que debe ser descartado, calcular la utilidad esperada que el fabricante puede obtener con los 10 rollos que produce.
10. Supóngase que  $X$ , la resistencia a la ruptura de una cuerda (en libras), tiene distribución  $N(100, 16)$ . Cada 100 pies de alambre para cuerda produce una utilidad de \$25, si  $X > 95$ . Si  $X \leq 95$ , la cuerda puede utilizarse con un objetivo diferente y se obtiene una utilidad de \$10 por alambre. Encuentre la utilidad esperada por alambre.



11. Supóngase que las llamadas telefónicas que entran a un conmutador en particular, siguen el proceso de Poisson con un promedio de 6 llamadas por minuto. ¿Cuál es la probabilidad de que pase hasta un minuto antes de que entren 4 llamadas?
12. Se observa una fuente radiactiva durante 7 intervalos de 10 segundos de duración cada uno y se cuenta el número de partículas emitidas durante cada período. Suponiendo que el número de partículas emitidas, digamos  $X$ , durante cada período observado tiene una distribución de Poisson con parámetro 5,0. (Es decir, las partículas son emitidas a razón de 0,5 partículas por segundo)
- ¿Cuál es la probabilidad de que en cualquier intervalo sean emitidas 4 o más partículas?
  - ¿Cuál es la probabilidad de que en al menos uno de los 7 intervalos de tiempo, sean emitidas 4 o más partículas?
  - ¿Cuál es la probabilidad de que sean emitidas cuatro o más partículas, por primera vez en el séptimo intervalo de tiempo observado?
13. Un combustible para cohetes va a contener cierto porcentaje de impureza (digámosle  $X$ ) de un compuesto particular. Las especificaciones exigen que  $X$  esté entre 36 y 44 por ciento. El fabricante tendrá una utilidad neta en el combustible (por galón) que está expresada por la siguiente función de  $X$ :

$$T(X) = \begin{cases} +\$0,20 & \text{por galón si,} & 36 < X < 44 \\ +\$0,1 & \text{por galón si,} & 30 \leq X \leq 36 \text{ o } 44 < X \leq 50 \\ -\$0,2 & \text{por galón,} & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

Si  $X$  tiene distribución  $N(40, 4^2)$ , calcule  $E(T)$ .

14. El dueño de una tienda tiene existencias de cierto artículo y decide utilizar la siguiente promoción para disminuir la existencia. El artículo tiene un precio de \$100. El dueño reducirá el precio a la mitad por cada cliente que compre el artículo durante un día en particular. Así el primer cliente pagará \$50 por el artículo, el segundo pagará \$25, y así sucesivamente. Supón que el número de clientes que compra el artículo durante el día tiene una distribución de Poisson con media 2. Encuentra el costo esperado del artículo al final de día.
15. Se supone que en la producción diaria de cierto tipo de cordón, el número de defectos por metro  $X$ , tiene una distribución de Poisson con media  $\lambda = 2$ . La ganancia por metro, al vender el cordón, está dada por

$$G(X) = 50 - 2X - X^2$$

Calcular el valor esperado de utilidades por metro.



16. El número promedio de ratas de campo por acre en un campo de cinco acres de trigo se estima en 12. Encuentre la probabilidad de que se encuentren menos de seis ratas de campo.
  - a) En un acre dado
  - b) En dos de los siguientes tres acres que se inspeccionan
  - c) Por primera vez al inspeccionar el acre número 4
17. Un examen de opción múltiple tiene 200 preguntas, cada una con 4 respuestas posibles, de las que solo una es correcta. ¿Cuál es la probabilidad de que solamente adivinando se obtengan de 25 a 30 respuestas correctas para 80 de los 200 problemas sobre los que el estudiante no tiene conocimientos?
18. Una encuesta sobre alimentación y salud revela que el consumo de peras de una mujer elegida al azar se distribuye de forma normal con media 9,95 kg y una varianza de 2,56, mientras que el consumo de peras de un hombre elegido al azar se distribuye de forma normal con media 11,2 kg y desviación estándar de 1,7 kg. Si se eligen aleatoriamente un hombre y una mujer, ¿cuál es la probabilidad de que el consumo de peras de la mujer sea mayor que el del hombre?
19. Un fabricante de un monitor de televisión comercial garantiza el cinescopio o tubo de imagen por un año (8679 hrs.). Los monitores se utilizan en terminales de aeropuerto para programas de vuelo, y están encendidos en uso continuo. La vida media de los tubos es de 20,000 hrs., y siguen una densidad de tiempo exponencial. El costo de fabricación, venta y entrega para el fabricante es de \$300 y el monitor se vende en el mercado a \$400. Cuesta \$125 reemplazar el tubo fallado, incluyendo materiales y mano de obra. El fabricante no tiene obligación de sustituir el tubo si ya ha habido una primera sustitución. ¿Cuál es la utilidad esperada del fabricante?
20. Si la probabilidad de que cierto examen dé una reacción “positiva” es igual a 0,3, ¿Cuál es la probabilidad de que ocurran a lo más 5 reacciones “negativas” antes de la primera positiva?
21. Supón que un libro con  $m$  páginas contiene, en promedio  $\lambda$  erratas por página. ¿Cuál es la probabilidad de que no haya más de  $k$  páginas que contengan menos de  $r$  erratas? ¿Hay alguna restricción para  $k$  y  $r$ ? ¿Cuál?
22. Se sabe que el proceso de producción de luces de un tablero automóvil de indicador giratorio produce uno por ciento de luces defectuosas. Si este valor permanece invariable, y se selecciona al azar una muestra de 100 luces, encuentre

$$P(\hat{p} \leq 0,03),$$

donde  $\hat{p}$  es la fracción de defectos de la muestra.



23. Supón que un libro con  $m$  páginas contiene, en promedio  $\lambda$  erratas por página. ¿Cuál es la probabilidad de que haya más de  $k$  páginas que contengan más de  $r$  erratas? ¿Hay alguna restricción para  $k$  y  $r$ ? ¿Cuál?
24. Un transistor tiene una distribución de tiempo de falla exponencial con tiempo medio de falla de 20,000 hrs. El transistor ha durado 20,000 hrs. En una aplicación particular. ¿Cuál es la probabilidad de que el transistor falle a las 30,000 hrs?
25. La distribución de peso de paquetes enviados de cierto modo es normal con valor medio de 10 libras y desviación estándar de 2 libras. El servicio de paquetería desea establecer un valor de peso  $c$ , más allá del cual habrá cargo extra. ¿Cuál es el valor de  $c$  tal que 99 % de todos los paquetes pesen por lo menos 1 libra abajo del peso con cargo extra?
26. Supóngase que la probabilidad de tener una unidad defectuosa en una línea de ensamble es de 0,05. ¿Cuál es la probabilidad de que el 4 artículo que se inspecciona sea el primer defectuoso que se encuentra? Encuentre la media y la desviación estándar de  $x$ .
27. Un determinado producto industrial se embarca en lotes de 20 unidades. Con el propósito de minimizar el número de artículos defectuosos enviados a los clientes, se instituye un programa de inspección que consiste en tomar una muestra de 5 unidades de cada lote y rechazar el lote si se observa más de un artículo defectuoso (si el lote es rechazado, se prueba cada uno de sus elementos). Si un lote contiene 4 artículos defectuosos, ¿Cuál es la probabilidad de que sea aceptado?
28. El número de accidentes graves en una planta industrial es de diez por año, de manera tal que el gerente instituye un plan que considera efectivo para reducir el número de accidentes en la planta. Un año después de ponerlo en marcha, solo han ocurrido cuatro accidentes. ¿Qué probabilidad hay de cuatro o menos accidentes por año, si la frecuencia promedio aún es de diez?
29. De acuerdo con un reporte del Consejo de Seguridad Nacional, hasta 78 % de colisiones automovilísticas son resultado de distracciones como enviar mensajes de texto, llamar por teléfono o rebuscar en el estéreo. Considera un grupo seleccionado al azar de 18 colisiones reportadas.
  - a) ¿Cuál es la probabilidad de que todas las colisiones se deban a las distracciones mencionadas?
  - b) ¿Cuál es la probabilidad de que 15 de las colisiones se deban a las distracciones mencionadas?
  - c) Encuentre la media e interprétela.
  - d) Calcule la desviación estándar de  $x$ .



30. Con base en una encuesta realizada por Greenfield Online, las personas de 25 a 34 años de edad pasan la mayor parte de cada semana en la comida rápida. El importe semanal promedio de \$44 se reportó en un artículo del USA Today en mayo de 2009. Si supones que los gastos semanales en comida rápida tienen una distribución normal, con una desviación estándar de \$14.50, ¿Cuál es la probabilidad de que una persona de 25 a 34 años de edad gaste:

- a) menos de \$25 a la semana en comida rápida.
- b) entre \$30 y \$50 a la semana en comida rápida.
- c) más de \$75 a la semana en comida rápida.

31. Sea la función:

$$f(x) = \theta^k \frac{x^{k-1}}{\Gamma(k)} e^{-\theta x}, \quad x > 0.$$

- a) Compruebe que es una función de densidad.
- b) Hallar la Esperanza Matemática.
- c) Construya la varianza de la función utilizando la propiedad de las esperanzas.
- d) Utilice el método de máxima verosimilitud para hallar la expresión discreta de “ $\theta$ ”.

32. Sea:

$$f(x) = \theta x^{\theta-1}, \quad 0 < x < 1; \forall \theta > 0.$$

- a) Compruebe que es una función de densidad.
- b) Hallar la Esperanza Matemática.
- c) Construya la varianza de la función utilizando la propiedad de las esperanzas.
- d) Utilice el método de máxima verosimilitud para hallar la expresión discreta de “ $\theta$ ”.

33. Sea la función:

$$f(x) = \frac{1}{\theta x^{1+\frac{1}{\theta}}}, \quad x > 0 \text{ y } \theta > 0.$$

- a) Compruebe que es una función de densidad.
- b) Hallar la Esperanza Matemática.
- c) Construya la varianza de la función utilizando la propiedad de las esperanzas.
- d) Utilice el método de máxima verosimilitud para hallar la expresión discreta de “ $\theta$ ”.



34. La estatura promedio de los hombres mexicanos es de 175 cm y varían en aproximadamente 25 cm. Suponga que esta variable aleatoria tiene una distribución normal estándar, calcule la probabilidad de que, al seleccionar un hombre al azar, este tenga una estatura entre 178 cm y 180 cm.

35. Sea la función:

$$f(y) = \frac{1}{\beta} e^{-y/\beta}, \quad y > 0.$$

- Calcule la Densidad.
- Hallar la Esperanza Matemática.
- Determine la Varianza.

36. Sea:

$$f(y) = \frac{y^{\alpha-1} e^{-y/\beta}}{\beta^{\alpha} \Gamma(\alpha)}, \quad y > 0.$$

- Compruebe que es una función de densidad.
- Hallar la Esperanza Matemática.
- Determine la Varianza.

37. Sea la función:

$$f(y) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < \infty.$$

- Compruebe que es una función de densidad.
- Hallar la Esperanza Matemática.
- Construya la varianza.

38. Sea la función:

$$f(y) = \frac{y^{\alpha-1} e^{-y/\beta}}{\beta^{\alpha} \Gamma(\alpha)}, \quad y > 0.$$

- Hallar la función Generadora de Momentos.
- Calcular el primer momento aplicando la FGM.
- Hallar la varianza apoyándose en la FGM.
- Utilice el método de momentos para hallar la expresión discreta de los parámetros.



39. Sea la función:

$$f(y) = \frac{1}{\theta_2 - \theta_1}, \quad \theta_1 < y < \theta_2.$$

- Hallar la función Generadora de Momentos.
- Calcular el primer momento aplicando la FGM.
- Hallar la varianza apoyándose en la FGM.
- Utilice el método de momentos para hallar la expresión discreta de los parámetros.

40. Sea la función:

$$f(y) = \frac{y^{y/2-1} e^{-y/2}}{2^{y/2} \Gamma\left(\frac{y}{2}\right)}, \quad y > 0.$$

- Hallar la función Generadora de Momentos.
- Calcular el primer momento aplicando la FGM.
- Hallar la varianza apoyándose en la FGM.
- Utilice el método de momentos para hallar la expresión discreta del parámetro.

41. Sea la función:

$$f(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad y > 0.$$

- Hallar la función Generadora de Momentos.
- Calcular el primer momento aplicando la FGM.
- Hallar la varianza apoyándose en la FGM.
- Utilice el método de momentos para hallar la expresión discreta de los parámetros.

42. El retraso o adelanto (en minutos) de un vuelo de Guadalajara a Monterrey es una variable aleatoria cuya densidad de probabilidad está dada por:

$$f(x) = \frac{3}{4n^3} (n^2 - x^2)$$

Donde los valores negativos son indicativos de que el vuelo llega adelantado y los valores positivos señalan que el vuelo llega retrasado. Determine la probabilidad de que uno de estos vuelos llegará cuando menos  $n/2$  minutos antes.

43. En una "prueba de tortura" se enciende y se apaga un interruptor eléctrico hasta que éste falla. Si la probabilidad es 0,001 de que el interruptor falle en cualquier momento en que esté encendido o apagado, ¿cuál es la probabilidad de que el interruptor no falle durante las primeras 800 veces que se encienda?



44. Determine la varianza de la variable aleatoria  $x$ :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}(x + c), & 2 \leq x \leq 4 \\ 0, & \text{otro} \end{cases}$$

45. Demuestre que la media de la distribución binomial está dada por:

$$\mu = np$$

46. Si el 40 % de los alumnos se volvieron agresivos en un período de 2 horas después de haber ingerido algún líquido en el Sportaco, determine la probabilidad de que exactamente seis de 15 alumnos que han ingerido algún líquido se vuelvan agresivos en el período de 4 horas.

47. El número promedio de solicitudes de servicio que se reciben en un departamento de reparación de maquinaria por cada 4 horas es de 10. Determine la probabilidad de que se reciban de 15 a 17 solicitudes en un turno de 8 horas elegido al azar.

48. Se supone que el diámetro de un cable eléctrico, digamos  $X$ , es una v.a. continua con una fdp

$$f(x) = 6x(1 - x), \quad 0 \leq x \leq 1.$$

a) Verifique que la anterior es una fdp.      c) Calcule

b) Obtenga una expresión para la fda y dibújela.

$$P\left(X \leq \frac{1}{2} \mid \frac{1}{3} \leq X \leq \frac{2}{3}\right).$$

49. Se seleccionan 5 alumnos al azar de un grupo en donde 2 % (supoga este valor cte.) de los alumnos ha aprobado la materia de Probabilidad y estadística, ¿Cuál es la probabilidad de obtener cuando menos 3 alumnos reprobados en la selección?

50. De acuerdo con la Oficina Nacional de Estadística del Departamento de Salud de Estados Unidos, la cantidad promedio de ahogados por accidente por año en ese país, es de 3,0 por cada 100,000 habitantes. Calcule la probabilidad de que en una ciudad de 200,000 habitantes haya:

a) 0,    b) 2,    c) 6,    d) 8,    e) entre 4 y 8,    f) menos de 3 ahogados por accidente por año.

51. Calcule la probabilidad de obtener un total de 11

a) una vez,

b) dos veces, en dos lanzamientos de un par de dados no cargados.



52. Un contador público certificado (CPA, por sus siglas en inglés) ha encontrado que nueve de entre diez compañías auditadas contienen errores importantes. Si el CPA hace auditoría a una serie de cuentas de empresas, ¿cuál es la probabilidad de que la primera cuenta que contenga errores importantes.
- sea la tercera en ser auditada?,
  - sea la tercera cuenta auditada la que le sigue?
53. Las calificaciones para un examen de admisión a una universidad están normalmente distribuidas con media de 75 y desviación estándar 10. ¿Qué fracción de las calificaciones se encuentra entre 80 y 90?
54. Encuentre la media y la varianza de la distribución gamma.
55. El peso medio de 500 estudiantes varones de una universidad es de 151 lb y la desviación estándar es de 15 libras. Si se supone que el peso está distribuido normalmente, encontrar cuántos estudiantes pesan
- entre 120 y 155 libras,
  - más de 185 libras.
56. Sea la v.a.  $X \sim \text{Binom}(n, p)$ .
- Explique el significado de los parámetros  $n$  y  $p$ .
  - Muestre que
$$E \left[ \frac{1}{X+1} \right] = \frac{1 - (1-p)^{n+1}}{(n+1)p}$$
57. Se lanzan volados de manera continua hasta que sale águila por décima vez. Sea  $X$  el número de soles que salen. Calcule la función de densidad de  $X$ .
58. Una urna contiene 4 esferas blancas y 4 negras. Elegimos 4 esferas de manera aleatoria. Si 2 de ellas son blancas y 2 negras, nos detenemos. Si no, volvemos a colocar las esferas en la urna y volvemos a seleccionar 4 esferas al azar. Esto continúa hasta que exactamente 2 de las 4 elegidas sean blancas. ¿Cuál es la probabilidad de que hagamos exactamente  $n$  elecciones?
59. Suponga que el número de accidentes diarios que ocurren en cierta carretera es una v.a. con distribución de Poisson(3).
- Encuentre la probabilidad de que ocurran 3 o más accidentes el día de hoy.
  - Repita el inciso anterior bajo la aseveración de que ocurre al menos un accidente el día de hoy.





61. Encuentre la esperanza y la varianza de alguna de las v.a.'s siguientes:
- $X \sim \text{Geom}(p)$ ,
  - $X \sim \text{NegBinom}(r, p)$ ,
  - $X \sim \text{hipergeom}(n, N, m)$ .
62. Se efectúan 1000 lanzamientos independientes de un dado equilibrado. Calcule de manera aproximada la probabilidad de que el número 6 salga entre 150 y 200 veces. Si el número 6 aparece exactamente 200 veces, encuentre la probabilidad de que el número 5 salga menos de 150 veces.
63. Suponga que  $X$  es una v.a. normal con media  $\mu = 5$ . Si  $P(X > 9) = 0,2$ , aproximadamente, calcule  $\text{Var}(X)$ .
64. Nicandro calcula que el número total de miles de kilómetros que se pueden recorrer en un auto antes de que sea necesario desecharlo es una v.a. exponencial con parámetro  $1/20$ . Nicanor tiene un auto usado que, según él, solo ha recorrido 10000 kilómetros. Si Nicandro compra el automóvil, ¿cuál es la probabilidad de que pueda recorrer al menos 20000 kilómetros más? Repita el ejercicio bajo el supuesto de que la vida útil del automóvil no se distribuye exponencialmente sino (en miles de kilómetros) de manera uniforme en  $(0, 40)$ .
65. En promedio, una determinada pieza de computadora dura diez años. El tiempo que dura la parte de la computadora se distribuye exponencialmente.
- ¿Cuál es la probabilidad de que una pieza de computadora dure más de 7 años?
66. Se capturaron, etiquetaron y liberaron cinco individuos de una población de animales que se piensa están al borde la extinción en una región para que se mezclen con la población. Después de haber tenido la oportunidad de mezclarse, se selecciona una muestra aleatoria de 10 de estos animales. Sea  $X$  = el número de animales etiquetados en la segunda muestra. Si en realidad hay 25 animales de este tipo en la región, ¿cuál es la probabilidad de que
- $X = 2$
67. Una compañía que produce cristales finos sabe por experiencia que 10% de sus copas de mesa tienen imperfecciones cosméticas y deben ser clasificadas como de segunda.
- Entre seis copas seleccionadas al azar, ¿qué tan probable es que sólo una sea de segunda?
  - Si las copas se examinan una por una, ¿cuál es la probabilidad de cuando mucho cuatro deban ser seleccionadas para encontrar tres que no sean de segunda?



68. Los datos recogidos en el Aeropuerto Internacional Toronto Pearson sugieren que una distribución exponencial con valor medio de 2.725 horas es un buen modelo para la duración de la lluvia.
- a) ¿Cuál es la probabilidad de que la duración de un evento de lluvia en este lugar particular sea por lo menos 2 horas? ¿A lo más 3 horas? ¿Entre 2 y 3 horas?
69. Se capturaron, etiquetaron y liberaron cinco individuos de una población de animales que se piensa están al borde la extinción en una región para que se mezclen con la población. Después de haber tenido la oportunidad de mezclarse, se selecciona una muestra aleatoria de 10 de estos animales. Sea  $X$  = el número de animales etiquetados en la segunda muestra. Si en realidad hay 25 animales de este tipo en la región, ¿cuál es la probabilidad de que:
- a)  $X > 2$
70. El chef de un restaurante prepara una ensalada revuelta que contiene, en promedio, cinco vegetales. Encuentra la probabilidad de que la ensalada contenga más de 5 vegetales
- a) en un día dado  
b) en tres de los siguientes 4 días  
c) por primera vez en abril el día 5.
71. Un encuestador considera que el 20 % de los votantes en cierta área está a favor de una emisión de valores bursátiles. Si se seleccionan 64 votantes al azar de un gran número de votantes en esta área, aproxima la probabilidad de que la fracción de votantes en la muestra a favor de la emisión de los valores no difiera en más de 0.06 de la fracción que él supone es la correcta.
72. Varios estudiantes de estadística no están preparados para un examen sorpresa de verdadero y falso de 16 preguntas, por lo que todas sus respuestas son conjeturas.
- a) Calcule la media y la desviación estándar del número de respuestas correctas de esos estudiantes.  
b) ¿Sería poco común que un estudiante aprobara el examen adivinando y que obtenga al menos 10 respuestas correctas? Argumente su respuesta.  
c) ¿Cuál es la probabilidad de que el estudiante apruebe el examen con exactamente 8 respuestas correctas?
73. En una baraja estándar de 52 cartas hay 13 corazones y 39 de otros palos. Se extraen 5 cartas al azar sin reemplazo. Sea  $X$  la variable que describe el número de corazones en la muestra de 5 cartas.
- a) Calcule la media y la desviación estándar de la variable aleatoria  $X$ .  
b) ¿Cuál es la probabilidad de extraer exactamente 4 cartas de corazones?  
c) ¿Sería poco común extraer al menos 4 cartas de corazones? Argumente su respuesta.



74. Los átomos radiactivos son inestables porque tienen demasiada energía. Cuando liberan su energía sobrante, se dice que decaen. Al estudiar el Cesio 137, se descubre que durante el curso del decaimiento en 365 días, 1,000,000 de átomos radiactivos se reducen a 997,287 átomos radiactivos.
- Calcule el número medio de átomos radiactivos perdidos durante el decaimiento en un día.
  - Calcule la probabilidad de que en un día dado, decaigan 50 átomos radiactivos.
  - ¿Cuál es la desviación estándar del número de átomos que decaen en un día?
  - ¿Es raro observar un día en el que más de 15 átomos hayan decaído?
75. La duración de las clases de una maestra está distribuida uniformemente entre 1.15 horas y 1.25 horas. Una alumna se preocupa por llegar tarde a su siguiente clase si la sesión se extiende más de 1.22 horas.
- Modele esta situación con una variable aleatoria continua  $X$ . ¿Cuál es la función de densidad de probabilidad  $f(x)$ ?
  - ¿Cuál es la probabilidad de que la clase dure más de 1.22 horas?
  - ¿Cuál es la media (esperanza matemática) del tiempo que duran las clases?
  - ¿Cuál es la desviación estándar de la duración de las clases?
  - ¿Sería poco común que una clase dure más de 1.24 horas? Justifique su respuesta utilizando la media y la desviación estándar.
76. Una fábrica de termómetros fabrica termómetros que se supone deben dar lecturas de  $0^{\circ}\text{C}$  al punto de congelación del agua. Las pruebas de una muestra grande de estos instrumentos revelaron que en el punto de congelación del agua, algunos termómetros daban lecturas por debajo de  $0^{\circ}\text{C}$  (denotadas con números negativos) y otras daban lecturas por encima de  $0^{\circ}\text{C}$  (denotadas con números positivos). Suponga que la lectura media es de  $0^{\circ}\text{C}$  y que la desviación estándar de las lecturas es de  $1^{\circ}\text{C}$ . También suponga que las lecturas se distribuyen de manera normal.
- Si se elige al azar un termómetro, calcule la probabilidad de que, al punto de congelación del agua, la lectura sea menor que  $1,58^{\circ}\text{C}$ .
  - Calcule la probabilidad de seleccionar al azar un termómetro con una lectura (en el punto de congelación del agua) por arriba de  $-1,23^{\circ}\text{C}$ .
  - Calcule la probabilidad de que el termómetro elegido (en el punto de congelación del agua) tenga lecturas entre  $-2^{\circ}\text{C}$  y  $1,5^{\circ}\text{C}$ .



77. Al someter a prueba tarjetas de circuito, la probabilidad de que cualquier diodo particular falle es de 0.01. Suponga que una tarjeta de circuito contiene 200 diodos.
- ¿Cuántos diodos esperaría que fallen y cuál es la desviación estándar del número que se espera fallen?
  - ¿Cuál es la probabilidad (aproximada) de que por lo menos cuatro diodos fallen en una tarjeta seleccionada al azar?
  - Si se envían cinco tarjetas a un cliente particular, ¿qué tan probable es que por lo menos cuatro de ellas funcionen apropiadamente? (Una tarjeta funciona apropiadamente sólo si todos sus diodos funcionan.)
78. Un consumidor está tratando de decidir entre dos planes de llamadas de larga distancia. El primero aplica una sola tarifa de 10 centavos por minuto, en tanto que la segunda cobra una tarifa de 99 centavos por llamadas hasta de 20 minutos y luego 10 centavos por cada minuto adicional que exceda de 20 (suponga que las llamadas que duran un número no entero de minutos son cobradas proporcionalmente a un cargo por minuto entero). Suponga que la distribución de duración de llamadas del consumidor es exponencial con parámetro  $\lambda$ .
- Explique intuitivamente cómo la selección del plan de llamadas deberá depender de cuál sea la duración de las llamadas.
  - ¿Cuál plan es mejor si la duración esperada de las llamadas es de 10 minutos? ¿Y de 15 minutos? [Sugerencia: Sea  $h_1(x)$  el costo del primer plan cuando la duración de las llamadas es de  $x$  minutos y sea  $h_2(x)$  la función de costo del segundo plan. Dé expresiones para estas dos funciones de costo y luego determine el costo esperado de cada plan.]
79. En una planta industrial de producción de componentes electrónicos, se sabe que los tiempos de espera entre fallas críticas en una máquina específica siguen una distribución Gamma con parámetros  $\alpha = 3$  y  $\beta = 2$ . Esto significa que el tiempo total hasta que ocurran 3 fallas sigue una distribución Gamma.
- ¿Cuál es la probabilidad de que las tres fallas ocurran en menos de 7 horas?
  - ¿Cuál es el valor esperado y la varianza del tiempo total hasta que ocurran las 3 fallas?
  - Si el departamento de mantenimiento quiere programar una revisión justo antes de que haya un 90 % de probabilidad de que ya hayan ocurrido las 3 fallas, ¿cuánto tiempo deben esperar (percentil 90)?



80. Una agencia aeroespacial está desarrollando una nueva serie de satélites geoestacionarios de comunicaciones. Estos satélites incluyen una unidad crítica de procesamiento térmico cuya duración de funcionamiento antes de fallar sigue una distribución normal. Por cuestiones de seguridad y planificación de misiones, los ingenieros saben que: El 80 % de las unidades duran entre 50 y 90 meses de operación en órbita. La duración de misión esperada para cada satélite es de 75 meses.
- ¿Cuál es la probabilidad de que una unidad térmica falle antes de los 45 meses o después de los 95 meses?
  - ¿Cuál es la probabilidad de que una unidad falle antes de que termine la misión de 75 meses?





## Unidad 4

1. Considera una situación en la que se miden la tensión superficial y la acidez de un producto químico. Estas variables se codifican de modo tal que la tensión superficial se mide en una escala

$$0 \leq x_1 \leq 2$$

y la acidez se mide en una escala

$$2 \leq x_2 \leq 4.$$

La función de densidad de probabilidad conjunta está dada como

$$f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = k(6 - x_1 - x_2)$$

- a) Encuentra el valor de  $k$ .
- b) Encuentra la función de distribución acumulada.
- c) Calcula

$$P(X_1 < 1, X_2 < 3).$$

- d) Calcula

$$P(X_1 + X_2 \leq 4).$$

- e) Encuentra las marginales.

2. Supón que la v.a bidimensional  $(X, Y)$  tienen f.d.p conjunta dada por

$$f_{X, Y}(x, y) = kx(x - y)$$

con

$$0 < x < 2$$

y

$$-x < y < x.$$

- a) Encuentra el valor de  $k$ .
- b) Encuentra las f.d.p marginales.

3. Si la v.a. bidimensional continua  $(X, Y)$  tiene una f.d.p conjunta dada por

$$f_{X, Y}(x, y) = x^2 + \frac{xy}{3},$$

con

$$0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 2$$

Encuentre

$$P(X + Y \geq 1).$$



4. Los tiempos de servicio para los clientes que pasan por la caja en una tienda de venta al menudeo son variables aleatorias independientes con media de 1,5 minutos y varianza de 1,0. Calcule la probabilidad de que 100 clientes puedan ser atendidos en menos de 2 horas de tiempo total de servicio.

5. Se seleccionan dos cartas al azar de una baraja. Sea  $X$  el número de ases obtenidos y  $Y$  el número de reinas obtenidas.

a) Obtenga la distribución conjunta de  $(X, Y)$ .  
b) Obtenga las distribuciones marginales de  $X$  y  $Y$ .

6. Si las variables aleatorias  $X$  y  $Y$  tienen una fdp conjunta

$$f(x, y) = \frac{xy}{96}, \quad 0 < x < 4, \quad 1 < y < 5$$

hallar la fdp de

$$U = X + 2Y.$$

7. Suponga que

$$X_1, X_2, \dots, X_n$$

son variables aleatorias independientes con fgm

$$M_{X_1}(t), M_{X_2}(t), \dots, M_{X_n}(t)$$

respectivamente, si

$$Z = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

demuestre que

$$M_Z(t) = M_{X_1}(t)M_{X_2}(t) \cdots M_{X_n}(t)$$



8. Suponga que

$$\vec{X}$$

es un vector aleatorio  $n$ -dimensional, tal que,

$$E(X_i) = \mu_i,$$

$$V(X_i) = \sigma_i^2,$$

si

$$Z = H(X_1, X_2, \dots, X_n),$$

demuestre que:

a)

b)

$$E(Z) \approx H(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 H}{\partial x_i^2} \sigma_i^2$$

$$V(Z) \approx \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial H}{\partial x_i} \right)^2 \sigma_i^2$$

9. Un supermercado local tiene tres cajas. Dos clientes llegan a las cajas en momentos diferentes cuando las cajas no atienden a otros clientes. Cada cliente escoge una caja de manera aleatoria, independientemente del otro. Denote con  $Y_1$  el número de clientes que escogen la caja 1 y con  $Y_2$  el número que selecciona la caja 2. Encuentre la función de probabilidad conjunta y marginal de  $Y_1$  y  $Y_2$ .
10. Considérese el experimento aleatorio que consiste lanzar un dado 2 veces. Si  $X$  es la variable aleatoria que cuenta el número de cincos, e  $Y$  la variable aleatoria que cuenta el número de seises (en los dos lanzamientos), determine la función de probabilidad conjunta y marginal de las variables aleatorias  $X$  y  $Y$ . Supóngase que el dado es normal y no está cargado.
11. Las componentes de una bocina del fabricante A tienen una vida útil media de 6.5 años y una desviación estándar de 0.9 años, mientras que las del fabricante B tienen una vida útil media de 6 años y una desviación estándar de 0.8 años. ¿Cuál es la probabilidad de que una muestra aleatoria de 36 componentes del fabricante A tengan una vida útil media que sea al menos un año mayor que la vida útil media de una muestra de 49 componentes del fabricante B?
12. En dos lugares de una habitación se mide la intensidad del ruido. Sean  $X$  e  $Y$  las variables aleatorias que representan la intensidad del ruido en estos puntos y supongamos que la distribución conjunta de estas variables es continua y tiene densidad

$$f(x, y) = \begin{cases} xye^{-1/2(x^2+y^2)} & x > 0, y > 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- a) Calcular las densidades marginales de  $X$  e  $Y$ .
- b) Calcular las probabilidades  $P(X \leq 1; Y \leq 1)$  y  $P(X|Y \leq 1)$ .



13. Considere dos variables aleatorias  $X$  e  $Y$  con distribución conjunta discreta definida por la siguiente tabla para la función de probabilidad conjunta, donde  $h = 10$ :

$x/y$	0	1	2
0.30	0.1h	0.6h	0.6h
0.1	0.2h	0.8h	0.9h
0.2	0.3h	0.2h	1.2h
0.3	0.4h	0.4h	0.3h

- a)  $P(X > 1)$   
b)  $P(X \geq Y | Y > 1)$   
c) ¿Cuál es  $P(X = 3, Y = 2)$ ?  
d) Calcule  $P(X = Y)$ .
14. En dos lugares de una habitación se mide la intensidad del ruido. Sean  $X$  e  $Y$  las variables aleatorias que representan la intensidad del ruido en estos puntos y supongamos que la distribución conjunta de estas variables es continua y tiene densidad

$$f(x, y) = \begin{cases} xye^{-1/2(x^2+y^2)} & \text{si } x > 0 \text{ y } y > 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- a) Calcular las probabilidades  $P(X \leq 2; Y \leq 2)$  y  $P(X|Y \leq 2)$ .  
b) ¿Son independientes estas variables aleatorias?
15. Sea  $X$  el número de cámaras digitales Canon vendidas durante una semana particular por una tienda. La función masa de probabilidad de  $X$  es

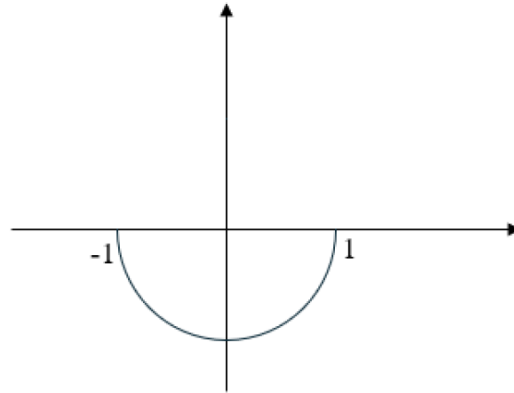
$X$	0	1	2	3	4
$P_x(x)$	0.15	0.25	0.1	0.3	0.2

El 60% de todos los clientes que compran estas cámaras también compran una garantía extendida. Sea  $Y$  el número de compradores durante esta semana que compran una garantía extendida.

- a) ¿Cuál es  $P(X = 3, Y = 2)$ ?  
b) Calcule  $P(X = Y)$ .



16. Supón que  $(X, Y)$  se distribuye de manera uniforme sobre el semicírculo del diagrama.



Encuentra:

- Las distribuciones marginales de  $X$  y  $Y$ .
  - La distribución de probabilidad condicional de  $X$  dado  $Y$ .
17. La probabilidad conjunta del número  $X$  de automóviles y el número  $Y$  de autobuses, por ciclo de señal en un carril propuesto de vuelta a la izquierda, aparece en la siguiente tabla de probabilidad conjunta:

$Y \setminus X$	0	1	2	3	4	5
0	0,025	0,050	0,025	0,150	0,100	0,050
1	0,015	0,030	0,075	0,090	0,060	0,030
2	0,08	0,020	0,050	0,060	0,040	0,050

- ¿Cuál es la probabilidad de que haya exactamente cuatro automóviles y dos autobuses durante un ciclo?
- ¿Cuál es la probabilidad de que haya a lo sumo un automóvil y dos autobuses durante un ciclo?
- ¿Cuál es la probabilidad de que haya exactamente dos automóviles durante un ciclo?
- ¿Cuál es la probabilidad de que haya exactamente un autobús?
- Suponga que el carril de vuelta a la izquierda tendrá capacidad para que transiten cuatro automóviles, y un autobús equivale a tres automóviles. ¿Cuál es la probabilidad de que haya sobrecarga durante un ciclo?
- ¿Son  $X$  y  $Y$  variables aleatorias independientes? Explique.



18. Dos componentes de una microcomputadora tienen la siguiente función de densidad conjunta para sus duraciones  $X$  y  $Y$ :

$$f(x, y) = \begin{cases} xe^{-x(1+y)} & \text{si } x \geq 0, y \geq 0 \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que la duración  $X$  del primer componente sea mayor de 3?
- b) ¿Cuáles son las funciones marginales de  $X$  y de  $Y$ ?
- c) ¿Son independientes las dos duraciones? Explique.
- d) ¿Cuál es la probabilidad de que la duración de por lo menos un componente sea mayor de 4?
19. Sea  $X$  el número de cámaras digitales Canon vendidas durante una semana particular por una tienda. La función masa de probabilidad de  $X$  es:

$X$	0	1	2	3	4
$P_x(x)$	0.1	0.2	0.3	0.25	0.15

El 60% de todos los clientes que compran estas cámaras también compran una garantía extendida. Sea  $Y$  el número de compradores durante esta semana que compran una garantía extendida.

- a) ¿Cuál es  $P(X = 4, Y = 2)$ ? [Sugerencia: Esta probabilidad es igual a  $P(Y = 2|X = 4) * P(X = 4)$ ; ahora piense en las cuatro compras como cuatro ensayos de un experimento binomial, con el éxito en un ensayo correspondiente a comprar una garantía extendida.].
- b) Calcule  $P(X = Y)$ .
- c) Determine la función masa de probabilidad conjunta de  $X$  y  $Y$  y luego la función masa de probabilidad marginal  $Y$ .
20. Se supone que cada neumático delantero de un tipo particular de vehículo está inflado a una presión de 26 lb/pulg<sup>2</sup>. Suponga que la presión de aire real en cada neumático es una variable aleatoria:  $X$  para el neumático derecho y  $Y$  para el izquierdo con función de densidad de probabilidad conjunta:

$$f(x, y) = \begin{cases} K(x^2 + y^2) & 20 \leq x \leq 30, \quad 20 \leq y \leq 30 \\ 0 & \text{de lo contrario} \end{cases}$$

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que ambos neumáticos estén inflados a menos presión?
- b) Determine la distribución (marginal) de la presión del aire en el neumático derecho.



## Unidad 5

1. ¿Es la varianza muestral un estimador sesgado o insesgado de la varianza poblacional? Demuestra.
2. Sea  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  una m.a de una población con f.d.p

$$f_Y(y, \theta) = \begin{cases} (\theta + 1)y^\theta & 0 < y < 1, \theta > -1 \\ 0 & \text{o.c} \end{cases}$$

Obtén un estimador por el método de los momentos para  $\theta$

3. Las calificaciones de exámenes para todos los estudiantes de último año de preparatoria en cierto estado tienen media de 60 y varianza de 64. Una muestra aleatoria de  $n = 100$  estudiantes de una escuela de una preparatoria grande tuvo una calificación media de 58. ¿Hay evidencia para sugerir que el nivel de conocimientos de esta escuela sea inferior? (Calcule la probabilidad de que la media muestral sea a lo sumo 58 cuando  $n = 100$ ).
4. A un grupo de mujeres de 30 años se les mide la altura y se obtienen los siguientes datos:

$$\{60,0, 64,3, 65,0, 67,8, 66,0, 63,5, 60,4\}.$$

- a) Obtener la media poblacional.
  - b) Obtener la varianza poblacional.
  - c) Construir muestras de tamaño 3. Obtener las medias muestrales. Usar la nueva variable aleatoria  $Y = \bar{X}$  y obtener  $P(Y = y)$  Realizar un histograma. Obtener  $\mu_Y$  y  $\sigma_Y$ .
  - d) Construir muestras de tamaño 4. Obtener las medias muestrales. Usar la nueva variable aleatoria  $Y = \bar{X}$  y obtener  $P(Y = y)$  Realizar un histograma. Obtener  $\mu_Y$  y  $\sigma_Y$ .
  - e) Construir muestras de tamaño 5. Obtener las medias muestrales. Usar la nueva variable aleatoria  $Y = \bar{X}$  y obtener  $P(Y = y)$  Realizar un histograma. Obtener  $\mu_Y$  y  $\sigma_Y$ .
  - f) Construir los rangos muestrales para muestras de tamaño 3. Usar esta nueva variable aleatoria  $Z$  y obtener  $P(Z = z)$  Realizar un histograma. Obtener  $\mu_Z$  y  $\sigma_Z$ .
  - g) Construir los rangos muestrales para muestras de tamaño 4. Usar esta nueva variable aleatoria  $Z$  y obtener  $P(Z = z)$  Realizar un histograma. Obtener  $\mu_Z$  y  $\sigma_Z$ .
  - h) Construir los rangos muestrales para muestras de tamaño 5. Usar esta nueva variable aleatoria  $Z$  y obtener  $P(Z = z)$  Realizar un histograma. Obtener  $\mu_Z$  y  $\sigma_Z$ .
5. Sean  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  una muestra aleatoria con  $E(Y_i) = \mu$  y  $Var(Y_i) = \sigma^2$   
Demuestre que

$$S^2 = \frac{1}{n} \sum_i^n (Y_i - \bar{Y})^2$$

es un estimador insesgado para  $\sigma^2$ .







14. Las pelotas de tenis que se utilizan en torneos profesionales deben pasar pruebas rigurosas para demostrar que la variación del rebote alrededor de un valor específico es mínima. Cuando éstas se dejan caer de una altura determinada, deben rebotar a una altura promedio de 4 metros. En una muestra aleatoria de 91 pelotas, la altura media en los rebotes fue de 4 metros y la varianza de 0.36.
- Encuentre un intervalo de confianza del 90 % para la varianza poblacional.
  - Encuentre un intervalo de confianza del 95 % para la varianza poblacional.
  - Si la varianza máxima que se permite es de 0.5, ¿sería razonable decir que las pelotas de esta marca se pueden utilizar en torneos profesionales?
15. En un estudio, 68 de 160 niños considerados en la muestra recibieron un tratamiento de fluoruro y tuvieron caries. Otro tratamiento químico dio como resultado que 38 de 110 niños, seleccionados al azar, tuvieran caries.
- ¿Se puede afirmar con un nivel de significancia igual a 5%, que el tratamiento con fluoruro dio peor resultado que el tratamiento químico? Establezca claramente las hipótesis.
  - ¿Cuál es el nivel de significancia descriptivo?
16. Una papelería recibe un embarque de cierta marca de bolígrafos. El propietario desea estimar la proporción de defectuosos que éste contiene y para ello, toma una muestra aleatoria de 300 plumas, de las cuales 30 tienen algún defecto. Establezca una estimación por intervalo, con 90 % de confianza, para la proporción de bolígrafos defectuosos en el embarque. Supóngase que se puede devolver el embarque si éste contiene más de 5 % de defectuosos. Con base en los resultados de la muestra, ¿le recomendaría al dueño de la papelería regresar todos los bolígrafos?
17. En una muestra aleatoria de 30 compañías manufactureras, con activos fijos por debajo de \$10,000, se obtuvo una utilidad promedio del 1.8 % con una desviación estándar de 0.4 %. En otra muestra seleccionada al azar de 40 compañías manufactureras con activos fijos entre \$10,000 y \$50,000, la utilidad promedio y la desviación estándar fueron de 2.4 y 0.6 respectivamente.
- Con  $\alpha = 0,1$ , pruebe que las varianzas son iguales.
  - Con una significancia de 0.05, ¿Se puede decir que la diferencia entre las utilidades medias de los dos tipos de compañía es diferente?
  - ¿Qué se requiere suponer sobre el comportamiento de la variable de interés?



18. Un fabricante desea comparar el proceso actual de armado para uno de sus productos con un método propuesto que supuestamente reduce el tiempo de armado. Se les pidió a ocho trabajadores de la planta que armaran las unidades con ambos procesos. Enseguida se presentan los tiempos observados en minutos.

trabajador	proceso actual	proceso propuesto
1	38	30
2	32	32
3	41	34
4	35	37
5	42	35
6	32	26
7	45	38
8	37	32

- a) Con  $\alpha = 0,05$ , ¿existe alguna razón para creer que el tiempo de armado para el proceso actual es mayor que el del método propuesto por más de 2 minutos?
- b) ¿Cuál es el nivel de significancia descriptivo?
19. Cuando se juega boliche es a menudo posible que se tire bien en el primer juego y se tire pobremente en el segundo o viceversa. Las siguientes seis parejas de números representan las puntuaciones del primer y segundo juego de la misma persona en seis lunes seleccionados aleatoriamente. Suponiendo que las puntuaciones siguen una distribución normal bivariada, pruebe que los resultados de los juegos están relacionados linealmente (Utilice  $\alpha = 0,10$ ).

Juego 1	170	190	200	183	187	178
Juego 2	197	178	150	176	205	153

20. A fin de determinar si existe relación entre el tipo de sangre y la severidad de los resfriados del invierno, se realizó un estudio y se obtuvieron los siguientes resultados:

	A	B	AB	O
resfriado severo	34	57	82	55
resfriado moderado	53	45	37	57
sin resfriado	213	198	181	188

- a) ¿Qué se puede concluir de los datos anteriores con respecto a la relación propuesta?



21. Los fabricantes de un conocido refresco embotellado decidieron cambiar la fórmula de su producto. En vista de que un número importante de personas se han manifestado en contra del cambio, la gerencia de la embotelladora decidió llevar a cabo una encuesta. Por otra parte, la misma gerencia ha manifestado que era normal que una actitud así se presente y que, sólo sería alarmante la situación, si más de la mitad de los consumidores están en contra del cambio. De 937 personas entrevistadas, 531 se manifestaron en contra de la nueva fórmula.
- Plantee la pregunta como un problema de prueba de hipótesis. Escriba en el contexto del problema las hipótesis nula y alterna.
  - Pruebe las hipótesis usando un nivel de significancia del 5%. Escriba su conclusión en el contexto del problema.
22. En una escuela se tomó una muestra aleatoria de tamaño 45, usando un padrón que incluye profesores y estudiantes. A cada individuo en la muestra se le preguntó si es profesor o estudiante y si considera si el nivel académico de la escuela es deficiente (D), regular (R) o excelente (E). Se desea dar respuesta a la pregunta ¿la opinión sobre el nivel académico es independiente de la categoría de los entrevistados? A continuación, se presentan los resultados: Profesor: D, D, D, D, D, D, D, R, R, R, R, R, R, R, E, E, E, E, E, E, E, E, E. Estudiante: D, D, D, D, D, R, R, R, R, R, R, R, R, R, E, E, E, E, E, E, E, E, E.
- Plantee la pregunta como un problema de prueba de hipótesis. Escriba en el contexto del problema las hipótesis nula y alterna.
  - Pruebe las hipótesis usando un nivel de significancia del 5%. Escriba su conclusión en el contexto del problema.
23. Sea  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  una muestra aleatoria de una población con media 3. Supóngase que  $\hat{\theta}_2$  es un estimador insesgado de  $E(Y^2)$  y  $\hat{\theta}_3$  un estimador insesgado de  $E(Y^3)$ . Obtén un estimador insesgado para el tercer momento central de la distribución en cuestión.
24. Cierta tipo de componente electrónico tiene una duración  $X$  en horas, con f.d.p

$$f_X(x, \theta) = \frac{1}{\theta^2} x e^{-x/\theta}$$

con  $x > 0$ . Sea  $\hat{\theta}$  el estimador máximo verosímil de  $\theta$ . Supón que tres componentes al probarlos de manera independiente presentan duración de 120, 130 y 128 hrs.

- ¿Cuál es la estimación máximo verosímil de  $\theta$ ?
- ¿Cuánto valen la esperanza y la varianza del estimador?





No.Clase	LI	LS	f	$f_a$	$Rf_a$
1		7			
2					
3					
4					
5					
6					
7					

Color

No.Clase	LI	LS	f	$f_a$	$Rf_a$
1		8			
2					
3					
4					
5					
6					
7					

b) Elabore una ojiva de frecuencias relativas acumuladas para las velocidades de impresión de cada tipo de impresora. ¿Qué porcentaje de impresoras de cada tipo imprimen a una velocidad menor de 21.5 ppm?

c) Llene la siguiente tabla para contestar lo que se pide a continuación.

Blanco y Negro

x	f	xf	$f_a$	$x^2$
---	---	----	-------	-------

Color

x	f	xf	$f_a$	$x^2$
---	---	----	-------	-------



- d) Calcule la mediana para cada muestra y comente qué significa este valor.
- e) Elabore el resumen de los 5 números para cada muestra, de un significado al rango intercuartil y concluya si cada muestra tiene o no valores extremos.
- f) Use lo anterior para elaborar un gráfico de caja y bigote.
- g) Calcule la media y la desviación estándar para cada muestra. Recuerde que la desviación estándar para una muestra se calcula por medio de la fórmula

$$s = \frac{n \sum x^2 - (\sum x)^2}{n(n-1)}$$

- h) ¿Qué porcentaje de impresoras de cada tipo tienen una velocidad de impresión menor a 19 ppm?
- i) ¿Qué porcentaje de impresoras para cada tipo, tiene una velocidad superior a 32 ppm?
- j) Escriba sus conclusiones, ¿según el análisis anterior cuál tipo de impresoras imprimen a mayor velocidad y cuál es el estadístico que representa los datos de la muestra de cada tipo?

29. Fórmulas que le pueden ser de utilidad:

- a) Percentil del valor  $x = \left( \frac{\text{Número de valores menores que } x}{\text{número total de valores}} \right) 100$
- b) Localizador L de la posición de un valor:  $L = (k/100)n$  donde k es el percentil en cuestión y n el número total de valores.
- c) En caso que L sea entero, el percentil  $P_k$  se obtiene promediando el valor L y el siguiente.
- d) En caso que L no sea entero, se redondea al entero más grande y  $P_k$  es el L valor redondeado contando a partir del más bajo.
- e) Coeficiente de variación para una muestra:

$$CV = \frac{s}{\bar{x}} (100 \%)$$

- f) Puntuación z para una muestra:

$$z = \frac{x - \bar{x}}{s}$$

30. Usted ha sido contratado por un botánico para obtener datos de todas las plantas que crecen en las universidades de Ciudad de México. Describa un procedimiento para obtener una muestra de tipo:

- a) De conveniencia
- b) Estratificada
- c) Por conglomerados



31. Tres estudiantes toman prueba de estrés equivalentes. ¿Cuál es la puntuación relativa más alta? Una puntuación de 126 en una prueba con una media de 129 y desviación estándar de 30, una puntuación de 90 en una prueba con una media de 86 y desviación estándar de 16 ó una puntuación de 28 en una prueba con una media de 32 y una desviación estándar de 12. Argumente su respuesta.

32. Un grupo de estudiantes realizó, como parte de un trabajo de investigación, una búsqueda de internet sobre diversas marcas y tipos de impresoras que se venden en México, y registró la velocidad de impresión en los modelos negro y color de una muestra de 50 tipos de impresoras en cada modalidad (negro y color). Los datos se expresan en número de páginas impresas por minuto (ppm).

Negro: 9, 9, 9, 11, 11, 13, 13, 13, 19, 19, 19, 19, 20, 21, 21, 21, 21, 26, 26, 28, 28, 28, 28, 28, 28, 28, 28, 30, 30, 30, 30, 30, 30, 30, 30, 31, 31, 32, 32, 32, 32, 34, 34, 38, 38, 38, 38, 38, 38, 38, 38.

Color: 8, 8, 8, 10, 10, 10, 10, 11, 11, 14, 14, 15, 15, 15, 15, 15, 15, 15, 15, 17, 17, 17, 17, 17, 17, 17, 17, 19, 19, 20, 20, 21, 21, 21, 21, 21, 21, 21, 21, 21, 31, 31, 34, 34, 38, 38, 38, 38, 38.

a) Elabore una distribución de frecuencias relativas agrupadas que conste de 7 clases con ancho de clase igual a 5.

Blanco y Negro

No.Clase	LI	LS	f	$f_a$	$Rf_a$
1	8				
2					
3					
4					
5					
6					
7					

Color

No.Clase	LI	LS	f	$f_a$	$Rf_a$
1	7				
2					
3					
4					
5					
6					
7					

b) Elabore una ojiva de frecuencias relativas acumuladas para las velocidades de impresión de cada tipo de impresora. ¿Qué porcentaje de impresoras de cada tipo imprimen a una velocidad menor de 21.5 ppm?



- c) Llene la siguiente tabla para contestar lo que se pide a continuación.  
Blanco y Negro

	$x$	$f$	$xf$	$f_a$	$x^2$
Color					

- d) Calcule la mediana para cada muestra y comente qué significa este valor.  
e) Elabore el resumen de los 5 números para cada muestra, de un significado al rango intercuartil y concluya si cada muestra tiene o no valores extremos.  
f) Use lo anterior para elaborar un gráfico de caja y bigote.  
g) Calcule la media y la desviación estándar para cada muestra. Recuerde que la desviación estándar para una muestra se calcula por medio de la fórmula

$$s = \frac{n \sum x^2 - (\sum x)^2}{n(n-1)}$$

- h) ¿Qué porcentaje de impresoras de cada tipo tienen una velocidad de impresión menor a 19 ppm?  
i) ¿Qué porcentaje de impresoras para cada tipo, tiene una velocidad superior a 32 ppm?  
j) Escriba sus conclusiones, ¿según el análisis anterior cuál tipo de impresoras imprimen a mayor velocidad y cuál es el estadístico que representa los datos de la muestra de cada tipo?



33. ¿Odia usted los lunes? Investigadores en Alemania concluyeron que el riesgo de ataque al corazón en un lunes, para una persona que trabaja, puede ser hasta 50 % mayor que en cualquier otro día. Los investigadores registraron ataques al corazón y paros cardíacos en un período de 5 años entre 330,000 personas que vivían cerca de Augsberg, Alemania. En un intento por verificar lo dicho por el investigador, se encuestaron 200 trabajadores que habían tenido ataques al corazón recientemente. El día en el que ocurrieron sus ataques al corazón aparece en la tabla siguiente:

Día	Domingo	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	Sábado
Frecuencia	24	36	27	26	32	26	29

- a) Plantee la hipótesis nula y la alternativa.
- b) Calcule la frecuencia esperada bajo la hipótesis nula.
- c) Calcule el estadístico  $\chi^2$ .
- d) ¿Estos datos presentan suficiente evidencia para indicar que hay una diferencia en los porcentajes de ataques al corazón que ocurren en diferentes días de la semana? Pruebe usando  $\alpha = 0,05$ .
34. Una investigadora desea estimar el tiempo promedio (en minutos) que los estudiantes de una universidad tardan en completar una encuesta institucional. Se toma una muestra aleatoria de 8 estudiantes, y se registran los siguientes tiempos (en minutos): 12, 15, 11, 13, 17, 14, 16, 12.
- a) ¿Cuál es la estimación puntual de la media de la muestra y poblacional?
- b) ¿Cuál es la estimación puntual de la varianza poblacional?
- c) ¿Cuál es la estimación puntual de la desviación estándar muestra?
- d) Determinar el intervalo de confianza del 95 %.
35. Un departamento de recursos humanos ha analizado el tiempo que tardan los nuevos empleados en completar un curso de capacitación inicial. Se sabe que históricamente estos tiempos siguen una distribución normal con una varianza poblacional de 38.44 horas<sup>2</sup>. Se tomó una muestra aleatoria de 16 empleados, obteniéndose los siguientes tiempos (en horas) que tardaron en completar el curso: 46, 50, 49, 47, 51, 45, 52, 48, 49, 50, 47, 46, 48, 49, 51, 50.
- a) Calcule el intervalo de confianza del 90 % para la media poblacional del tiempo de capacitación.
- b) Basándose en estos resultados muestrales, un estadístico ha hallado para la media poblacional un intervalo de confianza que va de 46.13 a 51.87 puntos. Halle el nivel de confianza de este intervalo.



36. Como ejemplo de una situación en la que varios estadísticos diferentes podrían ser razonablemente utilizados para calcular una estimación puntual, considere una población de  $N$  facturas. Asociado con cada factura se encuentra su valor en libros, la cantidad anotada de dicha factura. Sea  $T$  el valor en libros total, una cantidad conocida. Algunos de estos valores en libros son erróneos. Se realizará una auditoría seleccionando al azar  $n$  facturas y determinando el valor auditado (correcto) para cada una. Suponga que la muestra da los siguientes resultados (en dólares).

Factura	1	2	3	4	5
Valor en libros	300	720	526	200	127
Valor auditado	300	520	526	200	157
Error	0	200	0	0	-30

- Sea  $\bar{Y}$  = valor en libros medio muestral,  $\bar{X}$  = valor auditado medio muestral,  $\bar{D}$  = error medio muestral. Proponga tres estadísticos diferentes para estimar el valor total (correcto) auditado: uno que implique exactamente  $N$  y  $\bar{X}$ , otro que implique  $T$ ,  $N$  y  $\bar{D}$  y el último que implique  $T$  y  $\bar{X}/\bar{Y}$ . Si  $N=5000$  y  $T=1761300$ , calcule las tres estimaciones.
37. Un investigador desea estimar el tiempo promedio que un grupo de estudiantes universitarios dedica al estudio por día. Se toma una muestra aleatoria de estudiantes, obteniéndose los siguientes tiempos en horas: 3.2, 4.1, 2.9, 3.7, 3.5, 4.0, 3.1, 3.8, 3.6, 3.3.
- Calcula el intervalo de confianza del 95 % para la media poblacional del tiempo de estudio diario.
  - A partir de la misma muestra del inciso anterior, supón que se obtuvo el siguiente intervalo de confianza: [3.24, 3.96] ¿Y cuál fue el nivel de confianza usado aproximadamente?